

HANDBUCH
DER
VERMESSUNGSKUNDE

VON
D^r W. JORDAN
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU HAMBURG

DRITTER BAND
LANDES-VERMESSUNG
UND
GRUNDAUFGABEN DER ERD-MEßKUNDE
1886

DRITTE VERBESSERTE UND ERWEITERTE AUFLAGE

STUTTGART
VERLAG DER J. B. METZLERSCHEN BUCHHANDLUNG
1890





HANDBUCH
DER
VERMESSUNGSKUNDE

VON
D^R W. JORDAN

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU HANNOVER

DRITTER BAND
LANDES-VERMESSUNG
UND
GRUNDAUFGABEN DER ERD-MESSUNG

DRITTE VERBESSERTE UND ERWEITERTE AUFLAGE



STUTTGART
VERLAG DER J. B. METZLERSCHEN BUCHHANDLUNG

1890

530.160202

M 88.3

45071

5071

VORWORT.

Mit diesem dritten Bande wird die dritte Auflage des „Handbuchs der Vermessungskunde“ zum Abschluss gebracht.

Dieser Band enthält die Technik und die mathematischen Theorien der Triangulierungen erster Ordnung, mit den Coordinaten-Systemen für Landesvermessungen, und die damit eng verknüpften geodätischen Grundaufgaben der heutigen „internationalen Erdmessung“.

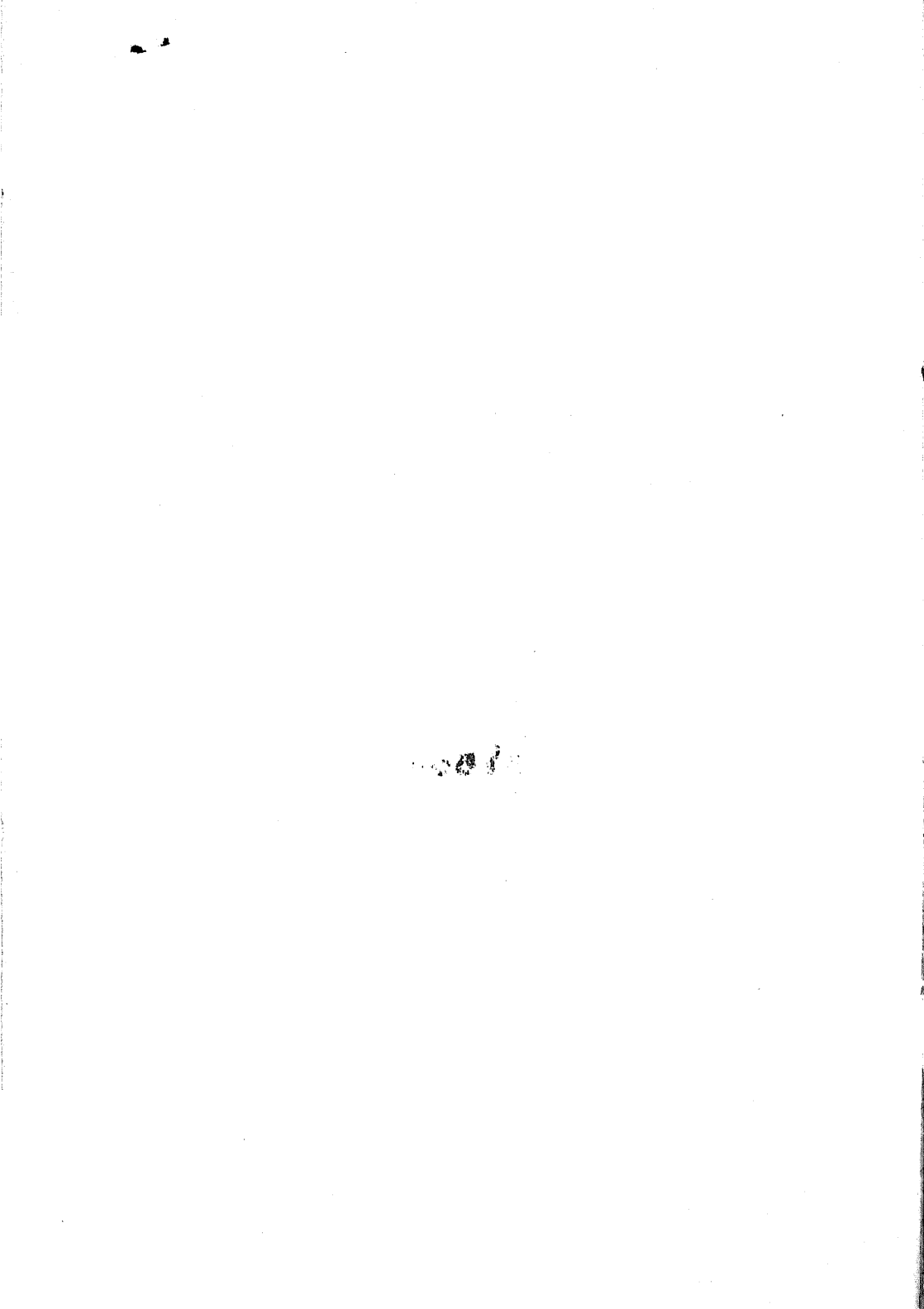
Die mathematischen Entwicklungen sind zunächst in möglichst elementarer Weise soweit geführt, als für den Feld- und Landmesser zum ersten Verständnis unserer Deutschen Landesvermessungen erforderlich ist (vgl. die Anmerkung auf S. 347), worauf zu Entwicklungen mit erweiterten mathematischen Begriffen und höheren Zielen übergegangen wird.

Dabei haben wir die Theorie der geodätischen Linie auf geometrischem Wege erheblich vereinfacht (§ 73. — 75., § 93. — 95.), wodurch, wie wir hoffen, erstens ein Beitrag zur ~~Ver~~ ^{Ver} dieser interessanten Linie überhaupt gegeben, namentlich aber, bei Wahrung der nötigen wissenschaftlichen Schärfe, für den Praktiker beim Aufsteigen von den unteren Gebieten des Feld- und Landmessens zu den höheren Gebieten der Landesvermessung und Erdmessung, das in den bisherigen analytischen Theorien der geodätischen Linie liegende Hindernis beseitigt sein wird.

Im Vergleich mit der vorhergehenden Auflage von Karlsruhe 1877 bis 1878, ist die hiemit vollendete neue, Hannoversche, Auflage wesentlich verbessert, umgearbeitet und erweitert, und in vielen Teilen als ein neues Buch zu betrachten, welches die Zusammenfassung, Befestigung und Abrundung der Feld-, Land- und Erdmessungs-Wissenschaft sich zur Aufgabe gestellt hat.

Hannover im Mai 1890.

Jordan.



INHALTS-ÜBERSICHT.

	Seite
§ 1. Einleitung. Überblick über die Geschichte der Erdmessungen	1
Kapitel I. Triangulierung erster Ordnung.	
§ 2. Aufsuchung und Auswahl der Dreieckspunkte	17
§ 3. Pfeilerbau und Signalbau	25
§ 4. Das Heliotrop	34
§ 5. Anordnung der Winkelmessung	43
§ 6. Schraubenfehler und Teilungsfehler	45
§ 7. Normalmasse	53
§ 8. Komparatoren	59
§ 9. Bestimmung der Neigung der Mikroskop-Axen	65
§ 10. Ältere Basismessungen	70
§ 11. Der <i>Besselsche</i> Basis-Messapparat	76
§ 12. Massbestimmung des <i>Besselschen</i> Apparates	80
§ 13. Die Göttinger Basismessung	86
§ 14. Neuere Basis-Apparate mit isolierten Mikroskopen	92
§ 15. Neuere Massbestimmungen für bimetallische Stäbe	103
§ 16. Verschiedene Projekte zur Basismessung	107
§ 17. Länge und Einteilung der Grundlinien	110
§ 18. Basisnetze	113
§ 19. Mittlere Fehler verschiedener Dreiecksseiten	119
§ 20. Fehler-Fortpflanzung in Dreiecksketten	127
§ 21. Anordnung der Triangulierungs-Ketten und der Triangulierungs-Netze	133
§ 22. Verschiedene Fehler-Betrachtungen zur Anlage von Dreiecks-Netzen	139
§ 23. Der <i>Schreibersche</i> Satz über günstigste Gewichtsverteilung	144
§ 24. Seiten-Refraktion	152
§ 25. Genauigkeit der Basismessung	160
§ 26. Geschwindigkeit der Basismessung	165
§ 27. Mittlere Winkelfehler der Triangulierungen	167
§ 28. Schluss-Betrachtungen über Haupt-Triangulierung	189
Kapitel II. Mathematische Hilfsmittel der geodätischen Entwicklungen.	
§ 29. Sphärische Trigonometrie	194
§ 30. Reihen-Entwicklungen	196
§ 31. Interpolation	203
Kapitel III. Das Erd-Ellipsoid.	
§ 32. Erklärungen und Grundmasse	205
§ 33. Die Haupt-Krümmungshalbmesser	208

	Seite
§ 34. Krümmungshalbmesser für beliebiges Azimut	213
§ 35. Rektifikation der Meridian-Ellipse	216
§ 36. Bestimmung der Oberfläche des Erd-Ellipsoids	224
§ 37. Mittlerer Halbmesser der Erde als Kugel	228
§ 38. Hilfstafeln zu geodätischen Berechnungen mit den <i>Besselschen</i> Erd- dimensionen	230

Kapitel IV. Sphärische Dreiecksberechnung.

§ 39. Wahl eines Kugelhalbmessers	232
§ 40. Der sphärische Excess	233
§ 41. Der <i>Legendresche</i> Satz	236
§ 42. Die Additamenten-Methode	240
§ 43. Verschiedene sphärische Aufgaben	245
§ 44. Sphärisch-trigonometrische Reihen-Entwicklungen bis zur Ordnung $\frac{1}{n^4}$ ein- schliesslich	247

Kapitel V. Sphärische Coordinaten.

§ 45. Übersicht der Coordinaten-Systeme	258
§ 46. Rechtwinklige sphärische (<i>Soldnersche</i>) Coordinaten	261
§ 47. Beispiel der <i>Soldnerschen</i> Coordinaten-Berechnung	267
§ 48. Bestimmung von Entfernung und Richtungswinkeln aus <i>Soldnerschen</i> Coordinaten	271
§ 49. Pothenotische Aufgabe mit <i>Soldnerschen</i> Coordinaten	276
§ 50. Karten-Zeichnung nach rechtwinkligen sphärischen Coordinaten	277
§ 51. Rechtwinklige sphärische konforme (<i>Gauss'sche</i>) Coordinaten	281
§ 52. Die Conformität des <i>Gauss'schen</i> Coordinaten-Systems	285
§ 53. Bestimmung der geographischen Coordinaten φ, λ aus den rechtwinkligen Coordinaten x, y	288
§ 54. Bestimmung der rechtwinkligen Coordinaten x, y aus den geographischen Coordinaten φ, λ	292
§ 55. Beziehungen zwischen geographischen Coordinaten und Polar-Coordinaten (sphärisch-geodätische Hauptaufgabe)	293
§ 56. Differential-Gleichungen der sphärisch-geodätischen Hauptaufgabe	301
§ 57. Reihen-Entwicklungen mit der Mittelbreite	304
§ 58. Weiter-Entwicklung bis zur 5. Ordnung	309
§ 59. Reihen-Entwicklungen nach Potenzen von σ , bis σ^3 einschliesslich	313
§ 60. Reihen-Entwicklungen bis σ^6 nach dem <i>Maclaurinschen</i> Satz	316
§ 61. Zweite Herleitung der Mittelbreiten-Formeln von § 57.	320

Kapitel VI. Sphäroidische Geodäsie mit Normalschnitten und Krümmungshalbmessern.

§ 62. Normalschnitte des Sphäroids	324
§ 63. Verkürzter Breiten-Unterschied	325
§ 64. Bestimmung der geographischen Coordinaten φ, λ aus den rechtwinkligen Coordinaten x, y und umgekehrt	329
§ 65. Gemarkungskarte mit geographischen Netzklinien	339

	Seite
§ 66. Die rechtwinkligen Coordinatensysteme des Deutschen Reiches	343
§ 67. Einführung eines sphärischen Hilfsdreiecks	347
§ 68. Ellipsenbogen eines Normalschnittes	352
§ 69. Konvergenz der beiden Normalschnitte	355
§ 70. Einfluss verschiedener Höhen	363
§ 71. Sphärische Potenzreihen bis σ^3 mit sphäroidischen Korrektionsgliedern bis $r^2 \sigma^3$	364

Kapitel VII. Die geodätische Linie.

§ 72. Geometrische Definition der geodätischen Linie	367
§ 73. Differential-Gleichungen der geodätischen Linie auf dem Umdrehungs- Ellipsoid	370
§ 74. Die geodätische Linie als kürzeste Linie	374
§ 75. Vergleichung der geodätischen Linie mit den Normal-Schnitten	376
§ 76. Bedeutung der geodätischen Linie für die praktischen Vermessungen	382

Kapitel VIII. Geodätische Hauptaufgabe mit Reihen-Entwicklungen für die geodätische Linie.

§ 77. Sphäroidische Normal-Beispiele	385
§ 78. Reihen-Entwicklungen nach Potenzen von s	387
§ 79. Sphäroidische Mittelbreiten-Formeln	393
§ 80. Die reduzierte Breite	402
§ 81. Das sphärische Hilfsdreieck mit reduzierten Breiten	405
§ 82. Integration der Differential-Gleichungen zur geodätischen Hauptaufgabe	407
§ 83. Neue Auflösung der geodätischen Hauptaufgabe und ihrer Umkehrung	414
§ 84. Vergleichung verschiedener Auflösungen der sphäroidisch-geodätischen Hauptaufgabe	421

Kapitel IX. Konforme Abbildung des Ellipsoids.

§ 85. Konforme Abbildung im allgemeinen	424
§ 86. Konforme Abbildung des Umdrehungs-Ellipsoids auf eine Kugel	425
§ 87. Wahl der Konstanten	427
§ 88. Reihen-Entwicklung für die Breiten-Differenz	434
§ 89. Reihen-Entwicklung für das Vergrößerungs-Verhältnis	437
§ 90. Azimut-Reduktion	441
§ 91. Hilfstafeln und Zahlenbeispiele	445
§ 92. Doppel-Projektion der Preussischen Landes-Aufnahme	448

Kapitel X. Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke.

§ 93. Theorie des geodätischen Dreiecks in erster Näherung	453
§ 94. Kongruente Linien-Abbildung und geodätischer Exzess	460
§ 95. Geodätische rechtwinklige Coordinaten und Polar-Coordinaten	462
§ 96. Verbindung eines rechtwinkligen Systems und eines Polar-Systems	466
§ 97. Reihen-Entwicklungen für das rechtwinklige geodätische Dreieck	469
§ 98. Berechnung des allgemeinen (schiefwinkligen) geodätischen Dreiecks	473
§ 99. Krumme Oberfläche des geodätischen Dreiecks	477
§ 100. Zweite Begründung der Grundformeln für geodätische Dreiecke	480
§ 101. Praktische Anwendung der allgemeinen Theorie der geodätischen Dreiecke	489

Kapitel XI. Bestimmung der Dimensionen des Erd-Ellipsoids.

	Seite
§ 102. Bestimmung der Meridian-Ellipse durch zwei Breiten-Gradmessungen	497
§ 103. Reduktion eines Gradmessungs-Bogens auf den Meridian	499
§ 104. Ausgleichung mehrerer Breiten-Gradmessungen	506
§ 105. Längen-Gradmessung	516
§ 106. Azimut-Übertragung	518
§ 107. Gradmessung schief zum Meridian	521

Kapitel XII. Lotabweichungen.

§ 108. Allgemeines über Lotabweichung	524
§ 109. Bestimmung der Lotabweichung durch Vergleichung astronomischer und geodätischer Messungen	529
§ 110. Bestimmung der Lotabweichung aus rechtwinkligen geodätischen Coordinaten	534
§ 111. Differential-Formeln zur astronomisch-geodätischen Netzausgleichung	539
§ 112. Astronomisch-geodätische Netz-Ausgleichung und Lotabweichungs-Bestimmung	545

Anhang.

Hilfstafeln.

	Seite
1. Die Haupt-Krümmungshalbmesser M und N des Umdrehungs-Ellipsoids, und Funktionen derselben	[2]—[23]
2. Längengrade, Breitengrade und Gradabteilungsflächen	[24]—[25]
3. Meridianbogen m_0^p vom Äquator bis zur Breite q	[26]
4. Breitenunterschied Δq und Meridianbogen m (Näherungswerte)	[27]
5. Parallelkreisbögen (Näherungswerte)	[28]
6. Längen-, Breiten- und Flächenmasse der Messtisch-Trapeze der topographischen Abteilung der Landes-Aufnahme	[29]
7. Additamente für $\log \frac{s}{r} - \log \sin \frac{s}{r}$	[30]
8. Verwandlung des Bogens in Zeit und umgekehrt	[31]
9. Näherungswerte für Berechnungen mit <i>Soldnerschen</i> Coordinaten	[32]
10. Näherungswerte für Berechnungen mit <i>Gausschen</i> konformen Coordinaten	[33]
11. Coefficienten verschiedener geodätischer Formeln	[34]—[37]
12. Coefficienten für die sphäroidischen Mittelbreiten-Formeln	[38]—[39]
13. Reduzierte Breite ψ	[40]
14. Reduzierte Längen al für die <i>Gaussche</i> konforme Kugel-Abbildung	[41]
15. <i>Gaussche</i> konforme Kugel-Abbildung	[42]—[43]
16. Coefficienten der neuen Auflösung der geodätischen Hauptaufgabe	[44]—[45]
17. 10 stellige Logarithmen der Funktion $\log V = \log \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 q}$	[46]—[47]

Übersicht der Haupt-Bezeichnungen, welche in den mathematischen Teilen dieses Buches angewendet sind [48]

§ 1. Einleitung.

Überblick über die Geschichte der Erdmessung.

Nach der kindlichen Anschauung, welche in Homers Gesängen (800—900 v. Chr.) ihren Ausdruck findet, war die Erde eine vom Okeanos umflossene Scheibe; und diese Anschauung hat sich lange erhalten, ohne sich von dem unmittelbaren Anblick, welchen z. B. die Krümmung der Meeresfläche beim Verschwinden eines Schiffes darbietet, stören zu lassen.

Pythagoras (geb. 582 v. Chr.) erklärte die Erde für eine Kugel.

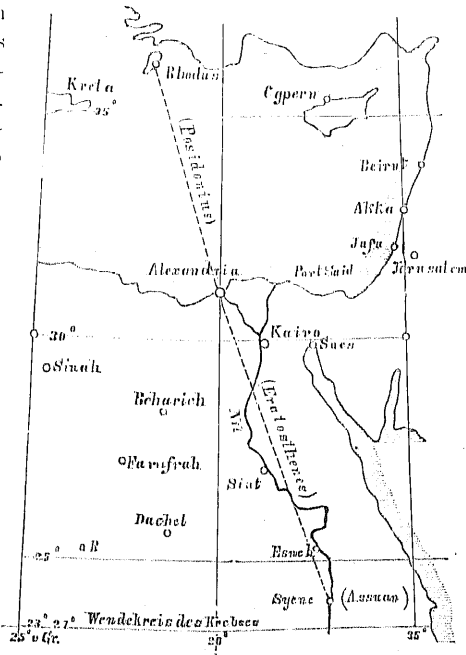
Aristoteles (384—322 v. Chr.) entwickelt in dem Werke *περί οὐρανοῦ*, B, 13—14, die Gründe für und wider die Kugelform, und kommt zu dem Schluss, dass die Form der Erde notwendig kugelförmig sei (Aristoteles, griechisch und deutsch von Prantl. S. 178: „ἀρεσκόντων τὴν τὸ οὐκ ἔστιν οὐρανοειδὲς“).

Was weiter die Frage nach der Grösse der Erde betrifft, d. h., nachdem die Kugelform erkannt war, die Frage nach dem Umfang oder dem Halbmesser der Erdkugel, so ist als einer der ersten, dem wir eine geschichtlich verbürgte Messung bzw. Schätzung verdanken, der alexandrinische Gelehrte *Eratosthenes* (276—195 v. Chr.) zu nennen.

Eratosthenes benützte zur Bestimmung des Erdumfangs den zufälligen günstigen Umstand, dass in Ober-Egypten in Assuan (heutiges Syene, vgl. Fig. 1.) zur Zeit der Sommersonnenwende die Sonnenstrahlen senkrecht in einen Brunnen schienen, während zu gleicher Zeit in Alexandrien die Sonnenstrahlen mit der Lotrichtung einen erheblichen Winkel bildeten, der zu $\frac{1}{50}$ von 360° gemessen wurde. Die Entfernung beider Punkte Alexandrien und Syene wurde aus der Zahl der Tagereisen zu 5000 Stadien geschätzt.

Auf diese Angaben gründete

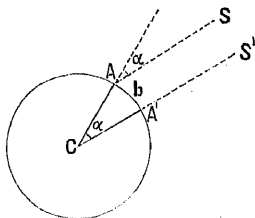
Fig. 1.
Gradmessungen von Eratosthenes und Posidonius.
Massstab 1 : 1 800 000.



Eratosthenes eine Bestimmung des Erdumfangs, nach dem Grundsatz der von da an durch Jahrtausende zur Ausführung von *Gradmessungen* gedient hat.

Wir wollen dieses mit Benützung von Fig. 2. ausführlichst darlegen:

Fig. 2.
Breitengradmessung.



Hier bezeichnen A und A' zwei Punkte der kugelförmigen Erdoberfläche (etwa A = Alexandrien, A' = Assuan), welche von den Sonnenstrahlen S und S' getroffen werden. Wegen der weiten Entfernung der Sonne sind die von S und S' aus gezeichneten Sonnenstrahlen als *parallel* zu betrachten.

In A' falle die Sonnenstrahlrichtung zufällig mit der Vertikalen oder der Richtung des Erdhalbmessers $A'C$ zusammen (Brunnen in Assuan) und in A sollen die Sonnenstrahlen mit dem Erdhalbmesser den Winkel α machen, was durch Schattenbeobachtung bestimmt werden kann. Dann ist dieser Winkel α in A auch gleich dem Erdcentriwinkel ACA' , und wenn man auf irgend welchem Wege dazu noch den Meridian-Bogen $AA' = b$ bestimmt hat, so lässt sich daraus der Erdumfang bestimmen:

$$U = \frac{360^\circ}{\alpha} b$$

In dem Falle der Gradmessung des Eratosthenes war $\alpha = \frac{1}{50} 360^\circ$, und $b = 5000$ Stadien, also der

$$\text{Erdumfang} = 50 \times 5000 = 250\,000 \text{ Stadien.}$$

Wie aus Fig. 1. zu ersehen ist, liegen Alexandrien und Syene nicht in einem Meridian, auch liegt Syene nicht genau unter dem Wendekreis, wie von Eratosthenes angenommen wurde; indessen kommen diese Nebenumstände bei einer *ersten* genäherten Beantwortung der Frage nach dem Erdumfang nicht in Betracht.

Nimmt man 1 Stadium rund = 185^m an (vgl. Karsten, Allgemeine Encyclopädie der Physik, I. Band Einleitung in die Physik. Leipzig 1869. S. 433, nebst Litteraturangaben S. 441), so erhält man: Erdumfang = $46\,250\,000^m$ oder:

$$\text{Erdquadrant, nach Eratosthenes} = 11\,562\,500 \text{ Meter}$$

also, da in Wirklichkeit der Erdquadrant nahezu gleich $10\,000\,000^m$ ist, um $16\frac{2}{3}\%$ zu viel.

In ähnlicher Weise wie Eratosthenes machte Posidonius (von 135–51 v. Chr.) eine Bestimmung des Erdumfangs mittelst des Bogens Alexandrien-Rhodus (vgl. Fig. 1.) in folgender Weise:

Der Stern Canopus konnte in Rhodus gerade noch im Horizonte gesehen werden, während er in Alexandrien sich um $\frac{1}{48}$ des grössten Himmelskreises (= $7^\circ 30'$) über den Horizont erhob; daraus lässt sich schliessen, dass der Erdumfang das 48fache des Erdmeridianbogens Alexandrien-Rhodus ist, und indem dieser Bogen ebenso gross wie der frühere Alexandrien-Assuan, nämlich = 5000 Stadien geschätzt wurde, fand sich der Erdumfang = $48\text{mal } 5000 \text{ Stadien} = 240\,000 \text{ Stadien}$, also, das Stadium wieder rund = 185^m gerechnet, der Erdumfang = $44\,400\,000 \text{ Stadien}$, oder:

$$\text{Erdquadrant, nach Posidonius,} = 11\,100\,000 \text{ Meter.}$$

Um einen Überblick über die Genauigkeit dieser alten Messungen, bzw. Schätzungen zu erhalten, stellen wir dieselben mit den jetzt bekannten Zahlen AB und b zusammen:

	Breiten B	ΔB	Meridianbogen b	$\Delta B'$	Meridianbogen b'
Rhodus	$36^{\circ} 26'$				
		$5^{\circ} 14'$	580^{km}	$7^{\circ} 30'$	$5000 \text{ Stad.} = 925^{km}$ (Posidonius)
Alexandrien	$31^{\circ} 12'$				
		$7' 7'$	789^{km}	$7^{\circ} 12'$	$5000 \text{ Stad.} = 925^{km}$ (Eratosthenes)
Syene	$24^{\circ} 5'$				

Die Fehler 925^{km} gegen 580^{km} und 925^{km} gegen 789^{km} sind also ganz erheblich.

In diesem Zusammenhange erwähnen wir auch noch ein Werk über Feld- und Landmessung aus dem Altertum, nämlich *Heron* (etwa 200 v. Chr.) über das Diopter (*περὶ διόπτρας*) vgl. Zeitschr. f. Verm. 1876 S. 120, 1887 S. 553, S. 674, 1888 S. 282, S. 325, S. 365.

Nach diesem haben wir über eine im Mittelalter ausgeführte Erdmessung zu berichten, welche wir den *Arabern* verdanken. Diese machten etwa um 827 nach Chr. eine Breitengradmessung, über welche der Niederländer *Snellius* in seinem Werke „*Eratosthenes Batavus*“ S. 107—112 nach Citat eines arabischen Schriftstellers *Abel fedcas* (1322) etwa folgendes berichtet: Die Messung geschah auf Befehl des Califen *Almanon* in der Ebene *Zinjar* (Sindschar nordwestlich von Bagdad) unter der Breite $36^{\circ} 20'$.

Das Ergebnis war:

$$1 \text{ Meridiangrad} = 56 \frac{2}{3} \text{ Meilen} = \frac{170}{3} \text{ Meilen}$$

$$1 \text{ Meile} = 4000 \text{ Ellen,}$$

also der Meridianquadrant der Erde:

$$Q = 90 \text{ Grad} = 90 \frac{170}{3} 4000 = 20\,400\,000 \text{ Ellen.}$$

Weiter soll sein 1 Elle = 24 Zoll und 1 Zoll = 6 Gerstenkornbreiten; was ist aber nun 1 Gerstenkornbreite? *Snellius* nahm an: 1 Gerstenkornbreite = $\frac{1}{89}$ rheinländische Fuss, also = $\frac{0,313853}{89} = 0,00352644$ Meter, und dieses giebt 1 Meridiangrad = 115 103 Meter und:

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,359 \text{ Kilometer.}$$

Statt dieser Gerstenkorn-Rechnung haben wir in jüngster Zeit eine Bestimmung der arabischen Elle nach dem Nilmesser von Kairo vorgenommen, wonach in bewundernswerter Übereinstimmung mit der heutigen Kenntnis der Erdgrösse, der Erdquadrant aus den arabischen Angaben sich sehr nahe = 10 000 Kilometer berechnet. (Weiteres hierüber wird mitgeteilt in der Zeitschr. f. Verm. 1889.)

Seit jener Zeit geschah 700 Jahre lang nichts mehr.

Die erste Erdmessung nach diesem langen Zeitabschnitt verdanken wir dem französischen Arzt *Fernel*, welcher im Jahr 1525 die Breiten von Paris und Amiens mittelst eines Quadranten, und die Entfernung beider Orte mittelst der Umdrehungen seines Wagenrades mass, und damit ein Ergebnis erzielte, welches zufällig nahezu richtig ist, nämlich nach *Lalande's* Nachrechnung:

$$1 \text{ Meridiangrad} = 57\,070 \text{ Toisen} = 111\,229 \text{ Meter}$$

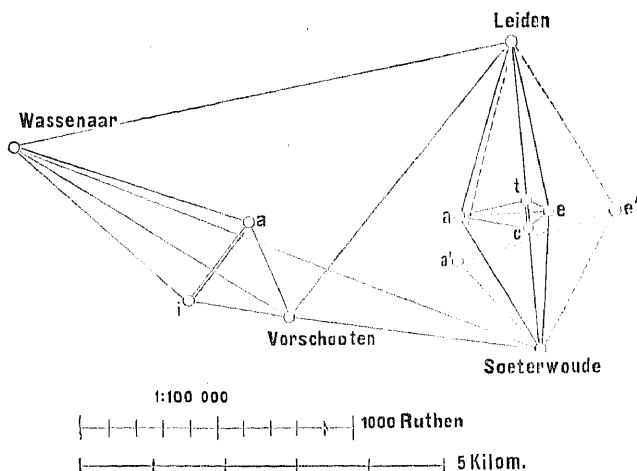
$$\text{Meridian-Quadrant} = 10\,011 \text{ Kilometer,}$$

also der Fehler nur = + 0,1%.

Eine neue Epoche der Erdmessung beginnt mit dem Niederländer *Willebrord Snellius* (1591–1626).

Snellius war, wie aus seinem Werke „*Eratosthenes Batavus, de terrae ambitus vera quantitate, a Willebrordo Snellio, Lugduni-Batavorum 1617*“ hervorgeht, ein nicht nur mathematisch sehr verständiger, sondern auch allgemein sehr gebildeter und scharfsinniger Mann. Die Erdmessung verdankt ihm wenn nicht die „Erfindung“, doch die erste uns überlieferte, auf etwa 1' in den Winkeln gemessene und richtig trigonometrisch berechnete *Triangulierung*, deren Basisnetze wir in Fig. 3. darstellen.

Fig. 3.
Basisnetz der Triangulierung von Snellius.
(Maßstab 1 : 100 000.)



Die erste Basis von *Snellius* war die kleine Strecke tc auf der Geraden Leiden-Soeterwoude, nämlich $tc = 87,05$ Ruten ($= 327,85^m$). Daraus wurde durch zwei Dreiecke abgeleitet $ac = 326,43$ Ruten und unmittelbar gemessen $326,90$ Ruten: Das trigonometrische Ergebnis $ae = 326,43$ R. wurde beibehalten, und daraus abermals durch 2 Dreiecke abgeleitet: Leiden-Soeterwoude $= 1092,35$ Ruten ($= 4114,06^m$). Damit wurde trianguliert bis Wassenaar und Vorschooten, und zwischen diesen zwei Punkten wieder eine Grundlinie $ai = 348,1$ Ruten gemessen. Der trigonometrische Anschlussfehler wird hier nicht mitgeteilt.

Dagegen hat *Snellius* einen Anschluss an eine dritte 166 Ruten lange Grundlinie zwischen Oudewater und Montfort etwa 30^m östlich von der ersten Grundlinie, der trigonometrische Anschluss ist $2923,3 - 2934,6 = -11,3$ Ruten oder 1 : 260, wozu *Snellius* bemerkt (S. 181), dass er solche Genauigkeit kaum zu hoffen gewagt habe.

Unsere Fig. 3. zeigt noch eine vierte, punktierte Grundlinie $a'e' = 475,00$ R. Dieses ist *Snellius'* spätere Messung und *Musschenbroeks* Berechnung, sie giebt Leiden-Soeterwoude $= 1097,117$ Ruten gegen $1092,35$ R. der ersten Bestimmung.

Die ganze Triangulierung von *Snellius* umfasst 33 Dreiecke, welche im wesentlichen in der heute noch üblichen Weise zu einer Breitengradmessung zwischen Alkmaar und Bergen op Zoom benützt wurden, wie folgende Zahlen zeigen:

Punkt	Breiten	Breiten-Unterschied	Meridianbogen (triang.)
Alkmaar	52° 40' 30"		
Bergen op Zoom	51° 29' 0"	1° 11' 30"	33 930 Rheinl. Ruten

Hiernach ist 1 Grad = $\frac{60'}{71,5'}$ 33 930 = 28 473 Ruten.

Nach diesem Ergebnis in Verbindung mit einer zweiten ähnlichen Messung nahm *Snellius* den Meridiangrad = 28 500 Rheinl. Ruten an. Dieses ist = 10 734 Meter, und damit berechnet man auch:

Meridian-Quadrant = 9 660 Kilometer.

Hiernach hat die *Snelliussche* Erdbestimmung einen Fehler von 3,4%. *Snellius* machte selbst Nachmessungen (vgl. *a' e'* Fig. 3. S. 4), aber erst sein Nachfolger *Musschenbroek* brachte *Snellius'* Werk zum Abschluss; er fand 1719 „secundum mensuram ultimam *Snellii* et nostram“ 1 Meridiangrad = 29 514 Ruten oder:

Meridianquadrant = 10 004 Kilometer.

Inzwischen waren auf *Snellius* zwei durch die Art ihres Verfahrens merkwürdige Gradmessungen gefolgt. Im Jahr 1633 mass *Norwood* den Bogen zwischen London und York unmittelbar mit der Kette.

Grimaldi und *Riccioli* bestimmten 1645 in Italien durch gegenseitige *terrestrische* Zenitdistanzen den Meridiangrad = 62 650 Toisen.

Diese Messung *terrestrischer* Zenitdistanzen, welche auch *Snellius* schon in seinem Schluss-Kapitel erwähnt, wäre das einfachste und beste Mittel zur Messung der Erde, wenn die Strahlenbrechung nicht bestünde, oder wenigstens der Rechnung besser zugänglich wäre, als es bis jetzt der Fall ist.

Indem wir nun den genauen Erdmessungen näher kommen, haben wir auch kurz zu erwähnen, *welche* Erdoberfläche bestimmt werden soll: Als Erdoberfläche im Sinne dieser Messungen ist zu betrachten die ruhend gedachte Meeresfläche, nebst ihrer unter den Kontinenten stetig angenommenen Fortsetzung.

Die wichtigsten Erdmessungen des 17. und 18. Jahrhunderts sind die *französischen*. Dieselben wurden von der im Jahre 1666 gegründeten Pariser Akademie veranlasst, und von *Picard* geleitet. Der Zweck dieser Messungen war ein zweifacher, erstens die Herstellung einer guten Karte von Frankreich und zweitens die Bestimmung der Grösse der Erde.

Aus der Fortsetzung der *Picardschen* Messungen, welche von *Lahire* und *Dominique* und *Jacques Cassini* geleitet wurde (1683—1716 südlich bis Collioure, nördlich bis Dünkirchen), schien zu folgen, dass die Erde an den Polen zugespitzt sei, während *Newtons* Theorie und *Richers* Pendelversuche, das Gegenteil behaupteten. Entschieden wurde die Frage durch die von den Franzosen im Jahre 1735 nach Peru und Lappland geschickten Gradmessungs-Expeditionen, durch welche festgestellt wurde, dass am Äquator der Erdmeridian stärker gekrümmt ist als in der Nähe des Pols, was mit der *Newtonschen* Theorie stimmt.

Die Gradmessung in Peru, 1735—1741, ist beschrieben in dem Werk „*Mesure des trois premiers degrés du méridien dans l'hémisphère australe, tirée des observations de Mrs. de l'académie royale des sciences, envoyés par le roi sous l'équateur, par M. de la Condamine. Paris 1751.*“

Die Gradmessung in Lappland, ausgeführt 1736—1737, ist beschrieben von *Maupeirtuis*: „La figure de la terre. Paris 1738.“

Es folgte 1740 eine Nachmessung des französischen Meridianbogens durch *Cassini de Thury* (III) und *Lacaille*.

Folgendes sind die wichtigsten hierauf bezüglichen Zahlenwerte:

Picards Messung des Bogens zwischen Paris und Amiens, welche 1669 begann, gab einen Breitengrad = 57 060 Toisen und damit:

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,009\,081 \text{ Meter.}$$

Die nördliche und südliche Fortsetzung gab folgendes:

	Mittelbreite	1 Meridiangrad
nördlich zwischen Paris und Dünkirchen	49° 56'	56 900 Toisen
„ Paris und Amiens	49° 22'	57 060 „
südlich „ Paris und Bourges	47° 57'	57 098 „

Hieraus schien eine gegen die Pole zugespitzte Erdform zu folgen.

Wir haben versucht, hieraus ein langgestrecktes Ellipsoid zu berechnen, das also eine *negative* Abplattung erhält. Es fand sich:

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,042\,650 \text{ Meter, Abplattung} = 1 : -66.$$

Die peruanische und die lappländische Gradmessung (letzte mit der späteren Verbesserung und Erweiterung durch *Svanberg*, 1801—1803) geben folgendes:

	Mittelbreite	1 Meridiangrad
Lappland + 66° 20' 10"		57 196 Toisen
Peru — 1° 33' 32"		56 734 „

Hieraus wird berechnet

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,000\,157 \text{ Meter, Abplattung} = 1 : 310,3.$$

Von den nun folgenden aussereuropäischen Gradmessungen erwähnen wir hier besonders diejenige von *Mason* und *Dixon* in Nordamerika, 1764—1768.

Dieselbe ist dadurch ausgezeichnet, dass eine Gerade von 434 011,64 engl. Fues (= 132 286 Meter) Länge unmittelbar mit Messlatten (also ohne Triangulierung) nahezu in der Meridianrichtung gemessen wurde. Im ganzen wurde der Meridianbogen zwischen den Breiten 39° 56' 19" und 38° 27' 34" bestimmt.

(Eine neuere Mitteilung hierüber s. Zeitschr. f. Verm. 1888, S. 33—39.)

In die zweite Hälfte des vorigen Jahrhunderts fällt auch die Gradmessung von *La Caille* am Kap der guten Hoffnung, *Beccarias* Messung in Turin, *Liesganigs* Messung in Ungarn, dann die Anfänge der englischen Messungen in England selbst und in Indien.

Die wichtigste Gradmessung vom Schluss des vorigen und Anfang dieses Jahrhunderts ist jedoch wieder eine französische, nämlich die von *Delambre* und *Méchain* 1792—1808 zur definitiven Feststellung des *Meters* ausgeführte. Das hierüber veröffentlichte Werk ist: *Base du système métrique décimal, ou mesure du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone, exécutée en 1792 et années suivantes*, par M. M. *Méchain* et *Delambre*, rédigée par M. *Delambre*. Tome premier Paris janvier 1806, tome second Paris juillet 1807, tome troisième Paris novembre 1810.

Das Meter sollte möglichst genau der zehnmillionste Teil des Erdquadranten sein. Zur möglichst genauen Ermittlung desselben wurde die Gradmessung von *Delambre* und *Méchain* 1792 unternommen.

Dieselbe gab den Bogen zwischen Dünkirchen und Montjoux = 275 792,36 Modules (1 Module = 2 Toisen) und dieser nahezu 10° grosse Bogen zwischen den Breiten $51^\circ 2' 8,85''$ und $41^\circ 21' 44,96''$ wurde als Grundlage für das metrische System genommen. Um die Abplattung zu erhalten, wurde dieser Bogen mit der peruanischen Gradmessung kombiniert, woraus die Abplattung 1:334 erhalten wurde.

Nun wurde der Meridianquadrant berechnet = 2 565 370 Modules = 5 130 740 Toisen, und da eine Toise 864 Par. Linien hat, so ist hiernach:

$$1 \text{ Meter} = \frac{5\,130\,740 \times 864}{10\,000\,000} = 443,295\,936 \text{ Par. Linien,}$$

was auf 443,296 abgerundet wurde.

Indem man umgekehrt für die *Delambresche* Messung das Meter = 443,296 Par. Linien als Einheit annimmt, hat man:

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,000\,000 \text{ Meter, Abplattung} = 1:334.$$

(Vorstehende Zahlenangaben finden sich in dem Werk: *Base du système métrique* III. Band S. 433, S. 619—622.)

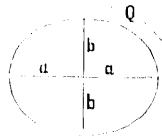
Bestimmung der Meridian-Ellipse.

Nachdem die Abplattung der Erde entschieden war, handelte es sich nicht mehr bloss wie früher um *eine* Unbekannte, nämlich den Halbmesser der Erdkugel, sondern um *zwei* Unbekannte, etwa die beiden Halbachsen a und b der Meridian-Ellipse (Fig. 4.) oder statt dessen um eine Halbachse a und

dazu die Excentricität $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ oder den Meridianquadranten

$$Q \text{ und die Abplattung } \alpha = \frac{a - b}{a} \text{ *)}$$

Fig. 4.
Erdmeridian-Ellipse.



Wenn zwei Gradmessungen in dem bisher gültigen Sinne vorliegen, nämlich ein Meridianbogen und die beiden geographischen Breiten der Endpunkte für je eine Gradmessung, so ist es mathematisch betrachtet eine leichte Aufgabe, mit genügender Näherung eine Ellipse zu bestimmen, welche diesen *zwei* Gradmessungen genügt, und wir werden später z. B. die Berechnung der oben angegebenen Gradmessungen von Lappland und Peru in wenigen Gleichungen entwickeln können.

Als man aber im vorigen Jahrhundert anfang, mehr als zwei Gradmessungen zusammen in Rechnung zu nehmen, stiess man auf starke Widersprüche, welche sich aus den unvermeidlichen Messungsfehlern kaum erklären liessen und bald den Gedanken nahe legten, dass die Erde nicht genau ein Umdrehungs-Ellipsoid sei.

Dennoch ist nun ein Zeitraum von wohl 100 Jahren (etwa von 1740—1840) der Aufgabe gewidmet, eine solche *Ausgleichung* der zahlreichen Gradmessungen zu erzielen, dass die übrig bleibenden Widersprüche in den Messungen der geographischen Breiten in ihrer Gesamtheit möglichst klein ausfallen.

Insofern fällt die Geschichte der Gradmessungs-Berechnungen mit der Geschichte

*) Aus der grossen Halbachse a und der Abplattung α berechnet man, wie wir später entwickeln werden, den Meridianquadranten Q nach der Formel:

$$Q = \frac{a\pi}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16} \right)$$

der Methode der kleinsten Quadrate zusammen, welche wir in unserem ersten Bande (Einleitung Seite 2) behandelt haben.

Die erste öffentliche Mitteilung über die Methode der kleinsten Quadrate, nämlich *Legendre's* Abhandlung „sur la méthode des moindres carrés“, welche als Anhang der „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes“ im Jahre 1805 erschien, enthält zugleich auch die erste Ausgleichung von Gradmessungen nach dieser Methode.

Legendre nimmt 5 geographische Breiten zwischen Dünkirchen ($51^{\circ} 2' 10,50''$) und Montjoux ($41^{\circ} 21' 44,80''$) mit den 4 dazwischen liegenden französischen Meridianbögen, und macht damit eine theoretisch ganz richtige Ausgleichung, welche jedoch den viel zu grossen Abplattungswert 1:148 und auch einen zu kleinen Meridianquadranten = 9 997 780 Meter gab; doch berührt uns hier weniger das Erdberechnungsergebnis als das theoretisch richtige dabei angewendete Verfahren.

Die nächste Ausgleichung dieser Art machte *Walbeck* im Jahre 1819. Nach den Mitteilungen, welche wir hierüber haben, von *Gauss* in der „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona“ S. 72 und S. 82, hat *Walbeck* hierüber eine kleine Abhandlung geschrieben „De forma et magnitudine telluris, ex dimensis arcibus meridiani, definiendis“ (Abo, 1819). *Walbeck* hat die peruanische, die beiden ostindischen, die französische, englische und die neuere lappländische Gradmessung der Rechnung unterworfen; indessen hat er bei jeder einzelnen Gradmessung nur den ganzen Bogen, oder die an den Endpunkten beobachteten Polhöhen in Betracht gezogen, ohne die Zwischenpunkte zu berücksichtigen. Das Ergebnis war Abplattung = 1:302,76 und mittlerer Meridiangrad = 57 009,746 Toisen, dieses giebt:

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,000\,266 \text{ Meter} \quad \text{Abplattung} = 1:302,76.$$

Neun Jahre später, 1828, haben wir eine abermals verbesserte und erweiterte Ausgleichung, welche *Schmidt* in Göttingen auf *Gauss'* Veranlassung machte, wie in der „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona“ S. 82—84 von *Gauss* mitgeteilt wird. *Schmidt* hat die an den Zwischenpunkten beobachteten Polhöhen mitberücksichtigt, auch die hannoversche Gradmessung zugezogen, so dass er die peruanische, erste und zweite ostindische, französische, englische, hannoversche und schwedische Gradmessung, mit zusammen 25 Polhöhen nach dem Grundsatz ausglich, dass die Quadratsumme der übrigbleibenden Polhöhenfehler ein Minimum wird. Das Ergebnis war: Abplattung $1:(298,39 \pm 12,5)$ und mittlerer Meridiangrad = 57 010,35 Toisen, oder:

$$\begin{array}{ll} \text{Meridianquadrant} = 10\,000\,371 \text{ Meter} & \text{Abplattung} = 1:298,39 \\ & \pm 88 \qquad \qquad \qquad \pm 12,50 \end{array}$$

Der mittlere Polhöhenfehler ist $\pm 3,18''$.

Schmidt hat solche Berechnungen noch weiter fortgesetzt, und hievon Mitteilung gemacht in dem „Lehrbuch der mathematischen und physischen Geographie von Dr. J. C. Eduard Schmidt, Privatdozent auf der Universität Göttingen.“ Erster Teil 1829. Vorrede Seite IV—V, und Astr. Nachr. 7. Band (1829) Nr. 161. S. 329—332.

Die letzte Bestimmung *Schmidts* ist vom Jahr 1830, und giebt (nach *Listing* (3)):

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,000\,061 \text{ Meter} \quad \text{Abplattung} = 1:297,648.$$

Der Engländer *Airy* machte im Jahre 1830 eine Bestimmung aus 14 Breitengradmessungen mit Hinzuziehung einiger gemessener Längengrade. Die Ergebnisse sind nach „Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland, London 1858, introduction“ Seite XVI: $a = 20\,923,713$ engl. Fuss und $b = 20\,853,810$ engl. Fuss, woraus wir berechnen:

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,001\,012 \text{ Meter} \quad \text{Abplattung} = 1:299,325.$$

Wir kommen nun 1837—1841 an die *Besselsche* Ausgleichung der Gradmessungen, welche auf einer sehr gründlichen Prüfung und Sichtung des bis dahin gesammelten Gradmessungsstoffes beruht. Bessel benützte die folgenden Messungen:

Gradmessung	Mittelbreite	Amplitude	Zahl der Polhöhen
1. Peruanische	— $1^{\circ} 31'$	$3^{\circ} 7'$	2
2. erste Ostindische	12 32	1 35	2
3. zweite Ostindische	16 8	15 58	7
4. Französische	44 51	12 22	7
5. Englische	52 2	2 50	5
6. Hannoversche	52 32	2 1	2
7. Dänische	54 8	1 32	2
8. Preussische	54 58	1 30	3
9. Russische	56 4	8 2	6
10. Schwedische	66 20	1 37	2
Summen		$50^{\circ} 34'$	38

Die Einzelheiten der Messungen und der Ausgleichung (Quadratsumme der 38 Polhöhen-Verbesserungen) sind von *Bessel* mitgeteilt in einer Abhandlung in den astr. Nachr. 14. Band (1837) Nr. 333, S. 333—346. Es wurde jedoch eine Neuberechnung nötig wegen Auffindung eines Fehlers in der französischen Gradmessung, worüber *Bessel* im 19. Bande der astr. Nachr. (1841) Nr. 438, S. 97—116 berichtet. Die *Besselschen* End-Ergebnisse sind:

$$\begin{aligned} \text{Meridianquadrant} &= 10\,000\,855,76 \text{ Meter} \quad , \quad \text{Abplattung} = 1:299,1528 \\ &\quad \pm 498,23 \quad \quad \quad \pm 4,667 \end{aligned}$$

Diese *Besselschen* Erddimensionen haben rasch allgemeinste Anerkennung und weiteste Verbreitung gefunden; sie sind namentlich deswegen wichtig, weil Hilfstafeln in grosser Zahl und Ausdehnung für praktische Vermessungen und Berechnungen darauf gegründet sind.

Mit diesen Mitteilungen über *Berechnungen* sind wir der Geschichte der *Messungen* zum teil vorausgeeil.

Ausser den schon erwähnten französischen Arbeiten haben wir in diesem Jahrhundert folgende Erdmessungen zu erwähnen:

Die *dänische* Gradmessung unter Leitung von *Schumacher* von 1816 an. Zu einem abgeschlossenen Werke gelangte die dänische Gradmessung in jüngster Zeit unter Leitung von *André* durch das Werk: Den Danske Gradmaalng, 1. Band, Kopenhagen 1867, 2. Band 1872, 3. Band 1878, 4. Band 1884. Einen Bericht hierüber gab Helmer in der Vierteljahrsschrift der astr. Gesellschaft 1877, S. 184—239 und 1878, S. 57—80.

Hieran schloss sich die *hannoversche* Gradmessung von *Gauss* 1821—1823, und

bald folgte die Gradmessung in *Ostpreussen* von *Bessel*. Über diese zwei klassischen Werke werden wir im Zusammenhang mit den übrigen deutschen Vermessungen nachher weiteres berichten (S. 13—14).

Die grösste Ausdehnung in Europa hat die *russische* Gradmessung von *Struve* und *Tenner*. Der erste Teil hievon ist behandelt in dem Werk: „Beschreibung der von der Universität Dorpat veranstalteten Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands, ausgeführt und bearbeitet in den Jahren 1821—1831 mit Beihilfe des Kapitän-Lieutenants *B. W. v. Wrangel* und Anderer, von *F. G. W. Struve*, Direktor der Dorpater Sternwarte. Dorpat 1831“. (Weiteres nebst Litteraturangaben findet man in *Petermanns* geogr. Mitteilungen 1857 S. 315—321.)

Von russischer Seite sind hier auch die Arbeiten des Generals *v. Schubert* zu erwähnen, welcher zuerst den Versuch machte, die Erde durch ein *dreiaxiges* Ellipsoid darzustellen, und auch andere Erdberechnungen ausführte. Weiteres hierüber giebt *Listing* (11), vgl. das Litteratur-Verzeichnis am Schlusse dieses Abschnitts S. 16).

Die *englischen* Messungen begannen im Jahre 1783 unter General *Roy*. Wir haben hierüber das grosse Werk: „Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland. Account of the observations and calculations of the principal triangulation and of the figure, dimensions and mean specific gravity of the earth as derived from, etc., by Captain Alexander Ross *Clarke* under the direction of Colonel *H. James*, Superintendent of the Ordnance survey. London 1858.“

Auf Seite 771 dieses Werkes wird als Ergebnis einer Ausgleichung von 8 Gradmessungen mit 66 Breiten mitgeteilt:

$$a = 20\,926\,348 \qquad b = 20\,855\,233 \text{ engl. Fuss,}$$

woraus wir berechnen:

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,001\,983 \text{ Meter,} \qquad \text{Abplattung} = 1:294,261.$$

Hier sind auch die britisch-ostindischen Arbeiten zu erwähnen, 1790 begonnen von *Reuben Burrow*, fortgesetzt von *Dalby*, *Lambton* *Everest* bis 1847, sowie die zweite Gradmessung am Kap der guten Hoffnung von *Maclear* 1836—1848.

Unter den englischen Erdmessungsarbeiten sind namentlich auch die zahlreichen *Erd-Ellipsoid-Berechnungen* anzuführen, welche *Clarke* seit 1856 bis in die neueste Zeit ausgeführt hat. (*Listing* (7)—(10).) Wir wollen hievon diejenigen beiden Bestimmungen hierhersetzen, welche in den Verhandlungen der permanenten Konferenz der internationalen Erdmessung von 1887, angegeben sind in Beilage I, Lotabweichungen, von *Helmert*, S. 5—6, nämlich mit Zufügung des Meridianquadranten:

$$\text{Clarke 1866} \quad a = 20\,926\,062 \qquad b = 20\,855\,121 \text{ engl. Fuss}$$

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,001\,888 \text{ Meter,} \qquad \text{Abplattung} = 1:294,978$$

$$\text{Clarke 1880} \quad a = 20\,926\,202 \qquad b = 20\,854\,895 \text{ engl. Fuss}$$

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,001\,871 \text{ Meter,} \qquad \text{Abplattung} = 1:293,466.$$

In diesem Zusammenhange haben wir auch die *nordamerikanischen* Messungen einzureihen, deren erste Anfänge, die *Mason-Dixonsche* Gradmessung von 1764, wir schon oben erwähnt haben. Die Fortsetzung der nordamerikanischen Messungen in

der Neuzeit sind wissenschaftlich und praktisch wichtig und interessant. Das Hauptwerk hierüber ist:

„Professional papers of the corps of engineers, U. S. Army, Nr. 24. Report upon the primary triangulation of the United States Lake Survey, by Lieut. Col. C. B. Comstock, Corps of Engineers, Brevet Brigadier-General, U. S. A., aidet by the Assistents on the survey. Washington: Government printing office. 1882.

Vgl. „Zeitschr. f. Verm.“ 1888, S. 203—207 und S. 385—395.

Lotabweichungen, Geoid.

Schon die ersten Berechner des Erdellipsoids hatten erkannt, dass die Widersprüche bei solchen Berechnungen und Ausgleichungen nicht durch Messungsfehler allein erklärt werden können, dass vielmehr die ideale Erdoberfläche überhaupt nicht genau die Form eines Umdrehungs-Ellipsoids hat. Trotzdem wurden die Berechnungen lange in der Form fortgeführt, als ob es sich nur um unregelmässige Messungsfehler handelte. Insofern jedoch die Widersprüche der Berechnungen nicht den Messungen, sondern den Abweichungen der Erdform von dem Ellipsoid zuzuschreiben sind, nannte man diese Widersprüche „*Lotabweichungen*“.

Einen wertvollen Beitrag zur Klarlegung der hierbei vorkommenden Begriffe, sowie zur Geschichte der Erdmessungen überhaupt hat *Listig* gegeben in der kleinen Abhandlung: „Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Grösse der Erde“ in den Nachrichten von der K. Ges. d. Wiss. und der G. A. Universität zu Göttingen, 5. Febr. 1873. Nr. 3. S. 33—98.

Man hat hiernach *drei* verschiedene Flächen zu unterscheiden:

1) Die Begrenzungsfläche zwischen den starren und tropfbarflüssigen Teilen der Erde einerseits und der Atmosphäre andererseits, d. h. die *physische Erdoberfläche*.

2) Die Oberfläche des gesamten Meeres in seinem Gleichgewichtszustande, also abgesehen von Flut und Ebbe und Wellenschlag; unter den Kontinenten denkt man sich diese Fläche erweitert durch ein Netz von Kanälen, welche unter sich und mit dem freien Meer in Verbindung stehen. Diese Fläche, welche, dem hydrostatischen Gesetz der ruhenden Flüssigkeit entsprechend, alle Lotlinien (Richtung der Schwerkraft) rechtwinklig durchschneidet, heisst nach *Listig* das *Geoid*.

3) Da die Abweichungen des Geoids von einem Umdrehungsellipsoid im Vergleich mit den Erddimensionen selbst klein sind, z. B. in Deutschland nach den neuesten Bestimmungen von *Helmert* (1888) nur etwa 5—10 Meter, kann man auf die Bestimmung eines idealen *Erdellipsoids* ausgehen, dessen Umdrehungsaxe mit der wirklichen Erdaxe zusammenfällt, dessen Lage im übrigen jedoch verschieden definiert werden kann. *Listig* setzt hierfür fest:

- erstens, es soll das Ellipsoid mit dem Geoid gleiches Volumen haben,
- zweitens, es soll die Summe der Beträge von Erhöhungen und Vertiefungen zwischen dem Geoid und dem Ellipsoid ein Minimum sein.

Hiernach berechnet *Listig* ein „typisches Ellipsoid“ mit folgenden Dimensionen (*Listig* (20)):

$$a = 6\,377\,365^m \quad b = 6\,355\,298^m$$

$$\text{Meridianquadrant } Q = 10\,000\,218^m \quad \text{Abplattung} = 1 : 289,00$$

$$\text{Mittlerer Halbmesser } R = \sqrt[3]{a^2 b} = 6\,370\,000^m.$$

Pendelbeobachtungen.

Wie schon im vorigen Jahrhundert das Pendel *Richers* zur Aufklärung über die Abplattung beigetragen hatte, so sind heute noch die Pendelbeobachtungen ein wichtiges Hilfsmittel der Erdmessung.

Die neueste und gründlichste Bestimmung der Abplattung der Erde aus Pendelbeobachtungen hat *Helmert* ausgeführt in dem Werke: „Die mathem. und phys. Theorien der höheren Geodäsie, II. Band, Leipzig 1884“. Auf S. 215—241 dieses Werkes wird aus einer Reduktion und Ausgleichung von 122 Pendellängen die Abplattung der Erde abgeleitet:

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299,26 \pm 1,26} \text{ (Helmert, Pendel).}$$

Auch ist hier zu erwähnen die Bestimmung der Abplattung aus der Mond-Theorie, welche nach *Helmerts* Interpretation ergibt:

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{297,8 \pm 2,2}$$

Im Anschluss hieran möge auch die neueste Annahme von *Helmert* für ein Referenz-Ellipsoid zu Lotabweichungs-Berechnungen hier hergesetzt werden, nämlich nach den „Verhandlungen der Konferenz der perm. Kommiss. d. internat. Erdm. von 1887, Berlin 1888, Beilage I Lotabweichungen“ S. 7, ein Ellipsoid, dessen lineare Dimensionen (nach verschiedenen Erwägungen) unter Festhaltung des *Besselschen* (genäherten) Abplattungswertes aus der französisch-englisch-russischen Breitengradmessung hervorgehen:

$$a = 6\,378\,153^m \quad b = 6\,356\,832^m$$

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,002\,041 \quad \text{Abplattung} = 1 : 299,149.$$

Die deutschen Vermessungen.

Nachdem in der Gesamtdarstellung der Geschichte der Erdmessungen überhaupt nur die beiden klassischen Gradmessungen von *Gauss* und von *Bessel* kurz erwähnt wurden, wollen wir unsere vaterländischen Messungen im Zusammenhang noch etwas näher betrachten.

(Vgl. *Jordan-Steppes*, das deutsche Vermessungswesen, Stuttgart 1882, und „die deutschen Landesvermessungen“, Vortrag auf dem VII. Geographentag, zu Karlsruhe, Verhandlungen des VII. deutschen Geographentages zu Karlsruhe 14—16. April 1887, Berlin 1887, S. 18—32, und Zeitschr. f. Verm. 1888, S. 310—325.)

Das erste ist die *bayerische Landesvermessung*, welche am Anfang dieses Jahrhunderts ursprünglich nach französischen Mustern unternommen, bald eine völlig selbstständige Entwicklung nahm, dieses ist namentlich dem Leiter derselben *Soldner* (1776—1833) zu verdanken, dessen Name heute noch mit dem von ihm zuerst eingeführten rechtwinkligen sphärischen Coordinaten-System rühmlich genannt wird.

(Vgl. das amtliche Werk: „Die bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, herausgegeben mit höchster Genehmigung von der k. Steuerkataster-Kommission in Gemeinschaft mit dem topographischen Bureau des Generalstabs. München 1873“, *Jordan-Steppes*, deutsches Vermessungswesen, 1882, I, S. 195 u. ff. Ferner: „*Johann Georg Soldner* und sein System der bayerischen Landesvermessung,

Vortrag am 27. Juli 1885 von *Carl Max v. Bauernfeind*, München 1885^a (Zeitschr. f. Verm. 1886, S. 45).

Nächst *Soldner* und der bayerischen Landesvermessung ist *Bohnenberger* (1765—1831) mit seiner *württembergischen* Triangulierung hier anzuführen; diese begann 1818.

(Vgl. das amtliche Werk: „Die Landesvermessung des Königreichs Württemberg u. s. w. von *Konrad Kohler*, Stuttgart 1858^a. *Jordan-Steppes*, deutsches Vermessungswesen I, S. 244 u. ff., ferner die Biographie: *Johann Gottlieb Friedrich Bohnenberger*, von Dr. *L. F. Ofterdinger* in Ulm, Tübingen, Fues, 1885, (Zeitschr. f. Verm. 1886, S. 44).

Des geographischen Zusammenhangs wegen erwähnen wir hier auch kurz die *badische* Triangulierung unter *Klose*. Dieselbe hat jedoch eine andere Entwicklung genommen, als die beiden vorher genannten, sie ist in ihrer jetzigen Gestalt das Werk von Obergeometer *Rheiner*, unbedingt die genaueste der drei süddeutschen Triangulierungen, aber nicht amtlich veröffentlicht (vgl. *Jordan-Steppes*, deutsches Vermessungswesen 1882, I. S. 270—285).

In dieser Reihe folgt die *hessische* Triangulierung von *Eckhardt* und *Schleiermacher* von 1808 an. (*Jordan-Steppes*, deutsches Vermessungswesen 1882, I. S. 285 bis 288), und als letzter Zweig des süddeutschen geodätischen Stammes die *nassauische* Triangulierung (Zeitschr. f. Verm. 1882, S. 313—322).

Im Zusammenhang mit den süddeutschen Triangulierungen sind wohl auch die *österreichischen* Vermessungen zu erwähnen, über welche in neuester Zeit Auskunft gegeben wurde von Major *Hartl* in drei Abhandlungen: „Materialien zur Geschichte der astronomisch-trigonometrischen Vermessung der österreichisch-ungarischen Monarchie, gesammelt und bearbeitet von *Heinrich Hartl*, k. k. Major im militär-geogr. Institute, veröffentlicht in den Mittheilungen des k. k. militär-geograph. Instituts, 1887, S. 1—112, 1888, S. 113—280.“

Auch die Vermessung der *Schweiz* ist hier kurz namhaft zu machen. Vgl. Geschichte der Vermessungen in der Schweiz von *R. Wolf*, Zürich 1879. Zeitschr. f. Verm. 1880, S. 367, 1882, S. 456.

Nach Zeit und Ort unabhängig von den bisher besprochenen Messungen steht in der Mitte von Deutschland die klassische Gradmessung von *Gauss* in Hannover 1821—1823, mit anschliessender Landesvermessung 1824—1844. Die wichtigsten Theorien der heutigen Erdmesskunde sind aus Veranlassung dieser Gradmessung von *Gauss* geschaffen worden: die Ausgleichung der Dreiecksnetze nach der Methode der kleinsten Quadrate, die Theorie der konformen Coordinaten, die allgemeine Theorie der geodätischen Linie auf krummen Flächen u. s. w. Auch in den Messungen war die Gradmessung von 1821—1823 ein Meisterwerk ihrer Zeit; hier wurde das Heliotrop erfunden. Dagegen ist die hannoversche Landesvermessung von 1824—1844 in praktischer Beziehung den gleichzeitigen süddeutschen Messungen nicht gleichwertig (vgl. z. B. die pothenotische Ausgleichung in unserem I. Bande, M. d. kl. Q. S. 147).

Über die Geschichte der *Gauss'schen* Vermessungen in Hannover ist erst in neuester Zeit völlige Aufklärung gegeben worden durch eine Arbeit: „Beiträge zur Kenntniss von *Gauss'* praktisch geodätischen Arbeiten, nach Original-Materialien bearbeitet von *Gaede*, Hauptmann, bei der trig. Abteilung der Landesaufnahme.“ (Zeitschr.

f. Vern. 1885, S. 113, 145, 161, 177, 193, 225.) Ferner ist hier zu erwähnen: Gedächtnisrede zur Feier des 30. April 1877, von *Theodor Wittstein* in Hannover 1877.

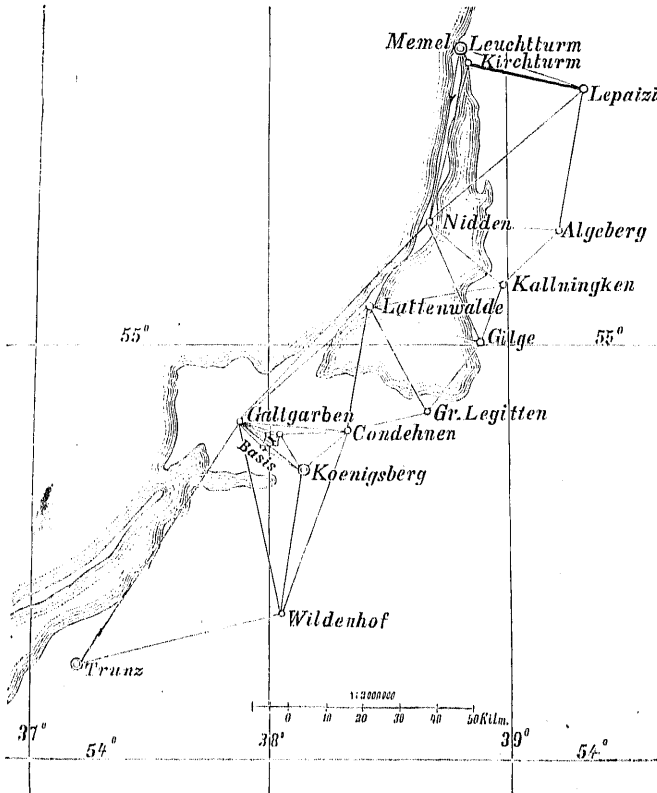
Als Abzweigung der *Gauss'schen* Gradmessung ist hier auch die *kurhessische* Vermessung von *Gerling*, einem Schüler von *Gauss*, zu erwähnen (vgl. *Jordan-Steppes*, deutsches Vermessungswesen, I. S. 10 u. 14).

Das zweite klassische Erdmessungswerk in Deutschland ist die berühmte *Gradmessung in Ostpreussen von Bessel*, dargestellt in dem Werke: „Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit preussischen und russischen Dreiecksketten, ausgeführt von *F. W. Bessel*, Direktor der Königsberger Sternwarte, *Bayer*, Major im Generalstabe, Berlin 1838.“

Die Gradmessung in Ostpreussen, deren Netz in Fig. 5. dargestellt wird, ist ebenso wie die hannoversche Gradmessung ein in der Geschichte unserer Wissenschaft

Fig. 5.

Die Gradmessung in Ostpreussen von *Bessel* und *Bayer*.



hochwichtiges Werk, in welchem die Triangulierungs-Ausgleichung (Richtungsmessungen) und die Erdbestimmung (Azimutübertragung) in ihrer theoretischen Entwicklung wesentlich gefördert worden sind (vgl. *Jordan-Steppes*, deutsches Vermessungswesen I, S. 18—37).

Internationale Erdmessung.

Der Mitarbeiter *Bessels* an der Gradmessung in Ostpreussen, dessen Namen *Baeyer**) wir soeben zitiert haben, hat das grosse Verdienst der Begründung der internationalen Erdmessung.

Im Jahre 1862 veröffentlichte General *Baeyer* den ersten „General-Bericht über den Stand der mitteleuropäischen Gradmessung“ mit Teilnahme von 15 Staaten.

Im Herbst 1864 fand die „erste allgemeine Konferenz der Bevollmächtigten zur mitteleuropäischen Gradmessung“ in Berlin statt, dabei wurde als erstes Organ der Vereinigung eine „*permanente Kommission*“ bestellt, welche von da an jährlich einmal tagte, während die allgemeine Konferenz nur von 3 zu 3 Jahren zusammentritt.

In demselben Jahre 1864 erfolgte auch die Schaffung des Centralbureaus der mitteleuropäischen Gradmessung.

Auf der allgemeinen Konferenz von 1867 wurde die „mitteleuropäische Gradmessung“ zur „europäischen Gradmessung“ erweitert.

Am 10. September 1885 starb General *Baeyer*; sein Nachfolger wurde Professor *Helmert*.

Im folgenden Jahre 1886 fand die VIII. allgemeine Konferenz in Berlin statt, wobei die „europäische Gradmessung“ zur „internationalen Erdmessung“ erweitert, und die Vereinigung im ganzen reorganisiert wurde.

Die Geschichte der internationalen Erdmessung ist im wesentlichen enthalten in den seit 1863 nahezu jährlich erschienenen „Generalberichten“ und „Verhandlungen der allgemeinen Konferenzen“ u. s. w. der Gradmessung bzw. Erdmessung.

Verschiedene Ergebnisse der Erdmessung und Erdberechnung.

Jahr	Bezeichnung	Meridian- Quadrant Meter	Abplattung
1617	<i>Snellius</i>	9 660 000	1 : ∞
1719	<i>Musschenbroek</i>	10 004 000	1 : ∞
1720	<i>Cassini</i>	10 044 000	1 : (— 66)
1740—1803	Pernanische und verbesserte Lappländische Gradmessung	10 000 157	1 : 310
1792—1806	<i>Delambre</i> , Annahme für das Meter-mass	10 000 000	1 : 334
1819	<i>Walbeck</i>	10 000 266	1 : 302,76
1830	<i>Schmidt</i>	10 000 061	1 : 297,648
1830	<i>Airy</i>	10 001 012	1 : 299,325
1841	<i>Bessel</i>	10 000 856	1 : 299,153
1866	<i>Clarke</i>	10 001 888	1 : 294,978
1872	<i>Listing</i> (typisches Ellipsoid)	10 000 218	1 : 289,000
1880	<i>Clarke</i>	10 001 871	1 : 293,466
1884	<i>Helmert</i> (Pendel-Beobachtungen)	1 : 299,26
1887	<i>Helmert</i> (Referenz-Ellipsoid)	10 002 041	1 : 299,15

*) *J. J. Baeyer*, geb. 1794, gest. 1885, vgl. Zeitschr. f. Verm. 1885, S. 369 bis 372, und Vierteljahrsschr. d. astr. Ges. 1886, S. 2—13.

Litteratur zur Geschichte der Erdmessungen.

1617. *Snellius*. Eratosthenes Batavus, de terrae ambitus vera quantitate, u. s. w. Lugduni Batavorum, 1617 (I. Teil Altertum, Eratosthenes, Posidonius u. s. w., II. Teil niederländische Triangullierung).
1729. *Musschenbroek*. Dissertatio de magnitudine terrae, als Teil (S. 357—420) des allgemeinen Werkes: Petri van Musschenbroek physicae experimentales et geometricae u. s. w. Lugdun Batavorum 1729.
1806. *Delambre*. Base du système métrique I. Discours préliminaire.
1827. *Gehlers* physikalisches Wörterbuch, dritter Band, *Erde*, S. 825—940.
1829. *Schmidt*. Lehrbuch der math. und physischen Geographie. Göttingen 1829. I. S. 162—241.
1849. *Encke*. Über die Dimensionen des Erdkörpers. Berl. Astr. Jahrb. für 1852, S. 318 u. ff.
1860. *Pesch*. Geschichte und System der Breitengradmessungen. Freysing 1860.
1861. *Bayer*. Über die Grösse und Figur der Erde. Eine Denkschrift zur Begründung einer mitteleuropäischen Gradmessung. Berlin 1861.
1868. *Fischer*. Untersuchungen über die Gestalt der Erde. Darmstadt 1868.
1869. *Wolf*. Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. Zürich 1869. 2. Band S. 125—146. (Litteraturangaben.)
1873. *Müller*. Geschichte der Himmelskunde. Braunschweig 1872, I. Band, S. 89, S. 412 und ff. (Litteraturangaben.)
1873. *Listing*. Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Grösse der Erde. Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus dem Jahr 1873, Göttingen 1873, S. 33—98.
1878. *Listing*. Neue geometrische und dynamische Konstanten des Erdkörpers. Aus den Nachrichten der K. Ges. der Wiss. Göttingen 1878.
1880. *Clarke*. Geodesy by Colonel A. R. Clarke, C. B. royal engineers; F. R. S.; u. s. w. Oxford at the Clarendon press. 1880.
- 1880—1884. *Helmert*. Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, Einleitung und I. Teil, die mathematischen Theorien. Leipzig 1880. II. Teil, die physikalischen Theorien. Leipzig 1884.
- 1885—1888. *Westphal*. Basisapparate und Basismessungen (mit Angaben über die älteren Gradmessungen). Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1885 und 1888.

Kapitel I.

Triangulierung erster Ordnung.

§ 2. Aufsuchung und Auswahl der Dreieckspunkte.

In dem zu vermessenden Gebiete werden solche hervorragende Punkte aufgesucht, zwischen welchen zusammengesehen werden kann, auf welchen feste Beobachtungsplätze eingerichtet werden können, und welche günstige Dreiecksverbindungen geben. Die Entfernungen solcher Punkte nimmt man etwa 20^{km} bis 50^{km} , nötigenfalls auch noch erheblich grösser.

Zur Aufsuchung von Triangulierungs-Punkten muss man das Land bereisen, namentlich alle *hoch* gelegenen Punkte, hohe Berge, Kirchtürme u. s. w. besteigen, und jedenfalls alles was man sieht, durch flüchtige Winkelmessung, oder auch nur durch Kompasspeilung, vorläufig bestimmen.

In früheren Zeiten mass man wohl auch sofort endgültige Winkel; so berichtete z. B. *Bohnenberger* über seine erste Triangulierung von Württemberg, von 1797: „Eine vorläufige Bereisung des Landes wurde nicht vorgenommen, um die schicklichsten Punkte zu den Hauptdreiecken aufzusuchen, daher wurden an jedem Standpunkte alle Winkel zwischen Punkten genommen, von denen man eine zur Fortsetzung der Arbeit günstige Lage erwarten konnte. Erst am Ende der Reise war ich im stande, die Hauptdreiecke heraus zu suchen, deren Winkel nachher bei der Kleinaufnahme nachgemessen und durch Vervielfältigung genauer bestimmt wurden.“

Dieses Verfahren ist heute nicht mehr am Platz aus zahlreichen Gründen: Zunächst ist im allgemeinen zu bemerken, dass Württemberg ein *Hügelland* ist, in welchem das Aufsuchen der Punkte am leichtesten ist, dann sind aber seit 1797 die Ansprüche an die Genauigkeit und an die günstige Form der Dreiecke so sehr gestiegen, dass das, was damals *Bohnenberger* als endgültige Triangulierung lieferte, heute kaum als erschöpfende Rekognoszierung gelten würde (ohne dass damit *Bohnenbergers* Arbeit von 1797 in ihrer damaligen Bedeutung beeinträchtigt würde).

Was *günstige Dreiecksverbindungen* sind, die man aufsuchen soll, das lässt sich allgemein schwer sagen, zumal die Anschauungen hieüber verschieden sind; jedenfalls ist ein Netz von nahezu *gleichseitigen* Dreiecken gut.

Indem weitere Betrachtungen hieüber auf später verschoben werden, bringen wir hier einen Auszug einer sehr wertvollen Abhandlung, welche auf unseren Wunsch

für die Zeitschrift für Vermessungswesen von einem sehr erfahrenen Beamten der Landesaufnahme geschrieben wurde, und deren Abdruck vom Verfasser der Abhandlung uns besonders gestattet wurde.)*

I. Die Rekognoszierung im allgemeinen.

Schon vor der Bereisung des Gebietes, auf welchem eine Triangulierung vorbereitet werden soll, sind gewisse Vorarbeiten zu machen, welche gewöhnlich in dem der Feld-Rekognoszierung vorhergehenden Winter ausgeführt werden. Diese *Vorarbeiten* sind im wesentlichen folgende:

1) Kartenstudien.

Hier kommt hauptsächlich die topographische Spezialkarte von Mittel-Europa im Massstabe 1:200 000 (früher *Reymannsche Karte* genannt) in Betracht. In diese werden alle Punkte und Seiten der bereits fertigen Triangulierung, an welche angeschlossen werden muss, eingetragen. Nur für die Rekognoszierung von Grundlinien und Basisvergrößerungsnetzen können Karten in grösserem Massstabe nötig werden. Sehr wichtig sind *Höhenzahlen* der Karte, sind solche nicht genügend vorhanden, so wird es sich empfehlen, nach weiteren Hilfsmitteln, nach Spezialkarten, geographischen Handbüchern und ähnlichen Publikationen die Höhenangaben der Karte möglichst zu vervollständigen.

2) Studium der Vorgänge.

Fast immer handelt es sich um Gebiete, welche in früherer Zeit schon mehrfach als Operationsfeld für grössere Triangulationen gedient haben. Die Landesaufnahme ist in der bevorzugten Lage, von diesen Vermessungen zum grössten Teil noch die Originalakten, Protokolle, Tagebücher, Rechnungen und eine grosse Zahl von Skizzen und Übersichtsblättern der verschiedensten Dreiecks-Konfigurationen zu besitzen. Dieses ganze ältere Material wird, so weit es für das Arbeitsgebiet in Betracht kommt, gründlich durchforscht, alles, was wertvoll oder von Interesse erscheint, herausgezogen und einem besonderen Tagebuche einverleibt.

Auf Grund dieser Studien und mit ihnen fortschreitend, werden sich ganz von selbst Projekte über vorhandene und wünschenswerte Dreiecks-Konfigurationen bilden, welche in vorläufigen Übersichtsdarstellungen zum Ausdruck gebracht, und deren Punkte, soweit sie älteren Triangulationen angehören, durch vorläufige rohe Rechnungen bestimmt werden. Dies geschieht in dem bei der trigonometrischen Abteilung eingeführten ebenen rechtwinkligen Coordinatensystem, und — da es hierbei auf einige Meter nicht ankommt — mit 4- oder 5stelligen Logarithmen.

Die Abscissenaxe dieses Systems ist der 31. Längengrad, und die Coordinaten werden in diesem System *einheitlich* in ganz Preussen gezählt.

Alle Rechnungsergebnisse werden in übersichtlicher Form, nötigenfalls durch Handrisse erläutert, in das Tagebuch eingetragen. Dieses Buch nimmt ferner Notizen auf über Kommunikationen, Quartier-Verhältnisse, Beschaffung von Fuhrwerk, Bauholz u. s. w.

*) Technischer Betrieb der Feldarbeiten der Triangulation erster Ordnung bei der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme, von Vermessungsdirigent *Erfurth*. „Zeitschrift für Vermessungswesen“ 1887, S. 377—383 und S. 421—437. Da wir hier nur einen *Auszug* geben können, empfehlen wir besonders noch das Nachlesen des Originals, welches inzwischen auch in die holländische Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde, 1887, S. 162—186 in Übersetzung aufgenommen wurde.

3) *Ausrüstung zu den Feldarbeiten.*

Jedes Mitglied der trigonometrischen Abteilung, welches während des Sommers mit Feldarbeiten betraut wird, erhält die nötige Zahl von „Offenen Ordres“. Es sind dies Kollektiv-Erlasse der beteiligten Ministerien an die Landesbehörden, ausgestellt für den Chef der trigonometrischen Abteilung bzw. die diesem unterstellten Offiziere und Beamten, wodurch dieselben legitimiert werden und ihnen vorkommenden Unterstützung der Behörden gesichert wird.

Zur weiteren Ausrüstung des Dirigenten gehören:

- ein kleines Universal-Instrument von 1,5^{kg} Gewicht, *)
- ein Rekognoszierungstisch mit Stativ und Dosenlibelle,
- ein grosses Handfernrohr,
- ein Aneroidbarometer,
- Massstäbe, Bandmass, ein Lot, Transporteur; —
- ferner das gesammelte Material an Karten, Büchern und Manuskripten, Schreibmaterial, Formulare und Vorschriften.

Die zur Sektion gehörigen Trigonometer sind im wesentlichen ebenso ausgerüstet, führen aber ein erheblich grösseres Winkelmass-Instrument mit sich.

Ausserdem treten noch hinzu:

- ein bis zwei kleinere Fernrohre,
- einige Heliotrope,
- ein Stativ zur Aufstellung des Universal-Instruments,
- ferner Werkzeuge und Gerätschaften, welche für den Signalbau erforderlich sind, dazu gehören Werkzeuge des Zimmermanns und des Tischlers, Seil- und Tauwerk, Flaschenzüge u. s. w.

Näheres darüber wird sich beim Signalbau (§ 3.) ergeben.

II. *Die Arbeiten im Felde behufs Auswahl der Punkte, oder die eigentliche Rekognoszierung.*

Der Zweck der Rekognoszierung besteht darin, die Konfiguration einer neuen Dreieckskette oder eines neuen Dreiecksnetzes festzustellen und anzugeben, welche baulichen Einrichtungen auf jedem Punkte getroffen werden müssen, um die Konfiguration zu ermöglichen. So einfach diese Aufgabe klingt, so schwierig ist sie. Sie verlangt besondere körperliche und geistige Eigenschaften des Rekognoszierenden, und bürdet ihm zugleich eine erhebliche persönliche Verantwortlichkeit auf, da sich Vorschriften, wie die Arbeit auszuführen ist, allgemein gar nicht geben lassen. Es ist zunächst alles seiner Initiative und seinem Ermessen anheimgegeben.

Als Grundsatz ist festzuhalten, dass die Rekognoszierung eine in sich selbständige Arbeit ist, welche die Grundlage für die ganze spätere Triangulation bildet, dass Fehler und Unterlassungsünden, welche etwa hierbei vorkommen, später gar nicht mehr gut zu machen sind.

*) Nach unserer Ansicht könnten noch mit Vorteil gebraucht werden: Ein Kompass zum Aufsetzen auf das kleine Universal-Instrument, jedenfalls ein Taschen-Kompass; ferner ein *Spiegel- Sextant* oder kleiner Reflexionskreis zum Winkelmessen auf hohen Türmen, auf Umschaugerüsten, selbst auf Bäumen, kurz überall, wo kein fester Instrumentenstand zu gewinnen ist.

In Bezug auf dieses Thema sei hierbei auf die verdienstvolle Arbeit von *Gaede*, „Beiträge zur Kenntnis von *Gauss'* praktisch-geodätischen Arbeiten“, Zeitschrift für Vermessungswesen, Jahrgang 1885, S. 136 u. ff. verwiesen.

Die Rekognoszierung eines Dreieckssystems, sei es nun Kette oder Netz, muss als eine einheitliche Arbeit für das ganze System aufgefasst werden. Sie darf nicht eher abgeschlossen werden, als bis das ganze Arbeitsfeld gründlich durchforscht ist, und bis alle möglichen brauchbaren Konfigurationen festgestellt sind. Bei einer *Kette*, für welche an beiden Enden feste Anschlussseiten gegeben sind, ist man nach der Mitte zu unabhängiger, hat grösseren Spielraum; doch ist nicht zu vergessen, dass jeder dieser Punkte bei späteren Arbeiten wiederum Anschlusspunkt für eine andere Kette oder für ein Netz werden kann.

Schwieriger ist die Rekognoszierung eines *Netzes*, für welches rundum ein ganzes Polygon von festen Anschlussseiten gegeben ist. Man kann von fast keinem Punkte, wenn er zunächst auch noch so brauchbar erscheint, von vornherein sagen, dass er wirklich endgültig brauchbar ist. Selbstverständlich giebt es einzelne Punkte, die vermöge ihrer dominierenden Lage gar nicht zu umgehen sind, wie z. B. den Brocken, Inselferg, Feldberg im Taunus, Melibokus u. s. w. Solche Punkte sind aber Ausnahmen.

Die Rekognoszierung wird für gewöhnlich auf den gegebenen Anschlusspunkten beginnen, ferner diejenigen Punkte umfassen, welche man durch die Vorstudien als frühere Punkte kennen gelernt hat, und endlich auf alle Punkte sich erstrecken, welche während der Arbeiten im Felde sich sonst noch als vielleicht geeignet herausstellen. Die Rekognoszierung ist eine sehr mühsame, zeitraubende und aufregende Arbeit, welche an die körperliche und geistige Ausdauer hohe Anforderungen stellt.

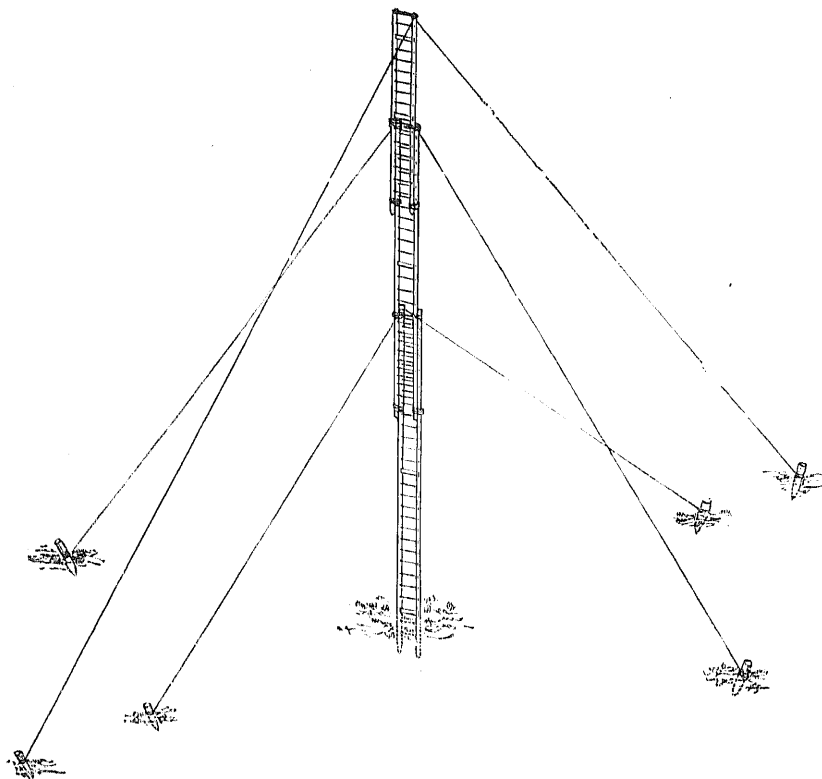
Die angeführten Schwierigkeiten beziehen sich zunächst nur auf Norddeutschland. In südlicheren Ländern von günstigerer Bodengestaltung, mit geringerer Bewaldung und klarerer Luft (z. B. Süddeutschland, Frankreich, Spanien, Italien) werden sie kaum, oder doch nicht in dem Masse vorhanden sein.

Die Rekognoszierung auf einem Punkte gestaltet sich folgendermassen: Bevor man sich auf ihn begiebt, empfiehlt es sich, alles, was man über ihn schon festgestellt hat, nochmals zu rekapitulieren und etwa fehlende rechnerische Vorarbeiten zu ergänzen. Auf ihm angekommen, hat man den ganzen Horizont gründlich zu durchforschen. Zu dem Ende stellt man den Rekognoszierungstisch und darauf das kleine Universal-Instrument auf und lässt den ganzen Umkreis langsam durch das Fernrohr marschieren. Alle hervorragenden Punkte stellt man ein, liest die Winkel ab und schreibt sie auf. Hierzu gehören trigonometrische Signale, Türme, Windmühlen, ferner hervorragende Bergkuppen, markierte Baumgruppen, Punkte, wo etwa näherer Horizont aufhört und fernerer anfängt, die Grenzen von Gebirgszügen, Wäldern u. dergl. Dabei dient das Instrument zur Messung der Winkel, dagegen zur näheren Untersuchung der Objekte das stärkere Handfernrohr. Die Entfernungen werden geschätzt. Die Resultate mit erläuternden Bemerkungen werden graphisch in einer Skizze auf starkem Zeichenpapier zur Darstellung gebracht. Solche Skizze nennt man bei der Abteilung „*Spinne*“. Im Quartier findet die Verarbeitung, Sichtung und ordnungsmässige Eintragung des gewonnenen Materials unter Zuhilfenahme von Karte, Zirkel und Transporteur statt. Dies muss stets sofort erfolgen, damit weitere Entschlüsse gefasst und Vorbereitungen für den folgenden Tag getroffen werden können.

Es wird häufig der Fall eintreten, dass man auf dem in Aussicht genommenen

Punkte zu ebener Erde keinen Rundblick hat, wenn an der betreffenden Stelle Wald vorhanden ist, oder wenn die Gegend in hoher Kultur steht und anderweite Hindernisse bietet, Gehöfte, Gärten u. s. w. Dann muss man zunächst einen möglichst hohen Standpunkt zu gewinnen suchen, indem man Bäume erklettert, Windmühlen, Türme besteigt. In Ermangelung von solchen kann man sich mitunter dadurch helfen, dass man eine Leiter, wie man sie in jedem Dorfe findet, senkrecht aufrichten lässt (Fig. 1.).

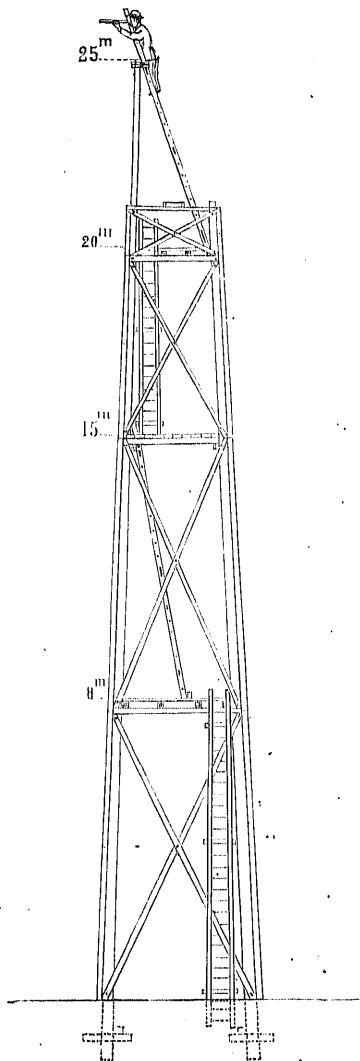
Fig. 1.
Vorläufige Aufstellung von Leitern.



Den nötigen Halt giebt man ihr dadurch, dass man sie mit dem unteren Ende in die Erde gräbt und das obere durch Seile halten lässt; eine zweite und dritte Leiter kann daran in die Höhe geschoben und ähnlich festgestellt werden. Man kommt auf diese Weise leicht 10—15^m hoch. Es ist dies jedoch alles nur eine vorläufige Massregel, welche die Auswahl des zweckmässigsten Platzes erleichtern soll.

Zur Ausführung der wirklichen Rekognoszierung, also zur Feststellung, ob die gewünschten Richtungen vorhanden, und in welcher Höhe sie zu haben sind, wird dann die Errichtung eines *Umschau-Gerüsts* (Fig. 2. S. 22) notwendig. Als Grundsatz ist hierbei festzuhalten, dass man das Gerüst immer einige Meter höher bauen lässt, als man voraussichtlich gebrauchen wird.

Fig. 2.
Umschau-Gerüst.



Ein solches Umschau-Gerüst ist leicht in die Höhe getrieben. Vier Ständer, welche bei grösserer Höhe aus starken Stangen zusammengesetzt werden, geben das Gerippe und werden durch mehrere horizontale Kränze zusammengehalten. Jede Wand dieses Gerüsts erhält durch Kreuzverbindungen (Verschwertungen) den nötigen Halt. Oben wird ein Fussboden gelegt, ein Geländer gezogen und ein roher Tisch oder ein Brett als Leuchstand angebracht. Auf die Ständer wird event. eine Pyramidenspitze von schwarz angestrichenen Brettern aufgesetzt, um das Gerüst von den umliegenden Punkten leichter aufzufinden, und um es auch als Zielpunkt benutzen zu können. — Man kann rechnen, dass durchschnittlich in einem Tage 10^m gebaut werden, und dass das Meter ungefähr 4—5 Mark kostet. Wird später der Punkt endgültig gewählt, so kann das Holz des Gerüsts beim Bau des Signals verwendet werden.

Bei der Rekognoszierung des Wesernetzes im Sommer 1883 sind von dem Vermessungsdirigenten Hauptmann Gaede über zwanzig Umschau-Gerüste leichtester Konstruktion bis zu 32^m Höhe mit bestem Erfolge benutzt worden.

Eine weitere wichtige Gattung von Punkten bilden *Türme* und ähnliche Bauwerke. Sie bieten im allgemeinen den Vorteil, dass sie meist die Umgegend erheblich überragen, haben aber den Nachteil, dass sie besondere und oft recht schwierige Einrichtungen behufs Ausführung der Beobachtungen erfordern, und dass zu ihrer Benutzung die Erlaubnis der Behörden und Besitzer erwirkt werden muss. — Es giebt aber Gegenden, wo sie durchaus nicht zu

umgehen sind, wie z. B. in dem stark angebauten Flachlande des nordwestlichen Deutschlands. In der hannoverschen Kette und im Wesernetz mussten deshalb, entsprechend dem Vorgange von Gauss, unverhältnismässig viele Türme zu Punkten I. Ordnung gemacht werden.

Für die vorläufige Rekognoszierung auf Türmen wird es zunächst genügen, eine flüchtige Einrichtung zu treffen, dass das kleine Instrument aufgestellt, vielleicht auch ein Heliotrop angebracht werden kann.

Erdkrümmung und Strahlenbrechung. Man kann manchmal durch Höhenwinkelmessung entscheiden, ob eine wünschenswerte Richtung überhaupt möglich ist. (Die nötigen Theorien hiezu, mit Erdkrümmung und Strahlenbrechung, haben wir in unserem II. Bande Kap. XI. behandelt.)

Durchhau von Wäldern.

Die Fälle, dass einzelne Bäume hindern und gefällt oder wenigstens ausgeästet werden müssen, kommen häufig vor. Von diesen ist hier nicht die Rede, da sie wenig Schwierigkeiten bieten. Anders liegt der Fall, wenn eine Richtung längere Waldstrecken durchschneidet. Solche grössere Durchhau sind als äusserstes Gewaltmittel zu betrachten und nur durch die höchste Not gerechtfertigt, da sie erhebliche Eingriffe in private Rechte darstellen, viele, oft recht unerquickliche Verhandlungen mit den Besitzern erfordern und endlich grosse Kosten an Zeit und Geld verursachen. Nichtsdestoweniger wird man sich doch mitunter dazu entschliessen müssen, wenn nur dadurch eine wesentliche Verbesserung der Dreiecksformen gewonnen werden kann.

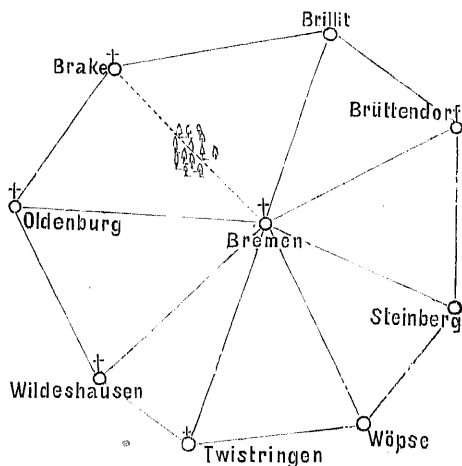
Ein solcher Fall trat beispielsweise im Sommer 1883 bei Rekognoszierung des Wesernetzes mit der Richtung Bremen-Brake ein.

Diese Richtung war der einzige Strahl, welcher zur Vollständigkeit des Polygons um Bremen noch fehlte; ihre Herstellung erschien für die ganze Konfiguration von grossem Werte. Die örtlichen Verhältnisse lagen folgendermassen: Von Brake aus schlossen, etwa 16^{km} entfernt, in der Richtung nach Bremen bewaldete Berge den Horizont. Auch von Bremen aus erschien hochgelegener Wald, etwa 14^{km} entfernt, als Abschluss des Gesichtskreises gegen Brake. Es lag somit ziemlich in der Mitte der

35^{km} langen Richtung als Hindernis ein etwa 5^{km} breites Waldgebiet, über welches hinaus auch die Turmspitzen gegenseitig nicht sichtbar waren. Eine örtliche Rekognoszierung der Hindernisse ergab, dass eine Reihe parallel streichender, ziemlich bedeutender Höhenzüge die projektierte Verbindung der beiden Türme von Bremen und Brake annähernd senkrecht durchschnitt, und dass die ganze Gegend mit vielen einzelnen Waldparzellen bedeckt war, welche besonders auf den Kämmen der Berge sehr hohe Bäume, Eichen und Buchen von 30—40^m Höhe, enthielten.

Nun musste zunächst durch besondere schärfere Messung und Rechnung die Richtung in horizontaler Beziehung mit einer Genauigkeit von 10—20'' festgelegt werden. In vertikaler Beziehung wurden die Höhen in der Gegend der Hindernisse teils aus älteren Daten, teils durch besondere Messungen festgestellt. Es ergab sich daraus mit Sicherheit, dass nicht etwa die Berge selbst, sondern nur die Bäume das

Fig. 3.
Durchhau eines Waldes.
Massstab 1 : 1 200 000.



Hindernis bildeten. Nunmehr wurde zur Markierung und Freilegung der Richtung geschritten.

Das allgemeine Verfahren bei solcher Arbeit ist im Prinzip einfach, in der Ausführung jedoch mitunter recht schwierig und zeitraubend. Man richtet auf beiden Endpunkten Beobachtungsstände ein und bringt in dem Hindernis einige Flaggen auf den höchsten Bäumen an, so dass sie schon möglichst in der Richtung liegen. Um sie nicht mit einander zu verwechseln, müssen sie durch verschiedene Farben oder dergl. kenntlich sein. Die Winkel nach den Flaggen werden gemessen, und aus ihnen unter Zuhilfenahme der angenähert festgestellten, etwa aus der Karte entnommenen Entfernungen die seitlichen Verschiebungen berechnet, welche nötig sind, um die Flaggen in die Richtung zu bringen. (Vgl. hiezu den Abschnitt „Abstecken von langen Geraden“ in unserem I. Bande S. 657.)

Bei dem Durchhau Bremen-Brake sind rund 1620 Mark an Entschädigungen gezahlt worden.

Grösse der Dreiecksseiten. Rein theoretisch lässt sich über die Vorzüge oder Nachteile kürzerer oder längerer Dreiecksseiten wenig sagen; so einfache allgemeine Gesetze, wie sie z. B. über die Zielweiten bei Polygonzügen, bei Nivellierung u. s. w. bestehen, giebt es für Triangulierung nicht.

Lange Seiten haben den Vorteil, dass man rasch weiter kommt, und wenn man einmal eine lange Seite aus einer kurzen Basis abgeleitet hat, dann ist es auch für die rein theoretische Genauigkeit besser, mit grossen Dreiecken fortzufahren, sowohl in Hinsicht auf Azimutübertragung als auch in Hinsicht auf Längenübertragung; lange Sichten sind aber schwieriger und seltener zu messen, und werden daher verhältnismässig, d. h. mit Rücksicht auf die aufgewendete Zeit und Mühe ungenauer als kurze.

Die Erfahrung hat dazu geführt, im Mittel nur etwa 20—50^{km} Seitenlänge zu nehmen, jedoch wenn besondere Gründe vorlagen, ist man auch schon bis zu 100^{km}, 200^m und noch weiter gegangen.

Einige besonders lange Dreiecksseiten stellen wir im folgenden zusammen:

Dreiecksseite	Meter	Bogen
Trunz-Galtgarben (Preussen, <i>Bessel</i>)	79 644	0° 43'
Brocken-Inselsberg (Hannover, <i>Gauss</i>)	105 977	0° 57'
Kamiensberg-Knibiskow (Afrika, <i>Maclear</i>)	128 028	1° 9'
Campvey-Desierto (Frankreich)	160 903	1° 27'
Slieve Donard-Sea Fell (England, Ord. trig. survey S. 434)	178 932	1° 36'
Ararat-Godarebi (Kaukasus, <i>Struve</i>)	202 384	1° 49'
Mullaen-Fillhaussen (Mittelländ. Meer, <i>Ibanez</i> und <i>Perrier</i>)	269 926	2° 26'

Nach *Helmert* math. u. ph. Th. d. h. G. I. S. 70 sind in Vorder-Indien von den Engländern nach dem Himalaya Sichten bis zu 340^{km} genommen worden.

Von der vorerwähnten trigonometrischen Überspannung des mittelländischen Meeres geben wir in Fig. 4. S. 25 eine Darstellung mit eingeschriebenen Längen, Höhen und Winkeln. Das Unternehmen wurde im Herbst 1879 von *Ibanez* und *Perrier* ausgeführt.

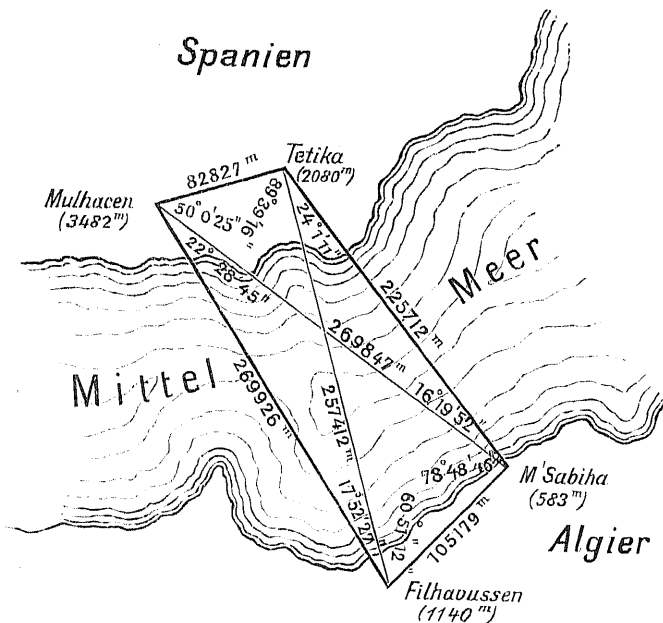
Zur Signalisierung reichte Heliotropenlicht nicht aus, es wurde deshalb elektrisches Licht mit Nachtbeobachtung angewendet.

(Weiteres hierüber geben die Verhandl. d. 6. Konf. d. Eur. Gr., General-Bericht für 1880, S. 44—57; vgl. auch zwei Berichte in d. „Zeitschr. f. Verm.“, Pattenhausen 1881, S. 247—257 und *Fenner* 1882, S. 303—308.)

Fig. 4.

Triangulierung über das mittelländische Meer, zwischen Spanien und Algier, 1870.

Maassstab 1 : 4 500 000.



§ 3. Pfeilerbau und Signalbau.

Nachdem die Triangulierungspunkte ausgewählt sind, hat man Einrichtungen zu treffen, erstens zum festen Aufstellen des Theodolits auf jedem Punkte und zweitens zum gegenseitigen Sichtbarmachen der Punkte für die Winkelmessung.

Diese Einrichtungen sind verschieden, je nachdem man es mit einem Punkte auf dem natürlichen Erdboden, z. B. auf dem Gipfel eines Berges, oder mit einem Punkte auf einem Turme oder ähnlichem Bauwerke zu thun hat.

Zur Sichtbarmachung dient heutzutage fast ausschliesslich das Heliotrop, von welchem später in § 4. die Rede sein wird. Die Einrichtung der Heliotropstände erfolgt gemeinsam mit dem Bau der Theodolitstände.

Zu ebener Erde nahm man früher als Theodolitstände allgemein hölzerne Stativen; indessen in neuerer Zeit erbaut man für Messungen erster Ordnung *steinerne Pfeiler*.

Nach Mitteilung von Vermessungs-Dirigent *Erfurth* (vgl. die Anmerkung auf S. 18 unten) hat die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme hierfür folgende Einrichtungen:

„Ein Beobachtungspfeiler der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme

besteht entweder aus einem einzigen behauenen Stein, lang genug, um ihm den nötigen Halt im Erdboden zu geben, oder, da solche Monolithe schwer zu haben und teuer sind, aus mehreren behauenen Bruchsteinen von ganzem Querschnitt, welche mit Zement gemauert und lagenweise durch Dübel oder durch eine oder zwei durchgehende Eisenstangen fest verbunden werden. Aus Ziegelsteinen aufgemauerte Pfeiler sind möglichst zu vermeiden, da sie bei wechselndem Wetter, namentlich durch Regen und Frost, baldiger Zerstörung anheimfallen, auch mutwilligen Beschädigungen mehr ausgesetzt sind. Um den Pfeiler wird eine vierseitige Pyramide errichtet; die Spitze derselben wird mit Brettern bekleidet und schwarz angestrichen. Ausserdem wird ein Fussboden von Brettern gelegt, um bei windigem Wetter das Aufwirbeln von Sand und Staub möglichst zu verhindern.“

Über Pfeilerbau und Punktversicherungen, teils auf dem natürlichen Erdboden, teils auf Türmen, können wir einige Erfahrungen mitteilen von den 10 „Gradmessungspfeilern“, welche vom Verfasser 1869—1873 erbaut wurden. — Wir benützten dabei zuerst die von *Nagel* im Generalbericht d. Europ. Gradm. für 1864, S. 39—40 mitgeteilten Erfahrungen.

Die badischen Pfeiler mit ihren Versicherungen wurden zugleich an die vorzüglichen Punktfestlegungen der badischen Landes-Triangulierung angeschlossen.

Ein Beispiel für beides ist in Fig. 1a. und Fig. 1b. gegeben.

Trigonometrischer Punkt Kandel (Schwarzwald).

Fig. 1a.

P = Pfeiler. B = Pyramide.
Massstab 1 : 500.

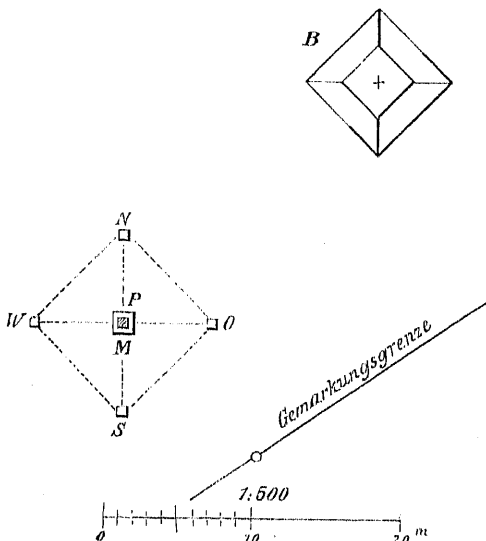
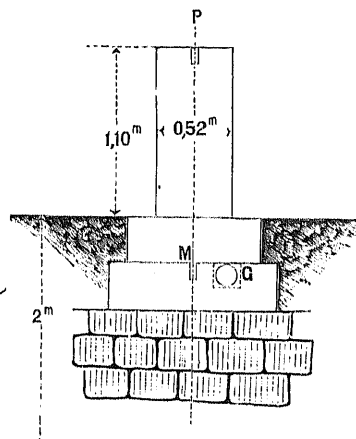


Fig. 1b.

Beobachtungspfeiler.
Massstab 1 : 50.



Die Bezeichnung eines Punktes der (alten) badischen Landes-Triangulierung wurde etwa im Jahr 1820 durch eine von Felsstücken aufgebaute vierseitige abgekürzte Pyramide B bewerkstelligt. Der trigonometrische Punkt ist auf der Mitte der Pyra-

mide durch ein eingehauenes $+$ bezeichnet. Ferner wurden noch vier solche Zeichen auf der Pyramide angebracht, und ausserdem der Dreieckspunkt gegen 8 benachbarte Gemarkungs-Grenzsteine durch unmittelbare Messung von 11 Entfernungen und 14 Winkeln festgelegt (letzteres ist in unserer Fig. 1 a. *nicht* angedeutet).

Im Jahr 1870 fand ich die Lage der 50 Jahre alten Versicherungspunkte noch auf wenige Centimeter übereinstimmend mit den früheren Messungen; jedoch wurde die Pyramide nun verlassen und ein *neuer* Punkt P auf einem Pfeiler mit einem 2^m tiefen Fundament hergerichtet, wie die Einzelzeichnung Fig. 1 b. zeigt, und ferner wurden 4 Versicherungsquader $S W N O$ auf Fundamentquadern versenkt.

In dem Fundamentquader des Pfeilers bei M und in jedem der 4 anderen Quader ist ein Messingcylinder in Blei eingegossen, und ein sechster Cylinder P lotrecht über M ist oben auf dem Pfeiler eingegossen, um die Theodolitmitte zur Winkelmessung zu bezeichnen.

Unten ist auch ein Glascylinder G eingesenkt, ein Schriftstück enthaltend, das der Nachwelt die Bedeutung der ganzen Anlage übermitteln soll.

Die 4 Versicherungspunkte wurden nicht willkürlich, sondern nach *Nord, Ost, Süd, West* eingewiesen, was leicht auf etwa 1' genau gemacht werden konnte mit Hilfe der alten badischen Landes-Triangulierung (trigonometrische Azimute mit Rücksicht auf Meridian-Convergenz).

Nachdem somit die 5 unteren Punkte auf ihren Fundamentquadern in den Baugruben festlagen, wurden ihre Abstände gemessen:

$M N = 6,0591^m$	$N O = 8,5793^m$
$M O = 6,0751$	$O S = 8,4274$
$M S = 5,8400$	$S W = 8,4650$
$M W = 6,1246$	$W N = 8,6204$

Man hat die Proben $\sqrt{6,0591^2 + 6,0751^2} = 8,5802$ u. s. w.

Die 4 Hypotenusenproben gaben die Widersprüche $0,9^{mm}$, $0,5^{mm}$, $2,1^{mm}$, $5,1^{mm}$, welche als befriedigend auf sich beruhen blieben.

Um nun nach dem Aufbau des Pfeilers selbst den Punkt P genau lotrecht über M zu bringen, verfahren wir so: Während der Theodolit zentrisch über M stand und die 4 Azimute 0° , 90° , 180° , 270° eingewiesen wurden, musste mindestens ein ferner Punkt H mit angezielt werden, der durch sein berechnetes Azimut jene 4 Einweis-Azimute lieferte. Nach dem Aufbau des Pfeilers wurde der Theodolit *vorläufig* aufgestellt mit Hilfe des fernen Punktes H orientiert und die 4 nahen Punkte wieder angezielt. Wegen der Exzentrizität der vorläufigen Theodolitstellung wurden nun nicht wieder genau 0° , 90° , 180° , 270° erhalten, sondern kleine Abweichungen, welche aber mit Zuziehung der 4 Entfernungen vollends zur genauen Zentrierung führten.

Vor und nach der Pfeileraufstellung wurden alle Punkte nivelliert.

Das Endergebnis drückt sich in folgenden Coordinaten und Höhen aus, im badischen System $+x$ nach Süden, $+y$ nach Westen, h ungefähr um 2^m zu gross im Vergleich mit Höhen über $N. N.$

	unkt			
Pyramide, Kreuz	$+$	$+ 33\,403,830^m$	$+ 158\,255,280^m$	$1247,010^m$
Pfeiler oben	P	$+ 33\,421,215$	$+ 158\,271,909$	$1244,360$
" unten	M			$1242,986$
Versicherung	N	$+ 33\,421,180$	$+ 158\,265,850$	$1243,216$
"	O	$+ 33\,415,140$	$+ 158\,271,944$	$1242,993$
"	S	$+ 33\,421,249$	$+ 158\,277,749$	$1242,711$
"	W	$+ 33\,427,340$	$+ 158\,271,873$	$1242,861$

Wir haben diese Zahlen beispielshalber hier hergesetzt, weil solche oder entsprechend genaue Angaben, mit Zeichnungen, den amtlichen Triangulierungs-Veröffentlichungen beigegeben werden sollen. — (Übrigens ist unser *Kandel* und der sehr schöne *Steinsberg* niemals zu Winkelmessungen benützt worden.)

Über *Signalbau* im besonderen haben wir die wertvollsten Mitteilungen in der Abhandlung von *Erfurth*, welche wir schon auf S. 18 zitiert und zum Teil abgedruckt haben.

Folgendes ist ein Auszug aus dem zweiten Teil von *Erfurth*:

Der *Signalbau* muss den Winkelmessungen mindestens ein Jahr voraus sein. Es wird schon im Laufe des Winters, sobald die Projekte festgestellt sind, Auftrag erteilt, welche Signale im folgenden Sommer gebaut werden sollen, damit das nötige Holz noch im Winter geschlagen werden kann. Denn die Bäume müssen vor dem Einschiessen des Saftes gefüllt werden.

Der *Signalbau* umfasst die Herstellung aller Einrichtungen, welche erforderlich sind, um auf den endgültig bestimmten Punkten Beobachtungen machen, sowie auch dieselben von anderen Punkten aus als Zielpunkte benutzen zu können. Für gewöhnlich dient der Stand des Theodolits, der Beobachtungsstand, zugleich auch als Stand für den einzustellenden Heliotropen, als Leuchtstand. Es kommt jedoch nicht selten vor, dass für schwierige Richtungen noch besondere Leuchtstände in grösserer Höhe eingerichtet werden müssen. Bei Winkelmessungen erster Ordnung wird zwar in der Regel nur auf Heliotrope eingestellt, nichtsdestoweniger erhält aber jedes auf dem Erdboden erbaute Signal eine schwarze Spitze, welche hauptsächlich für die Messungen der niederen Ordnungen als Einstellungs-Zielpunkt dient.

Signale mit erhöhten Beobachtungs- und Leuchtständen werden bei der trigonometrischen Abteilung aus Holz bis zu ungefähr 25^m Beobachtungshöhe und 30^m Leuchthöhe noch mit solcher Festigkeit gebaut, dass auch bei ziemlichem Winde die Beobachtungen mit vollster Genauigkeit und Zuverlässigkeit gemacht werden können. Es ist dies dadurch möglich, dass die Beamten, welche die Signalbauten ausführen, seit Jahren in diesen Arbeiten thätig sind und reiche Erfahrungen unter den verschiedensten Verhältnissen gesammelt haben.

Bei jedem solchen Signal sind *zwei* vollständig von einander *unabhängige und für sich isolierte* Bauten zu unterscheiden: der Beobachtungspfeiler als Stand für das Instrument, und das den Pfeiler umgebende Gerüst für die Beobachter. Die Pfeiler sind entweder Standpfeiler oder Hängepfeiler.

Standpfeiler werden bei grösseren Beobachtungshöhen errichtet, ein Beispiel giebt die nachfolgende Fig. 4. S. 31.

Hängepfeiler werden seitwärts durch Streben getragen und reichen in der Mitte nicht bis zum Erdboden herab, sondern lassen in der Mitte so viel freien Raum, dass der Beobachtungspunkt von oben herunter gelotet und *zentrisch* festgelegt werden kann (was bei *Standpfeilern* nicht möglich ist). Die Hängepfeiler lassen sich jedoch im allgemeinen nicht so hoch wie die Standpfeiler anordnen, während nämlich Standpfeiler 20—30^m hoch sein können, sind Hängepfeiler nur bis 10—12^m Höhe anwendbar.

Ein gutes Beispiel eines Hängepfeilers werden wir später in § 13. als Endpfeiler der Göttinger Basismessung kennen lernen.

Zur Verbindung von Pfeiler und Streben dienen durchgehende eiserne Schraubenbolzen. Zur Befestigung der unteren Stammenden in der Erde werden hölzerne Anker

angebracht; bei leichtem Boden werden ausserdem Steinbrocken in die Löcher geschüttet, schichtweise mit Wasser eingeschlëmmt und festgerammt.

Das ganze System von Pfeiler und Streben muss nun noch gegen Winddruck, Durchbiegen und Verziehen besonders gesteuft werden. Dies geschieht

- 1) durch Verbindungen zwischen zwei nebeneinander liegenden Streben, sogen. Kränze und Schwerter, Fig. 2.,
- 2) durch Verbindungen zwischen Pfeiler und Streben, Kreuze und Quirle, Fig. 3.

Ein Kranz besteht aus vier Hölzern, welche in gleicher Höhe über dem Erdboden von Strebe zu Strebe geführt werden.

Schwerter sind diagonale Verbindungen in den durch die Kränze entstandenen Paralleltrapezen. Bei sehr hohen Signalen können für die unterste Verschwertung noch besondere Hilfstützen und Unterzüge nötig werden, welche immer in den Erdboden zu führen sind.

Kreuze sind Hölzer, welche je zwei gegenüberliegende Streben unter sich und mit dem Pfeiler verbinden. Quirle werden zwischen Pfeiler und je einer Strebe gesetzt; sie müssen die letztere möglichst rechtwinklig treffen.

Das Beobachtungs-Gerüst.

Um den Pfeiler wird das *Beobachtungs-Gerüst* unabhängig so errichtet, dass dasselbe nirgends mit dem Pfeilerbau in Berührung kommt. Es besteht aus vier Ständern, welche nicht senkrecht, sondern nach oben zu mit einer Neigung von ungefähr 1:15 nach innen gestellt werden. Die Feststellung der Ständer erfolgt wie beim Pfeilerbau durch Kränze und Schwerter; doch können diese selten so regelmässig angebracht sein, sondern müssen den Verhältnissen angepasst werden, da die völlige Isolierung beider Bausysteme von einander streng gewahrt werden muss. In Höhen von 5—8^m werden Fussböden gelegt, zu denen man auf Leitern emporsteigt. Der oberste Fussboden bildet den Beobachtungsraum in quadratischer Form von 2,3—2,5^m Seite. Die Höhe des Beobachtungspunktes über dem obersten Fussboden beträgt 1,12—1,16^m. Zum Schutze wird ein Geländer aus starken Latten gezogen. Zwei Meter über dem Fussboden läuft um alle 4 Gerüstständer ein horizontaler Kranz von Latten zum Anbringen von Leinwandplanen, welche später beim Beobachten zum Schutze des Instruments gegen Sonne und Wind ausgespannt werden. Bei der ersten Anlage des Gerüsts muss schon darauf geachtet werden, dass vom Beobachtungspunkt aus gesehen keine der zu messenden Richtungen durch einen Ständer verdeckt wird. Jede dieser

Fig. 2.
Kränze und Schwerter.

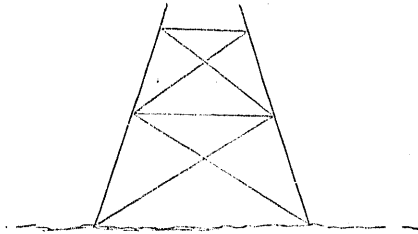
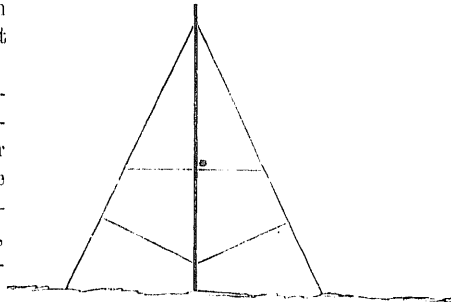


Fig. 3.
Kreuze und Quirle.



letzteren muss mindestens 5^m daran vorbeistreichen. Auf die Ständer wird eine vierseitige Pyramide aufgesetzt, deren Spitze mit Brettern bekleidet und geschwärzt wird; die Spitze liegt in der Regel 4—5^m über der Beobachtungsplatte. Wird für einzelne Richtungen ein erhöhter Leuchtstand notwendig, so muss das Gerüst entsprechend höher und solider gebaut werden. Die Leuchtplatte, welche dieselbe Grösse hat wie die Beobachtungsplatte, wird gewöhnlich auf der Pyramidenspitze befestigt.

Da die Signale der ersten Ordnung auf eine längere Reihe von Jahren bis zur Beendigung aller Vermessungsarbeiten stehen bleiben müssen, so werden diejenigen Holzteile, welche dem Verderben am meisten ausgesetzt sind, d. h. die in oder nahe dem Erdboden befindlichen Stammenden, zum Schutze gegen Fäulnis und Insektenfrass *imprägniert*. Die Imprägnierung erfolgt durch Anstrich der betreffenden Holzteile und ausserdem durch Einguss in das Innere der Hölzer. Der dazu verwendete Stoff besteht aus Chlorzink, kaltem Wasser und Karbolsäure.

Zur besseren Erläuterung des bisher über den Bau erhöhter Signale Gesagten wird nachstehend auf S. 31 die Zeichnung eines solchen gegeben. Auch sei noch hinzugefügt, dass die Gesamtkosten in runden Summen betragen haben:

für das Signal Wöpsc	1300 Mark
„ „ „ Brüttendorf	1190 „
„ „ „ Wittekind	1740 „

Kleinere Signale von 4—10^m Beobachtungshöhe kosten ungefähr 150—500 M., von 10—20^m Beobachtungshöhe 500—1000 M. Die Kosten können durch örtliche Verhältnisse, höhere Preise für Fuhrwerk und Arbeitskräfte, sowie namentlich durch etwaigen weiten Transport des Holzes sehr verschieden ausfallen. Was die erforderliche Bauzeit für ein höheres Signal anbetrifft, so kann man bis zu 20^m Beobachtungshöhe ungefähr 1 Tag für 1 Meter rechnen, für jedes Meter über diese Höhe hinaus 2 Tage.

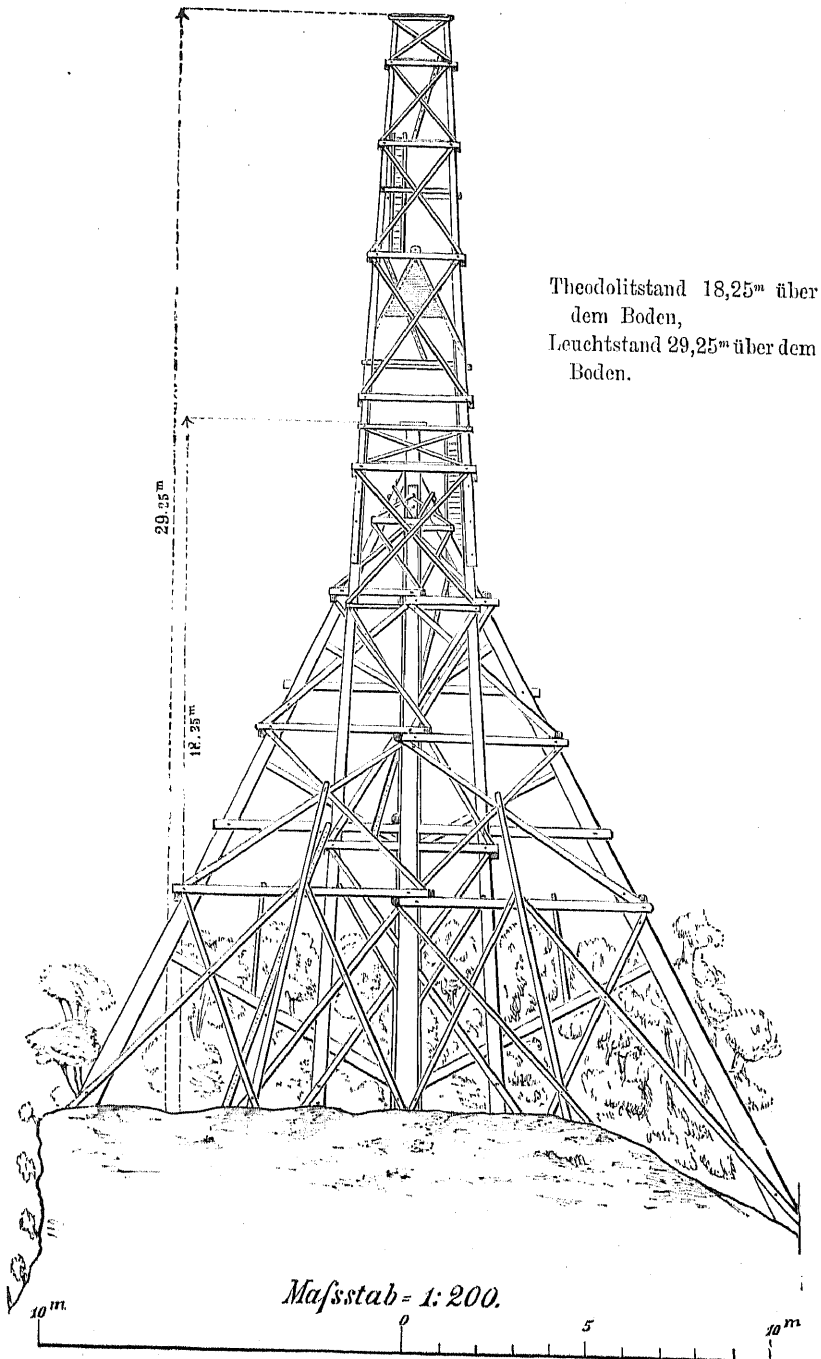
Die Einrichtung von *Türmen* und ähnlichen Bauwerken zu Beobachtungszwecken bietet häufig besondere Schwierigkeiten. Es lassen sich für diese Arbeit keine allgemeinen Regeln geben, da dieselbe von der Bauart des Turmes abhängig ist. Als Grundbedingung ist festzuhalten, dass für das Instrument ein besonderer, möglichst fester und isolierter Stand, und für den Beobachter ausreichender und gesicherter Raum geschaffen werden muss. Dabei ist stets auf möglichste Schonung des Turmes Rücksicht zu nehmen und Vorkehrung zu treffen, dass durch die zu machenden Öffnungen nicht Regen und Schnee eindringen kann, damit eine Beschädigung des Turmes verhindert wird.

In dem nördlichen Teil der hannoverschen Kette und des Wesernetzes haben fast durchweg Kirchtürme und Leuchttürme zu Beobachtungs-Stationen eingerichtet werden müssen, und trotz der verschiedenen und mitunter recht mangelhaften Bauart der Türme ist es doch gelungen, die Einrichtungen so zu treffen, dass die Beobachtungen mit genügender Sicherheit gemacht werden konnten. Es trat hierbei nicht selten der Fall ein, dass, um den Horizont rundum zu beherrschen und alle Richtungen einstellen zu können, sogar *zwei* Beobachtungsstände auf einem Turme gebaut werden mussten, wie z. B. bei den Kirchtürmen von Brake und Westerstede und bei dem Leuchtturm von Neuwerk.

Am einfachsten gestaltet sich der Bau, wenn um den Turm in der erforderlichen

Fig. 4.

Signal Wittekind der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme,
gebaut 1885 von Trigonometer Otto.



Höhe ein Rundgang aus Mauerwerk führt. In diesem Falle wird ein Pfeiler aufgemauert, und für den Beobachter ein Stand geschaffen, indem Balken aus dem Innern des Turmes herausgestreckt werden. — Wenn ein Rundgang nicht vorhanden ist, sondern auf die Mauern des Turmes sich das Dach ohne Absatz aufbaut, so muss letzteres geöffnet werden. Der Pfeiler wird wieder auf Mauerwerk errichtet und der Beobachtungsstand von innen heraus balkonartig konstruiert. Es kann hierbei nötig werden, die Pfeiler zu grösserer Höhe aufzumauern. So hat beispielsweise der Kirchturm von Wangerooz einen gemauerten Pfeiler von 4^m, derjenige von Wildeshausen sogar einen solchen von 5^m Höhe erhalten. Um dem Pfeiler dann den nötigen Halt zu geben, wird eine Eisenbahnschiene oder starke Eisenstange mit eingemauert; auch werden besondere Verstrebungen angebracht. Die Oberfläche des Pfeilers muss 1,10 bis 1,16^m über dem Fussboden des Beobachtungsstandes liegen.

Hat der Turm eine genügend geräumige Laterne, so pflegt man einen Pfeiler von Holz zu verwenden und denselben wie den hängenden Pfeiler eines erhöhten Signals mit Streben zu versehen, welche sich auf das tiefer liegende Mauerwerk aufsetzen. Diese Einrichtung ist z. B. bei dem Kirchturme von Cloppenburg getroffen worden. Auf dem Ruinenturm der Landskrone im südlichen Elsass wurde der Fussboden der sehr geräumigen freien Plattform durchbrochen und ein gemauerter Pfeiler auf die tiefer gelegenen Gewölbedecken aufgesetzt, darüber eine vollständige Signalpyramide gebaut.

Der Kirchturm von Brake hat zwei Pfeiler auf dem Mauerwerk des Turmes erhalten; die beiden Beobachtungsstände mussten hängend konstruiert werden, wozu starke Balken als Träger aus den höher gelegenen Luken herausgestreckt wurden, dieses ist in Fig. 5. S. 33 dargestellt.

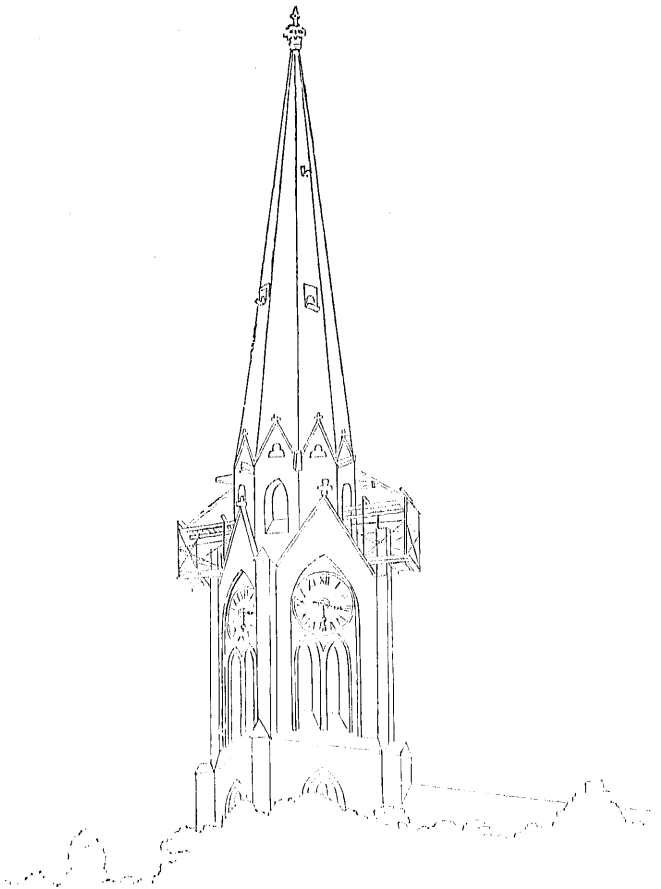
Dieselbe zeigt zugleich die Anbringung mehrerer Leuchtstände in der Spitze des Turmes.

Diese Einrichtung des Turmes von Brake mit zwei Ständen hat rund 520 Mark gekostet. Bei der Einrichtung des Kirchturmes von Twistringen sind beispielsweise für Kupferschmiede- und Dachdecker-Arbeiten besondere Kosten im Betrage von 380 M. entstanden.

Von den Signalen werden genaue Zeichnungen und von den Türmen photographische Aufnahmen gemacht. Zu dem letzteren Zwecke besitzt die trigonometrische Abteilung einen leicht transportablen photographischen Apparat. Die aufgenommenen Platten werden, gegen die Einwirkung des Lichts geschützt, nach Berlin gesandt und dort entwickelt.

Nach dem Wiedereintreffen in Berlin wird durch die Rekognoszierungs-Sektion auf Grund des Rekognoszierungs-Berichtes des Dirigenten und der beim Signalbau gemachten Aufnahmen und Notizen für jeden trigonometrischen Punkt I. Ordnung ein sogenannter *Stammbogen* angelegt. Derselbe enthält die Beschreibung der Örtlichkeit, die topographische Lage, Historisches über ältere Triangulationen, Angaben über bisherige Messungen der Abteilung, bauliche Einrichtungen, Zentrierungen, allgemeine Bemerkungen über Festigkeit, schwierige Richtungen, endlich Notizen über Quartier, bezahlte Entschädigungen, Abmachungen wegen des Stehenbleibens bezw. des Abbruches der Signale und Beobachtungsstände etc. Der Stammbogen ist sozusagen das curriculum vitae des Punktes. Jeder später folgende Beobachter hat für die nötige Vollständigkeit Sorge zu tragen.

Fig. 5.
Kirchturm von Brake
mit zwei Theodolitständen und mehreren hohen Leuchiständen.



Drehen der Beobachtungs-Pfeiler.

Bei hohen Türmen und Gerüsten beobachtet man die für Winkelmessungen missliche Erscheinung des *Drehens*, infolge ungleichförmiger Erwärmung durch die Sonne. Vollständig fest stehen auch steinerne Türme nicht, indessen wird das Drehen hauptsächlich bei hölzernen Gerüsten gefunden.

Eine eingehende Untersuchung dieser Sache mit vielen Beobachtungen bei der mecklenburgischen Triangulierung wurde von *Pascher* in den astronom. Nachrichten, 63. Band (1865) Nr. 1492—1493 mitgeteilt.

Es fanden sich bei einem 11 Meter hohen Pfeiler auf der Station Karbow, welcher äusserst haltbar aus vierkantig beschlagenen Balken konstruiert, und vom Standpunkt des Beobachters völlig unabhängig gestellt im Juli 1857 erbaut worden war,

bei der Beobachtung im Juni 1858 starke Drehungen, die einen ziemlich regelmässigen Tagesverlauf zeigten, Morgens $-2'$, Mittags $0'$, Abends $+2'$. (Astr. Nachr. 1492. S. 56.)

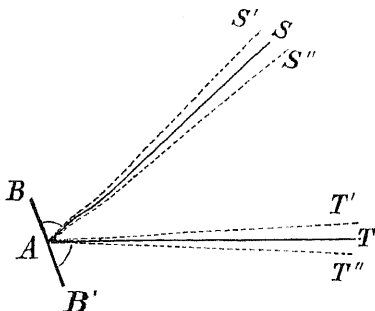
Das Drehen der Beobachtungs-Pfeiler wirkt offenbar am schlimmsten, wenn man lange Sätze nimmt; durch Hingang und Rückgang wird das Drehen zum teil unschädlich gemacht. Am besten ist es in dieser Hinsicht immer nur *zwei* Zielpunkte in einen Satz zusammen zu nehmen, d. h. reine „Winkel“-Messungen zu machen.

§ 4. Das Heliotrop.

Während bei kürzeren Entfernungen die Zielpunkte durch Baken mit Fahnen, durch kleine Pyramiden, durch Zieltafeln u. dgl. genügend bezeichnet werden können, ist bei grösseren Entfernungen die Sichtbarmachung der Dreieckspunkte oft eine sehr schwierige Sache. Früher dienten bei grossen Entfernungen hauptsächlich Kirchtürme und besonders erbaute grosse hölzerne Pyramiden als Zielpunkte. In Frankreich und England wurden auch künstliche Lichtsignale bei Nacht als Zielpunkte genommen (auf welche man neuerdings wieder teilweise zurückkommt).

Im Jahr 1821 hat *Gauss* das *Heliotrop* erfunden, welches seit jener Zeit hauptsächlich zur Anzielung von Hauptdreieckspunkten benützt worden ist.

Fig. 1.
Wirkungsweise des Heliotrops.



Die Wirkungsweise des Heliotrops ist einfach zu erklären (Fig. 1.). Wenn von einem Punkte *A* (Heliotrop) nach einem entfernten Punkte *T'* (Theodolit) ein Signal gegeben werden soll, so stellt man in *A* einen ebenen Spiegel *BB'* so auf, dass durch ihn die Sonnenstrahlen *SA* nach *T'* geworfen werden. Dieses ist bekanntlich nach dem Reflexionsgesetze der Fall, wenn die Ebene des Spiegels rechtwinklig ist auf der Ebene *SAT'* und wenn die Winkel *SAB* und *T'AB'* einander gleich sind.

Da die Sonne einen scheinbaren Durchmesser *S'A S''* von etwa $\frac{1}{2}^\circ$ hat, so sendet der Heliotropenspiegel *BB'* einen Lichtkegel *T'A T''* von ebenfalls etwa $\frac{1}{2}^\circ$ Öffnung aus, und ein entfernter Punkt *T'* bekommt Licht, wenn er nur wenigstens innerhalb dieses Strahlenkegels fällt, ohne gerade von der Axe *AT'* des Kegels getroffen zu werden.

Dieser Umstand ist für die Anwendung des Heliotrops in zweifacher Beziehung günstig; erstens ist infolge hievon bei der Einstellung des Instruments keine grosse Genauigkeit erforderlich, und zweitens kann eine Einstellung während der Dauer von nahezu 1 Minute beibehalten werden, obgleich sich während dieser Zeit die Sonne um einen merkbaren Bogen bewegt. (1 Zeitminute entspricht einer Sonnenbewegung von $15'$). Das fortgesetzte Einstellen des Heliotrops, entsprechend der Sonnenbewegung, kann zwar durch mechanische Mittel (Heliostat) erzielt werden, doch hat man bei Triangulierungen bis jetzt im allgemeinen das fortgesetzte Richten durch einen Gehilfen vorgezogen, weil ein solcher Gehilfe zur Bedienung des Instruments aus anderen Gründen ohnehin notwendig ist.

Nach dieser allgemeinen Darlegung wollen wir auf die Beschreibung verschiedener Heliotrope im einzelnen eingehen, und zwar wollen wir, aus geschichtlicher Rücksicht, mit einem Werkzeuge beginnen, welches jetzt kaum noch gebraucht wird:

I. Das Sextanten-Heliotrop von Gauss („Vice-Heliotrop“).

Dasselbe wird zuerst von Gauss in einem Briefe an Schumacher in den „Nachr. 1. Band, S. 106 (Februar 1822) kurz erwähnt. Weiteres hierüber geben die Mitteilungen von Hauptmann Güde in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1885, S. 125.

Hiernach fiel die Erfindung des Sextanten-Heliotrops in die Zeit der Ausführung des eigentlichen Gauss'schen (Spiegelkreuz-) Heliotrops, das wir nachher (S. 36–37) beschreiben.

Gauss schreibt (vgl. „Zeitschr. f. Verm.“ 1885, S. 125): „Noch vor dessen (des eigentlichen Heliotrops) Vollendung war ich auf die Idee gekommen, einen blossen Spiegelsextanten zu einer Art Vice-Heliotrop einzurichten, freilich viel unvollkommener, als jenes Instrument selbst, aber doch bei geschickter Behandlung gleichfalls brauchbar.“

Fig. 2. Sextant.

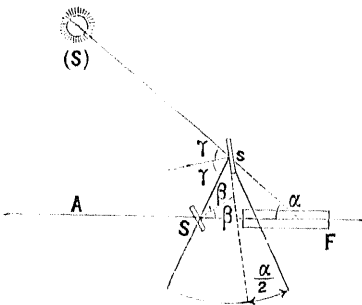
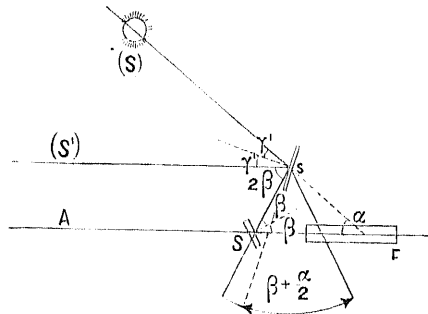


Fig. 3. Sextanten-Heliotrop.



Die Theorie dieses „Vice-Heliotrops“ erklärt sich an Fig. 2. und Fig. 3., bei welchen wir die Sextantentheorie selbst als bekannt voraussetzen (vgl. Jordan, Grundzüge der astronomischen Zeit- und Orts-Bestimmung, Berlin 1885, S. 155 und S. 175).

In Fig. 2. ist (S) die Sonne und A der Zielpunkt, welcher Licht erhalten soll. Fig. 2. zeigt also diejenige Sextantenstellung, welche zur Messung des Winkels α zwischen A und (S) erforderlich ist. Der Sextant wird hierbei auf einem festen Stativ gebraucht, und nachdem die Einstellung Fig. 2. gemacht ist, wird die Alhidade um den doppelten Schärfungswinkel, d. h. um 2β vorwärts gedreht, (Fig. 3.) worauf man erwarten darf, dass das am grossen Spiegel S reflektierte Sonnenbild (S') nun in die Richtung (S') parallel SA geworfen wird.

Um dieses nach Fig. 2. und Fig. 3. einzusehen, hat man sich des allgemeinen Sextanten-Reflexionsgesetzes zu erinnern, dass eine Spiegeldrehung (oder Alhidadendrehung) um den Winkel β an dem reflektierten Strahl s S, bzw. s(S) eine Drehung um den doppelten Betrag von β , also um 2β , erzeugt, oder es wird in Fig. 3. der Winkel $Ss(S) = 2\beta$, wie auch daselbst eingeschrieben ist, und damit wird s(S') parallel FA, was man haben will.

II. Das Spiegelkreuz-Heliotrop von Gauss.

Dieses ist das Instrument, welches von *Gauss* zuerst (im Jahr 1821) erfunden wurde. Eine Beschreibung desselben wurde von *Gauss* im 5. Bande der astr. Nachrichten, S. 329—334 (Februar 1827) nebst Zeichnungen gegeben.

Fig. 4.
Grundsatz des *Gauss*schen Heliotrops.

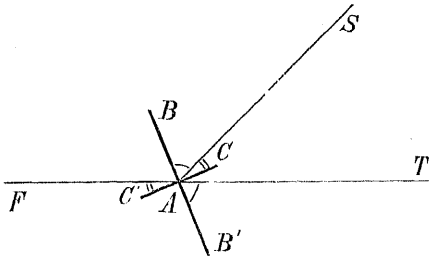
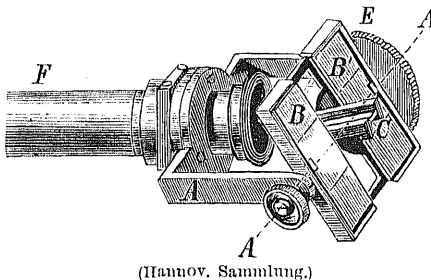


Fig. 5.
Ansicht des *Gauss*schen Heliotrops.
(Massstab etwa 1 : 3).



(Hannov. Sammlung.)

jedoch zusammen fallen. Der Spiegelapparat wird mit dem Fernrohr verbunden, und das Fernrohr muss dann um seine Axe drehbar sein.

Die Anwendung besteht in Folgendem: Man richtet das Fernrohr für sich allein nach dem entfernten Punkt *T*, welcher Licht erhalten soll, und zwar hat man hiebei den kleinen Spiegel *C* parallel der Fernrohraxe zu stellen, so dass er zwar einen Teil des Objectivs verdeckt, aber immer noch genügend Licht auf dasselbe fallen lässt. Von da an bleibt das Fernrohr in seiner Richtung unverändert, und es wird vor das Okular desselben eine Sonnenblendung vorgeschoben. Nun stellt man zuerst die Spiegelaxe *AA'* rechtwinklig zu der Ebene *SAT* von Fig. 4., und zwar beurteilt man dieses darnach, dass eine Scheibe *E* (Fig. 5.), welche auf der Axe *AA'* rechtwinklig aufgesteckt ist, keinen Flächenschatten wirft, sondern im Sonnenschatten als Linie erscheint.

Sobald irgend eine zu *AA'* rechtwinklige Ebene keinen Schatten mehr man durch Drehen der Spiegel um die Axe *AA'* ein Sonnenbild im Fernrohr erscheinen bringen, und das Heliotrop ist dann gerichtet.

Die Prüfung und Berichtigung des Apparates betrifft, so hat *Gauss* selbst astr. Nachr. S. 329—334 dieselbe sehr ausführlich behandelt und zwar durch von folgenden 8 Forderungen:

In Fig. 4. haben wir den Grundsatz und, in Fig. 5. die äussere Ansicht des *Gauss*schen Heliotrops. Wir haben zwei ebene, rechtwinklig gekreuzte Spiegel *BB'* und *CC'*, welche vor einem Fernrohr *F* so angebracht sind, dass die gemeinsame Spiegelaxe *AA'* rechtwinklig zur Fernrohraxe ist, und sich in Fig. 4. als ein Punkt *A* zeigt. Ein von der Sonne *S* herkommender Lichtstrahl *SA* wird nun von dem einen grösseren Spiegel *BB'* vorwärts nach *T* reflektiert, und von dem zweiten kleineren Spiegel *CC'* rückwärts nach *F* in das Fernrohr; und wegen der rechtwinkligen Kreuzung beider Spiegel ist *TAF* eine ungebrochene Gerade.

Die technische Ausführung des *Gauss*schen Heliotrops zeigt Fig. 5., wobei im wesentlichen dieselben Buchstaben-Bezeichnungen wie in Fig. 4. angewendet sind. Der grosse Spiegel *BB'* erscheint in Fig. 5. in 2 Teile *B* und *B'* zerlegt, deren Ebenen je-

1. 2. Die Abschlinie des Fernrohrs soll mit der Drehaxe des Fernrohrs zusammenfallen (oder wenn das Fernrohr fest und der Spiegelapparat um das Fernrohr drehbar ist, soll die Abschlinie des Fernrohrs mit der Drehaxe des Spiegelapparats zusammen fallen).
3. Die Drehaxe AA' (Fig. 5.) der Spiegel soll rechtwinklig zur Fernrohraxe sein.
4. 5. 6. Die Ebenen der Spiegel sollen parallel dieser Drehaxe AA' sein.
7. Die beiden Bestandteile B und B' (Fig. 5.) des grossen Spiegels sollen parallel sein.
8. Die Ebene des grossen Spiegels und die Ebene des kleinen Spiegels sollen rechtwinklig zu einander sein.

Die Ausführung wird so gemacht:

1. 2. Centrierung des Fernrohrs wie bei einem Nivellier-Instrument.
3. AA' rechtwinklig zur Fernrohr-Axe, wird von *Gauss* mit Hilfe einer angehängten Libelle gemacht, worauf wir hier nicht weiter eingehen.
4. 5. 6. 7. Kann nötigenfalls rein äusserlich, durch angelegte Lineale und rechte Winkel untersucht werden.
8. Die Hauptforderung, ob die beiden Spiegel gegenseitig *rechtwinklig* sind, kann man dadurch erfüllen, dass man die beiden Spiegel zusammen wie ein Spiegelkreuz oder Prismenkreuz beim Feldmessen behandelt (vgl. Band II. S. 8—11).

Zu der Heliotrop-Prüfung schrieb Mechaniker *Meyerstein* im Januar 1876 im 87. Band, Nr. 2080, der astr. Nachrichten folgendes:

„Die Methode, welche *Gauss* zur Berichtigung des für die Geodäsie so wichtigen Instrumentes im 5. Bande der astr. Nachr. angegeben hat, lässt bekanntlich im Resultate nichts zu wünschen übrig. Soll aber dieses Resultat erzielt werden, so ist es nur durch eine so grosse Sorgfalt möglich, mit welcher *Gauss* diese Berichtigung vornahm, welche aber einen sehr bedeutenden Zeitaufwand erfordert. Diese letzte Bemerkung hat der selige *Gauss* mir gegenüber, indem ich ihm bei der Berichtigung der Heliotrope sehr häufig assistierte, oft gemacht.“ *Meyerstein* giebt dann eine andere Prüfungsmethode mit einem Hilfsfernrohr, das, mit beleuchtetem Fadenkreuz, auf das Heliotropen-Fernrohr eingerichtet wird.

Es ist hiezu auch über einige Bemerkungen zu berichten, welche von *Helmert* in dem Berichte über die wissenschaftlichen Apparate auf der londoner internationalen Ausstellung 1876, Berlin 1878, S. 165 ff. zu dem *Gauss*schen und zu anderen Heliotropen gemacht hat. Für das *Gauss*sche Heliotrop findet *Helmert* den Einstellfehler $A = 2\sqrt{f^2 + \delta^2}$, wenn f die Neigung der Spiegelaxe in der Ebene der Fernrohraxe und δ der Fehler in der Rechtwinkligkeit der beiden Spiegel ist; es wirkt also auch f als Grösse erster Ordnung.

Da das *Gauss*sche Heliotrop nur noch historisches Interesse hat, und in der Anwendung namentlich durch das *Bertramsche* Heliotrop ersetzt ist (s. u. S. 38 bis 40) schliessen wir damit ab.

III. Das Heliotrop von Steinheil.

Auch dieses, zuerst in *Schumachers* astr. Jahrbuch 1844, S. 13 beschriebene Instrumentchen ist praktisch kaum von Bedeutung, doch lohnt die sinnreiche Einrichtung wohl eine kurze Beschreibung:

Der Spiegel BB' hat in der Mitte bei A eine unbelegte Stelle, so dass die von S herkommenden Sonnenstrahlen durchgehen, und auf eine hinter dem Spiegel

angebrachte Sammellinse L fallen können. Diese Linse L erzeugt ein Sonnenbild in C , welches durch eine matte Fläche aufgefangen wird. Das Sonnenbild in C sendet seinerseits wieder Strahlen zurück nach der Linse L , welche von da wieder parallel austreten, auf die unbelegte Rückseite des Spiegels in A fallen, und nach O zurückgeworfen werden. In folge dessen sieht das Auge O ein mattes Sonnenbild in der Richtung $A T$. Die nach O gelangenden Sonnenstrahlen machen hiernach folgenden Weg: $S A L C$, dann zurück $C L A$ und reflektiert nach O .

Fig. 6.

Grundsatz des Steinheil'schen Heliotrops,
 S = Sonne, T = Zielpunkt.

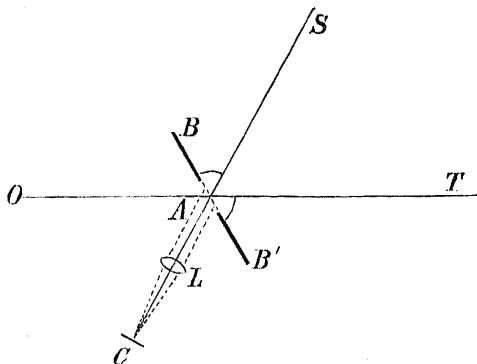
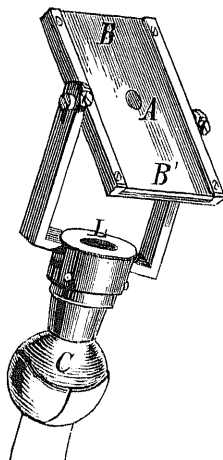


Fig. 7.

Ansicht des Steinheil'schen Heliotrops.
 (Maßstab ungefähr 1 : 2.)



(Hannov. Sammlung.)

Andererseits werden die von S auf den *belegten* Teil der Spiegelfläche $B B'$ fallenden Strahlen in der Richtung $A T$ vorwärts reflektiert, und daraus giebt sich folgende Anwendung:

Das Instrument wird unter Benützung eines Gelenkes bei C , so gestellt, dass die Linse L durch die unbelegte Stelle bei A Sonnenlicht erhält. Dann zielt das Auge O hinter dem Spiegel durch die Öffnung A nach dem Zielpunkt T , welcher Licht erhalten soll, und der Spiegel wird teils im Kugelgelenk C , teils um seine durch A gehende Axe so gedreht, dass in der Richtung $A T$ das oben erwähnte matte Sonnenbild erscheint.

IV. Das Heliotrop von Bertram.

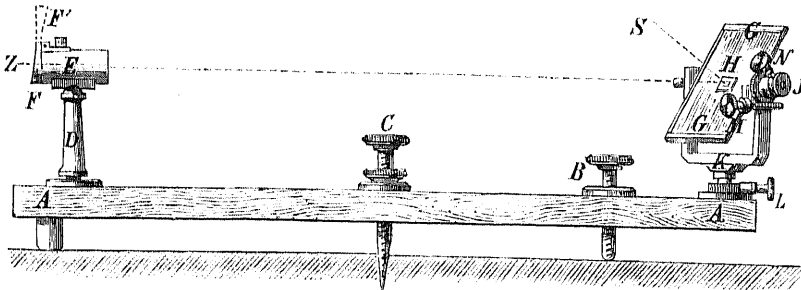
Diese einfache Vorrichtung, welche keine Prüfung und Berichtigung braucht, und ohne Fernrohr von jedem Gehilfen bedient werden kann, ist zur Zeit die am meisten gebrauchte.

Das Instrument wird zuerst von *Bessel* in der „Gradmessung in Ostpreussen“ S. 65 erwähnt mit den Worten: „Die benützten Heliotrope waren teils von der Einrichtung, welche der Erfinder (*Gauss*) dieser unschätzbaren Methode ihnen gegeben hat, teils waren sie von einer sehr leicht ausführbaren Konstruktion, welche von Herrn Ingenieur-Geographen *Bertram* herrührt.“ Die erste Beschreibung und Zeichnung dieses *Bertram'schen* Heliotrops findet sich in General *Baeyers* „Küstenvermessung“ S. 52

bis 53 und Tafel III. (Über den Urheber der Erfindung wurde eine Erörterung geführt von *Nagel* bzw. *Baeyer*, „Zeitschr. f. Verm.“ 1878, S. 34 und von *Bertram* selbst S. 193.)

Wir geben im Nachfolgenden zwei Zeichnungen des *Bertram*schen Heliotrops.

Fig. 8.
Bertram'sches Heliotrop, ältere Anordnung.
Maßstab 1:5.



(Karlsru. Sammlung.)

Die Konstruktion des *Bertram*schen Heliotrops beruht auf dem einfachen Grundgedanken, dass ein entfernter Punkt *Z* dann Licht durch einen Spiegel *H* erhält, wenn ein Zwischenpunkt *E*, welcher sich auf der Ziellinie *HZ* befindet, von der Lichtlinie getroffen wird.

In Fig. 8. ist *GG* der Spiegel, welcher, wie immer, so gestellt wird, dass seine Ebene rechtwinklig ist auf der Leuchtebene *SHZ*, wobei *S* die Sonne, *H* die Spiegelmitte und *Z* der entfernte Punkt ist, welcher Licht erhalten soll, und dass die Strahlen *SH* und *HZ* gleiche Winkel mit der Spiegelebene machen.

Der Spiegel *GG* hat in der Mitte ein kleines Loch *H*, welches zwei Zwecken dient, wie wir nachher sehen werden.

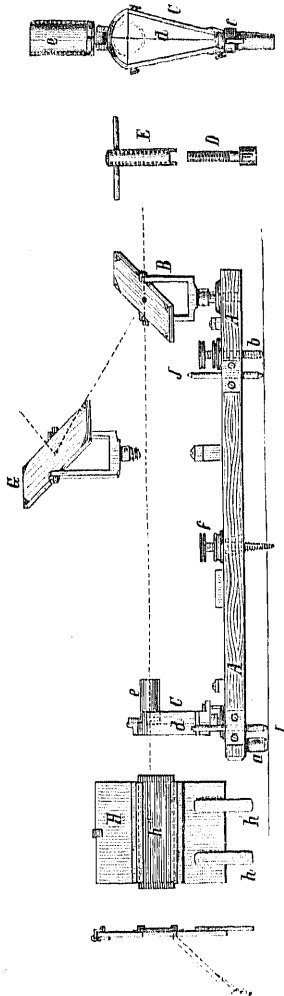
Der Holzrahmen *AA*, auf welchem rechts der beschriebene Spiegel drehbar angebracht ist, trägt auf der anderen Seite links, durch Vermittlung der Säule *D*, ein kleines Rohr *E* in gleicher Höhe mit der Spiegelmitte *H*. Im Innern dieses Rohres ist ein Fadenzug *E* angebracht, welches in Verbindung mit dem Okularloche *H* des Spiegels als Diopter zum Anzielen eines entfernten Punktes *Z* dient.

Nachdem dieses geschehen ist, wird links am Ende der Röhre *E* eine Klappe *F'*, welche vorher geöffnet (in der Lage *F''*) war, vor die Öffnung gebracht, und nun muss der Spiegel *G* so gestellt werden, dass sein Licht auf die Innenseite der genannten Klappe *F'* fällt, und genauer noch so, dass die Klappe im allgemeinen hell ist, in der Mitte aber einen dunkeln Fleck zeigt, herrührend von dem *nicht* reflektierenden Loch *H* in der Spiegelmitte.

Das Loch *H* in der Spiegelmitte dient also zwei verschiedenen Zwecken: erstens ist es Okular beim Zielen längs der Geraden *HE*, und zweitens dient es zur Bezeichnung der Lichtmitte. Die Bewegung des Spiegels wird in horizontalem und vertikalem Sinn bei *K*, *L*, *M*, *N* gehandhabt.

Die zwei Schrauben *C* und *B* dienen zum Centrieren und zum Einstellen nach der Höhe.

Fig. 9.
Bertram'sches Heliotrop, nach Anordnung der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme.
(Maßstab 1 : 8.)



(Hannov. Sammlung, Mechaniker Bamberg.)

Hilfsspiegel (G Fig. 9.).

Wenn die Sonnenstrahlen sehr schief auf einen Heliotropenspiegel auffallen, welcher nach dem entfernten Punkte Licht senden soll, so wird dieses Licht sehr schwach (es ist überhaupt immer nur die Projektion der Spiegelfläche auf eine Ebene rechtwinklig zur Strahlenrichtung als wirksam zu betrachten). In diesem Falle hilft man sich dadurch, dass man das Sonnenlicht zuerst mittelst eines günstig gestellten Hilfsspiegels (G Fig. 9.) auffängt und durch dessen Vermittlung dem eigentlichen Heliotropenspiegel zuführt. Dasselbe ist notwendig, wenn der Heliotropenspiegel im Schatten, z. B. im Innern eines Turmes, steht.

Ausser Fig. 8. geben wir noch in Fig. 9. eine Darstellung des *Bertram'schen* Heliotropes, in neuerer Anordnung, wie sie zur Zeit bei der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme im Gebrauch ist. (Fig. 9. ist entlehnt aus dem Bericht über d. wissensch. Instr. auf d. Berliner Gew.-Ausst. 1879, von *Löwenherz*, Berlin 1880, S. 71.)

- A Holzrahmen, 52^{cm} lang, 10^{cm} breit,
- B Leuchtspiegel, 8,2^{cm} lang, 8,2^{cm} breit,
- G Hilfsspiegel (bei ungünstiger Sonnenstellung u. s. w., s. o.),
- H Vorsteck-Rahmen für das grüne Glas *h*" (selten gebraucht, vgl. Gitterblenden S. 42),
- C Objektivdiopter mit Fadenkreuz *d* und Leuchtröhre *e* (in der Nebenfigur rechts ist *e* aufgeschlagen),
- f Axenschraube zum unmittelbaren Centrieren über Holz,
- D Leuchtaxe mit Schlüssel *E* zum schärferen Centrieren statt *f* (unterhalb *D* kommt die hier nicht mehr dargestellte „Leuchtschraube“).

V. Das Heliotrop von Reitz.

Dieses ist im wesentlichen auf dasselbe Prinzip gegründet wie das *Bertram'sche*, es wird aber im Gegensatz zu letzterem in Verbindung mit einem Fernrohr gebraucht.

Das Instrument besteht im wesentlichen in einer Verbindung von zwei Spiegeln mit einem Fernrohre. Der grosse Spiegel *A* lässt sich in jede beliebige Lage bringen und reflektiert das Sonnenlicht nach dem entfernten Zielpunkt. Bei *a* ist die Folie des Spiegels *A* abgenommen, der kleine Spiegel *B* ist rechtwinklig zur Fernrohraxe, *b* und *c* sind die Richteschrauben zur Erzielung dieser rechtwinkligen Lage.

In Fig. 11. (s. S. 41) sind die beiden Spiegel *A* und *B* gezeichnet nebst dem

Ring R , welcher durch Vermittlung von 3 Schrauben $S_1 S_2 S_3$ zur Befestigung des Apparates an der Objektivfassung eines Fernrohrs dient. Der grosse Spiegel A ist in Fig. 11. parallel der Fernrohraxe gestellt (wie er beim Gebrauch nicht steht).

Fig. 10.
Grundsatz des *Reitz*'schen Heliotrops.

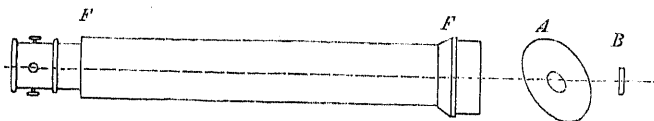
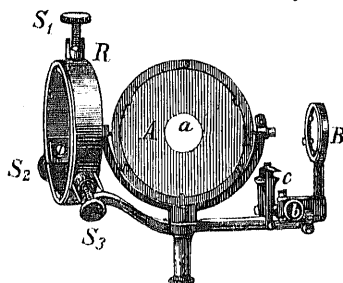


Fig. 11.

Ansicht des *Reitz*'schen Heliotrops.



Ein zu Anfang angezielter, also in der Fernrohraxe liegender Punkt erhält Licht von dem grossen Spiegel A , wenn im Fernrohr (nach Verschieben eines Blendglases) ein Sonnenbild gesehen wird, das durch den kleinen Spiegel B ins Fernrohr zurückgeworfen wird. Die Sonnenstrahlen, welche nach dem entfernten Punkt gesendet werden, machen also den Weg von der Sonne zum grossen Spiegel A , und von da an dem kleinen Spiegel B vorbei zu dem Zielpunkt; ein Teil der Strahlen aber, welche von dem grossen Spiegel A ausgehen, trifft den kleinen Spiegel B , und wird von diesem zurück ins Fernrohr gebracht.

Wenn der Apparat richtig wirken soll, so muss die Ebene des kleinen Spiegels B rechtwinklig zur Fernrohraxe sein. Zur Prüfung und Berichtigung gibt *Reitz* folgendes Verfahren an:

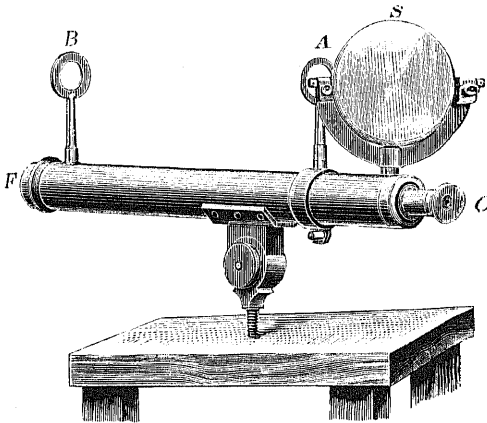
Man richtet das Fernrohr auf einen nahen (etwa 10^m entfernten) Gegenstand, und dreht den grossen Spiegel A so, dass das Sonnenbild sichtbarlich auf denselben Gegenstand fällt. Man stellt dann das Okular auf unendliche Entfernung ein. Sieht man nun, nachdem ein Sonnenglas vorgeschoben, in das Fernrohr, so lässt sich durch Drehung der Richteschrauben b und c das Sonnenbild, welches von B reflektiert wird, in das Gesichtsfeld des Fernrohres bringen. Geschieht dies, so sieht man zugleich im Gesichtsfelde auch das von B reflektierte Spiegelbild des Fadenkreuzes, welches nun durch die Schrauben b und c zur Deckung mit dem Fadenkreuz selbst gebracht wird.

Die Thatsache, dass man an Fadenkreuz des Fernrohres ein Bild dieses Fadenkreuzes selbst wahrnimmt, erklärt sich dadurch, dass bei der Einstellung des Fernrohres auf Unendlich, die vom Fadenkreuz nach dem Objektiv gehenden Strahlen nach der Brechung parallel austreten, und nach der Reflexion durch den kleinen Spiegel B auf ihrem eigenen Wege wieder zurückkehren. Zugleich wird durch eben diesen kleinen Spiegel B so viel Licht auf das Fadenkreuz geworfen, dass die beschriebene Bild-erzeugung überhaupt wahrnehmbar wird.

Ein ähnliches Instrument wurde von *Reitz* beschrieben in d. „Zeitschr. f. Instrumentenkunde“, 1881, S. 338—340. In derselben Zeitschrift 1883, S. 265—268 giebt *Reitz* auch die Beschreibung und Zeichnung eines „*Periheliotrops*“, welches rings umher zeitweise jedem Punkte des Horizontes einen Blitz reflektierten Sonnenlichtes zusendet.

VI. Amerikanisches Heliotrop.

Fig. 12.
Amerikanisches Heliotrop.



Zum Schluss geben wir noch in Fig. 12. die Zeichnung eines amerikanischen Heliotrops nach der Beschreibung und Zeichnung des Werkes „The final results of the triangulation of the New-York State survey u. s. w. Albany 1887“ S. 127.

Wie Fig. 12. zeigt, besteht das Instrument aus einem Fernrohr OF mit aufgesetztem Spiegel S und 2 Ringen A und B . Der Spiegel soll sein Licht in der Axe der beiden Ringe fortsenden und dabei muss der Schatten des Ringes A den Ring B decken.

Ob das ganze richtig wirkt, wird untersucht durch Leuchten nach einem *nahen* Zielpunkte, indem beobachtet wird, ob der Punkt richtig Licht erhält. Dieses Instrument wird namentlich zu Rekognoszierungen angewendet.

Heliotropen-Telegraphie.

Durch Auf- und Zudecken des Spiegels und Verabredung der Aufeinanderfolge der dadurch erzeugten Lichtblitze wird eine einfache Telegraphie erzielt, welche zur Verständigung zwischen dem Winkelbeobachter und dem Heliotropisten sehr wichtig ist.

Regulierung der Lichtstärke.

Da das Heliotropenlicht unter verschiedenen Umständen *sehr verschieden* stark ist, muss man ein Mittel haben, nach Bedarf das Licht zu verstärken oder namentlich zu schwächen. Die Verstärkung des Lichtes kann durch Anwendung eines grösseren Spiegels oder durch günstigere Stellung eines Hilfsspiegels erzielt werden. Die Verkleinerung des Lichtes machte man früher auch am Heliotrope selbst durch teilweises Decken des Spiegels, oder durch Vorsetzen farbiger Gläser u. s. w. Das hat aber namentlich den Übelstand, dass die Lichtänderung vom Theodolite aus umständlich durch Heliotropen-Telegraphie befohlen werden muss.

In neuerer Zeit ist ein viel einfacheres und besseres Mittel der Lichtschwächung im Gebrauch, welches am Theodolit selbst gehandhabt wird, nämlich das Vorsetzen von *Gitterblenden*, bestehend aus mehreren Lagen eines losen Gewebes, wie Flortuch, Musselin u. s. w. (farbige Gläser dürfen vor dem Theodolit nicht angewendet werden wegen der Gefahr der Lichtablenkung). Professor *Bruns* berichtet hierüber in der „Zeitschr. f. Instrumentenkunde“ 1888, S. 308 mit der Bemerkung, dass dieses Mittel schon vor einem halben Jahrhundert in der *astronomischen* Praxis Anwendung gefunden hat.

Dauer der Heliotrop-Lichter.

Die Winkelmessung nach Heliotrop-Lichtern ist nur während eines beschränkten Teiles eines Tages möglich, etwa von 3 Uhr Nachmittags bis Sonnen-Untergang, ausnahmsweise auch unmittelbar nach Sonnen-Aufgang. Vormittags und unmittelbar nach Mittag ist die Messung auf weite Entfernung nicht möglich wegen des Schwirrens und der Unruhe der Bilder.

Da auch in der günstigen Tageszeit noch viele Zeit verloren geht wegen mangelnden Sonnenscheins, so ist die Winkelmessung nach Heliotrop-Licht eine langwierige Arbeit. Nach einer von kompetentester Seite angestellten Vergleichung („Zeitschr. f. Verm.“ 1879, S. 111) ist die mittlere Leistung für 1 Tag und 1 Instrument nur etwa zwischen 12 und 17 Einstellungen (in je zwei Lagen).

Anhang zu § 3.

Nacht-Beobachtungen.

Man ist in neuester Zeit wieder teilweise von der Signalisierung durch Heliotrope zur Anwendung nächtlicher Lampensignale zurückgekommen. Im Generalbericht d. Eur. Gr. f. 1875, S. 144–150 wird von *Perrier* eine „Etude comparative des observations de jour et de nuit“ mitgeteilt, welche den Nacht-Beobachtungen den Vorzug giebt.

Die elektrische Nacht-Signalisierung zwischen Spanien und Algier haben wir bereits auf S. 24–25 erwähnt.

Eine schätzbare Abhandlung: „Die Winkelmessungen bei Tage und bei Nacht“ von *W. Werner* ist in der „Zeitschr. für Instrumentenkunde“ 1883, S. 225–237 erschienen.

§ 5. Anordnung der Winkelmessung.

Die Winkelmessung, das wichtigste Element der Triangulierung, ist in ihrer Anordnung durch zwei wesentlich verschiedene Umstände bedingt, erstens durch die mechanischen und optischen Verhältnisse des Messens selbst, und zweitens durch die Ausgleichung.

In geschichtlicher Beziehung hat sich die Winkelmessung für Triangulierung etwa so entwickelt:

Schon vor der Anwendung des Fernrohrs konnte man an geteilten Kreisen von grossem Halbmesser Winkel auf etwa 1' genau messen (*Snellius* 1615, vgl. unsere Einleitung S. 4), bald stieg die Genauigkeit so, dass man einzelne Sekunden in Rechnung nahm.

Das im vorigen Jahrhundert von *Tobias Mayer* in Göttingen erfundene und von den Franzosen weiter entwickelte Verfahren der *Repetitions-Messung* mit Nonienablesung galt bis zur Mitte dieses Jahrhunderts im allgemeinen als das beste und die Genauigkeit stieg auf 1".

Das Wesentlichste über Repetitions-Messung haben wir schon in unserem II. Bande, S. 178–185 und S. 212 mitgeteilt, zugleich sei über die hannoverschen Repetitions-Messungen von *Gauss* verwiesen auf *Gäde*, „Zeitschr. für Verm.“ 1885, S. 121 und 205, sowie *Jordan-Steppes*, „deutsches Vermessungswesen“ S. 10–17, und „Zeitschr. f. Verm.“ 1882, S. 431. Über den älteren „cercle répéteur“, vgl. *Jordan*, Grundzüge der astr. Zeit- und Ortsbestimmung, Berlin 1885, S. 219 und S. 206.

Struve und *Bessel* gingen etwa 1820—1830 zur „*Richtungs-Messung*“ über, welche später mit Mikroskop-Ablesung (etwa seit 1840, vgl. Küsten-Vermessung S. 51) weiteste Verbreitung fand. Man nahm möglichst viele Sichten in einen Satz zusammen und wiederholte die Sätze mit verstelltem Limbus. In neuester Zeit ist die reine „Winkelmessung“ (mit nur *zwei* Sichten in einem Satze) mit Vorteil angewendet worden.

Nach dieser allgemeinen Übersicht wollen wir einzelne Verhältnisse näher betrachten:

Richtungs-Messungen.

Die Messung von möglichst vollen Sätzen, wie man sie im einzelnen Falle bekommen kann, wurde von *Bessel* bei der Gradmessung in Ostpreussen angewendet und seitdem Jahrzehnte lang fortgesetzt. *Bessel* schreibt (Gr. in Ostpr. S. 69):

„Wenn man immer *alle* auf einem Dreieckspunkt zu beobachtende Richtungen hätte einstellen können, so würde das Resultat aller daselbst gemachten Beobachtungen ganz einfach das Mittel aus allen Ablesungen jeder Richtung gewesen sein. Dieses war aber sehr selten möglich; man musste sich auf die Beobachtung derjenigen Punkte beschränken, welche gerade sichtbar waren und nicht zu unruhig erschienen“.

Für die Messungen selbst scheint nun ein solches Anpassen an die Umstände das beste, allein die Ausgleichungen werden dadurch ungemein verwickelt.

Wir können heute davon absehen, dass es mehrerer Jahrzehnte bedurft hat, bis die formelle Theorie der Ausgleichung von Triangulierungen mit solchen unvollständigen Satzbeobachtungen fertig gestellt, und unbestritten anerkannt war (*Bessel*, *Hansen*, *André* u. A. 1834—1870, man vgl. unseren I. Band, § 48—54, und § 78—83., zusammenhängende Entwicklung aller hierher gehörenden Theorien). Aber auch wenn diese Theorien nun vorliegen und die ganze Ziffernmengung mit den Coefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ u. s. w. berechnet ist, ist sie doch in sich kaum konsequent zu nennen, weil die mittleren Fehler *nach* der Ausgleichung immer grösser ausfallen, als *vor* der Ausgleichung. Eine solche Triangulierungs-Berechnung bietet für jede Weiterverwertung eine starre und unerfreuliche Masse, einem Bauwerke vergleichbar, das zwar nicht einstürzt, aber durch zahllose planlos zusammen gebrachte Streben gehalten wird.

Null-Marke.

Um die vorerwähnten Richtungs-Messungen etwas geschmeidiger und von zufälligen Umständen unabhängiger zu machen, hat man in jeden Satz einen naheliegenden Zielpunkt, welcher gar nicht zu der Triangulierung selbst gehört, aufgenommen.

Über dieses Mittel wurde zuerst von *Struve* (Astr. Nachr. 2. Band, 1824, S. 435) berichtet. Die Nullpunktmarke wurde von *Struve* in 500 bis 1000^m Entfernung gesetzt; sie bestand aus einem vertikalen Rechteck von 10" Breite und 20" Höhe mit weisser Farbe auf schwarzem Grunde angelegt; da der Vertikalfaden des Fernrohrs 6" deckte, so blieb links und rechts von dem Rechteck ein Streifen von 2" Breite übrig.

Die ausgedehnteste Anwendung fand dieses Mittel der Nullmarke bei den Triangulierungen des geodätischen Instituts, etwa 1870—1880, namentlich bei dem „*Rheinischen Dreiecksnetz*“; es hat aber ein kompetenter Beurtheiler hieraus gefunden, „dass die Beobachtungen der Nullmarke auf den Stationen des rheinischen Dreiecksnetzes

erheblich schlechter sind, als die der übrigen Objekte. („Zeitschr. für Verm.“ 1879, S. 149).

Ein Teil dieser Nullmarkenfehler mag jedenfalls darin liegen, dass die Nullmarken nicht immer in genügend gleicher Höhe mit dem Theodolit angebracht werden konnten; wenn indessen eine Nullmarke unter einem starken Neigungswinkel erscheint, so sollte man den Horizontal-Axenfehler (*tang h* Band II, S. 163) hierfür in Rechnung bringen. Wir glauben, dass man damit, und mit Beschränkung auf je einen oder zwei Zielpunkte ausser der Nullmarke in jedem Satze, vorteilhaft messen könnte.

Winkelmessungen in allen Kombinationen.

Dieses Mittel, welches schon von *Gauss* und *Gerling* als Ideal gepriesen wurde, ist von General *Schreiber* etwa seit 1871 angewendet worden und bildet jetzt den Grundton der Haupttriangulierungen der Landesaufnahme.

Die Theorie hiezu haben wir bereits in unserem I. Bande § 82. behandelt, und über die Entstehung und Vergleichung mit dem früheren Verfahren geben 2 Abhandlungen Auskunft:

Schreiber: Über die Anordnung von Horizontalwinkel-Beobachtung auf der Station, „Zeitschr. f. Verm.“ 1878, S. 209—237.

Schreiber: Richtungs-Beobachtungen und Winkel-Beobachtungen, „Zeitschr. für Verm.“ 1879, S. 97—149.

Ferner das amtliche Werk: „Die königl. preussische Landesaufnahme“, II. Teil, Berlin 1873, zweite Abteilung, S. 303—313 und Bearbeitung *Jordan-Steppes*, „deutsches Vermessungswesen, S. 88—94.

Hiernach sind die Vorteile doppelt: Erstens werden die Messungen selbst so genau als möglich, durch Beschränkung auf kürzeste Dauer (nur *zwei* Zielpunkte) des einzelnen Satzes; zweitens aber werden dadurch alle Gewichts-Coefficienten $[\alpha \alpha]$, $[\alpha \beta]$ u. s. w. gleich *Null*, und die Netzausgleichung, welche bei unvollständigen zerstreuten Sätzen eine unerfreuliche starre Masse bildet, wird nun, bei Wahrung aller formellen Strenge, so übersichtlich und geschmeidig, wie wenn man es mit unabhängigen Richtungs-Messungen zu thun hätte (vgl. hiezu auch unseren späteren § 21.).

§ 6. Schraubenfehler und Teilungsfehler.

Nachdem das Wichtigste über das Schrauben-Mikroskop schon in unserem II. Bande § 49. und § 68. mitgeteilt ist, d. h. alles das, was man unbedingt wissen muss, um mit einem Mikroskop-Theodolit messen zu können, wollen wir nun noch einige feinere Untersuchungen vornehmen.

Man hat zu fragen, ob die Schrauben der Mikroskope durchaus gleichförmige Verschiebungen der Fäden erzeugen, oder im einzelnen:

- 1) ob die verschiedenen Schraubengänge alle gleich sind (fortschreitende Fehler),
- 2) ob in der einzelnen Umdrehung die Drehungswinkel den Fadenverschiebungen proportional sind (periodische Fehler).

Die erste Frage, fortschreitende Fehler betreffend, kann man dadurch beantworten, dass man ein und denselben Teilwert des Kreises an verschiedenen Stellen der Schraube misst. Die Untersuchung wird bei den wenigen Umdrehungen, welche

bei Theodolit-Mikroskopen gewöhnlich nur gebraucht werden, selten merkliche Fehler ergeben, und ist jedenfalls nicht schwierig. (Eine sehr feine Untersuchung dieser Art findet man in „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures, Tome V, Paris 1886, S. 47—60, erreurs progressives d'une vis micrométrique.)

Dagegen sind die *periodischen Fehler*, welche von unsicherer Führung der Schrauben u. s. w. herrühren, oft bedeutend und müssen stets untersucht werden.

Man braucht dazu ein Intervall, welches *nicht* einer ganzen Umdrehung oder einem Vielfachen einer Umdrehung entspricht, sondern am besten einen runden Bruchteil, z. B. ein Viertel, ein Fünftel oder dergl. einer Umdrehung giebt.

Die Theodolitkreise haben meist keine Teilstriche für solche Zwecke, und es wäre zu wünschen, dass die Mechaniker bei Herstellung der Teilungen darauf Rücksicht nähmen, indem an irgend welcher Stelle einige Hilfsstriche in Abständen von 1', 2', 3', 4' u. s. w. angebracht würden.

Statt eines Hilfsstriches auf der Teilung kann man auch einen Hilfsfaden (bzw. Doppelfaden) im Gesichtsfelde des Mikroskopes anwenden, indem dann der Hauptfaden und der Hilfsfaden (bzw. die beiden Faden-Mitten) nacheinander auf denselben Strich der Teilung eingestellt werden.

Manchmal kann man auch irgend ein nicht zur Teilung selbst gehöriges Zeichen auf dem Teilkreise als Hilfsstrich benützen; z. B. giebt *Reinhertz* in der „Zeitschr. f. Vermessungswesen“, 1887, S. 549, an, dass er den Mittelstrich der Ziffer 1 als Hilfsstrich genommen habe. Ähnlich haben wir bei dem nachfolgenden Beispiel die Ziffer 2 benützt, welche im Gesichtsfeld erschien, indem auf das rechts unten an 2 befindliche vertikale Abstossstrichen eingestellt wurde.

Der Abstand dieses Hilfsstriches von dem nächsten Teilstriche war rund $i = 1'$, und die Mikroskop-Trommel hat 5' auf einer Umdrehung. Nun wurde das Hilfsintervall i auf der Schraube 5mal gemessen, indem nach jeder Messung die Alhidade wieder um i zurückgedreht wurde. Das ganze wurde mehrfach hin und zurück wiederholt, doch geben wir hier nur die *Mittelzahlen* s mit ihren Differenzen i , woran sich auch die leichtverständliche Berechnung anschliesst.

Schrauben- ablesungen s	Differenzen i	Verbesserungen $i_0 - i = v$	Schrauben- ablesung rund s
0' 0,00''		0,00''	0'
1' 6,15''	1' 6,15''	— 1,06''	1'
2' 14,90''	1' 8,75''	— 3,66''	2'
3' 18,85''	1' 3,95''	+ 1,14''	3'
4' 22,60''	1' 3,75''	+ 1,34''	4'
5' 25,45''	1' 2,85''	+ 2,24''	5'
Mittel	$i_0 = 1' 5,09''$	0,00''	

(1)

Die Trommelteilung geht von 10'' zu 10'', einzelne Sekunden werden geschätzt. (Doppelsekunden sind nicht angewendet), die Dezimalen bis auf 0,05'' bei den Ablesungen s sind nur durch Wiederholungen und Mittelbildung entstanden. Das Mittel

i_0 nehmen wir nun als richtig an (obgleich $s = 5' 25''$ statt $5' 0''$ am Schlusse abgelesen ist), berechnen die Differenzen $i_0 - i = v$, deren Summe $= 0$ sein muss, und dann die Verbesserungen Δs als Summen der v , indem das erste $s = 0,00''$ gesetzt wird, dann $0,00 - 1,06 = 1,06$, $1,06 - 3,86 = 4,72$ u. s. w.

Nach dem Ergebnis dieser Untersuchung ist also jede Schrauben-Ablesung in der Gegend von $2'$ um $4,7''$ zu vermindern u. s. w.

Wenn die Verbesserungen Δs so gross werden, wie in diesem Beispiel, so ist es bedenklich, sie zu vernachlässigen; eine Korrekptions-Tabelle anzulegen und alle Ablesungen darnach zu verbessern, wäre sehr mühsam, vielleicht kann man den Grund der Ungleichheit in der mechanischen Lagerung der Schraube u. s. w. finden und verbessern, oder man muss schlechte Schrauben entfernen und durch bessere ersetzen lassen.

Es ist hier zu zitieren:

Westphal, Übersicht über die Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen von Mikrometer-Schrauben, „Zeitschr. f. Instrumentenkunde“, 1881, S. 149, 229, 250, 397.

Einige Beispiele und Fingerzeige hiefür giebt auch die erwähnte Abhandlung von *Reinherz* in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1887, S. 545—553, aus welcher wir noch einen weiteren sehr praktischen Vorschlag entnehmen, nämlich, die periodischen Schraubenfehler durch planmässige Anwendung *verschiedener Trommelstellungen* zu eliminieren, was gleichzeitig mit der Verteilung der Richtungen auf verschiedene Kreislagen geschehen kann.

Wir wollen beiseihsalber annehmen, man wolle mit unserem Instrumente, dessen Trommel $5' = 300''$ Umdrehung hat, eine Richtungs-Messung in 8 Kreislagen machen; dann muss man nach jedem Satze die Trommelstellung um $300'' : 8 = 37,5''$ ändern, oder man bekommt für die 8 Kreislagen folgende Anfangs-Ablesungen:

1. $0^\circ 0' 0''$	5. $90^\circ 2' 30''$	} (2)
2. $22^\circ 30' 38''$	6. $112^\circ 33' 8''$	
3. $45^\circ 1' 15''$	7. $135^\circ 3' 45''$	
4. $67^\circ 31' 52''$	8. $157^\circ 34' 22''$	

Stellt man diese Anfangs-Ablesungen ein, so werden auch alle anderen Ablesungen je um $37,5''$ verschoben, und damit die periodischen Schraubenfehler mit derselben Wahrscheinlichkeit eliminiert, wie man das bei den Kreisteilungs-Fehlern durch die planmässigen Kreisverstellungen erwartet.

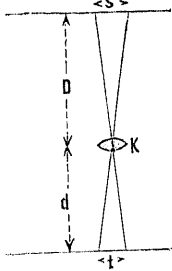
Ausgleichung der periodischen Schraubenfehler.

Bei unserem vorstehenden Beispiele ist die ganze Berechnung in der kleinen Tabelle (1) enthalten, und man kann nötigenfalls die erhaltenen Δs auch noch graphisch ausgleichen.

Jedenfalls bietet aber auch die rechnerische Ausgleichung (welche in dieser Form von *Bessel* eingeführt wurde) viele Vorteile; wir wollen eine solche als Beispiel hier vornehmen. Dieses Beispiel bezieht sich nicht auf einen Theodolit, sondern auf den *Repsold'schen* Komparator der K. Normal-Aichungs-Kommission, und wurde von uns im April 1881 bei Gelegenheit der Messungen erhalten, die wir später in § 9. weiter vorführen werden.

Dieses Beispiel kann indessen auch die Schraubenfehler-Ausgleichung für *Theodolit*-Messungen veranschaulichen.

Fig. 1.
Schrauben-Mikroskop.



In Fig. 1. soll t das Intervall einer Teilung bedeuten, welche durch ein Schrauben-Mikroskop gemessen wird. K sei der optische Mittelpunkt des Mikroskop-Objektives, und s sei der Schraubenwert, den man durch Einstellen auf den linken und rechten Strich des Intervalls t findet.

Hat die Schraube keine Fehler, so wird man immer denselben Wert s erhalten, welche Teile der Schraube auch benützt werden (abgesehen von den unregelmässigen Einstellfehlern), wenn dagegen die Schraube selbst Fehler enthält, so werden die Werte s verschieden ausfallen.

Wir bezeichnen allgemein eine Schrauben-Ablesung mit S und wir nehmen an, die zu S gehörige Schrauben Verbesserung lasse sich durch folgende Gleichung darstellen:

$$AS = \varphi(S) = r \sin(A + S) = r \sin A \cos S + r \cos A \sin S \quad (3)$$

Setzt man hier $r \sin A = \alpha$ und $r \cos A = \beta$

$$\text{oder } \tan A = \frac{\alpha}{\beta}, \quad r = \frac{\alpha}{\sin A} = \frac{\beta}{\cos A} \quad (4)$$

so kann man (3) auch in diese Form schreiben:

$$AS = \varphi(S) = \alpha \cos S + \beta \sin S \quad (5)$$

Zur Bestimmung der Konstanten α und β wird nun die Messung von t , entsprechend Fig. 1., an verschiedenen Stellen der Schraube vorgenommen, so dass verschiedene Werte s entstehen.

Wenn S die Anfangsstellung einer solchen Messung, folglich $S + s$ die Endstellung ist, so hat man für die Anfangsstellung die Gleichung (5) und für die Endstellung die zugehörige Gleichung:

$$\varphi(S + s) = \alpha \cos(S + s) + \beta \sin(S + s) \quad (6)$$

Wenn man aus (5) und (6) die Differenz bildet, so erhält man:

$$\varphi(S + s) - \varphi(S) = -2\alpha \sin\left(S + \frac{s}{2}\right) \sin \frac{s}{2} + 2\beta \cos\left(S + \frac{s}{2}\right) \sin \frac{s}{2}$$

$$\text{Wir setzen:} \quad -2\alpha \sin \frac{s}{2} = x, \quad +2\beta \sin \frac{s}{2} = y \quad (7)$$

$$\text{und } S + \frac{s}{2} = \sigma \quad (8)$$

folglich ist die Verbesserung für den Schraubenwert s :

$$\varphi(S + s) - \varphi(S) = x \sin \sigma + y \cos \sigma \quad (9)$$

Es sollen 4 symmetrisch gelegene Beobachtungen von s gemacht werden mit den Ergebnissen s_1, s_2, s_3, s_4 und wir setzen:

$$\frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}{4} = s_0 \quad (10)$$

Dieses ist auch, wie wir nachher sehen werden, der wahrscheinlichste Wert von s überhaupt, indessen wollen wir vorläufig (um die Zahl der Unbekannten sicher zu stellen) den wahrscheinlichsten Wert $= s_0 + \xi$ setzen, und haben* daher durch Vergleichung mit (9), nun die Fehlergleichung:

$$v = (s + x \sin \sigma + y \cos \sigma) - (s_0 + \xi)$$

Wir setzen wie gewöhnlich $s_0 - s = l$ und haben dann in 4 facher Anwendung:

$$\left. \begin{aligned} -v_1 &= \xi - x \sin \sigma_1 - y \cos \sigma_1 + l_1 \\ -v_2 &= \xi - x \sin \sigma_2 - y \cos \sigma_2 + l_2 \\ -v_3 &= \xi - x \sin \sigma_3 - y \cos \sigma_3 + l_3 \\ -v_4 &= \xi - x \sin \sigma_4 - y \cos \sigma_4 + l_4 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Wenn nun aber die 4 Beobachtungen symmetrisch liegen, d. h. wenn die 4 Werte $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ nach (8) je um 90° gegen einander verschoben sind, so wird die Ausgleichung dieser 4 Fehlergleichungen sehr einfach, wie wir schon an einem ähnlichen Beispiel in Band II. § 56. gesehen haben, die Ausgleichung des Systems (11) giebt nämlich in diesem Falle:

$$\xi = 0 \quad x = \frac{[l \sin \sigma]}{2} \quad y = \frac{[l \cos \sigma]}{2} \quad (12)$$

und die Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler wird:

$$[v v] = [l l] - \frac{[l \sin \sigma]^2}{2} - \frac{[l \cos \sigma]^2}{2} \quad (13)$$

Rechnet man ausserdem die einzelnen v und v^2 aus, so erhält man in ihrer Summe eine Rechenprobe.

Der mittlere Fehler einer Bestimmung von s wird, weil 3 Unbekannte ξ, x, y vorhanden sind:

$$m = \sqrt{\frac{[v v]}{4-3}} = \sqrt{[v v]} \quad (14)$$

Aus x und y kann man nach (12) und (7) auch α und β herstellen, nämlich:

$$\alpha = -\frac{[l \sin \sigma]}{4 \sin \frac{s}{2}} \quad \beta = +\frac{[l \cos \sigma]}{4 \sin \frac{s}{2}} \quad (15)$$

und nach (4) kann man auch die ursprünglichen Unbekannten A und r wieder herstellen:

$$\tan A = \frac{-[l \sin \sigma]}{+[l \cos \sigma]} \quad , \quad r = \frac{-[l \sin \sigma]}{4 \sin \frac{s}{2} \sin A} = \frac{+[l \cos \sigma]}{4 \sin \frac{s}{2} \cos A} \quad (16)$$

Bei unseren Messungen am *Repsold'schen* Komparator (Mikroskop I. rechts, mit 25facher Vergrößerung) war ungefähr $s = 4,6239$ Umdrehungen, (und zwar herrührend von der Beobachtung eines Intervalls = 0,2 Pariser Linien = $0,4511658^{mm}$, also 1 Umdrehung = $97,57''$ oder rund 1 Umdrehung = $0,1^{mm} = 100''$).

Da jedoch hier die *ganzen* Umdrehungen nicht in Betracht kommen, rechnen wir mit dem Wert $s = 0,6239$ Umdrehungen oder:

$$s = 0,6239 \text{ Umdrehungen} = 0,6239 \times 360^\circ = 224^\circ 36' \quad (17)$$

Es wurde immer mit 0,00 angefangen, folglich sind nun die Werte σ :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{s}{2} = 112^\circ 18' & \sigma_2 &= \frac{s}{2} + 90^\circ = 202^\circ 18' \\ \sigma_3 &= \frac{s}{2} + 180^\circ = 292^\circ 18' & \sigma_4 &= \frac{s}{2} + 270^\circ = 22^\circ 18' \end{aligned}$$

Ein Messungsversuch am Mikroskop I. (rechts) gab folgendes:

1)	s ₁ = 0,6254	l ₁ = -15	l ₁ ² = 225	
	s ₂ = 0,6311	l ₂ = -72	l ₂ ² = 5184	
	s ₃ = 0,6232	l ₃ = +7	l ₃ ² = 49	
	s ₄ = 0,6158	l ₄ = +81	l ₄ ² = 6561	
Mittel	s ₀ = 0,6239	[l] = +1 soll = 0	[l l] = 12019	(18)

Da $s = 1$ rund $= 100^\mu$, also s_1 nahezu $= 62,54^\mu$ ist, sind die l hier rund in Einheiten von 100^μ oder $0,1^{mm}$ gezählt, oder rund $l_1 = 0,15^\mu$.

Nun rechnet man:

$$\begin{array}{llll} \text{nach (12):} & x = +18,85 & y = +74,955 & (12^*) \\ \text{nach (13):} & [v\ v] = 12\ 019 - 710,6 - 11236,5 = 71,9 & & (13^*) \\ \text{nach (15):} & \alpha = -10,187 & \beta = +40,507 & (14^*) \\ \text{nach (16):} & A = 345^\circ 53' & r = 41,768 & (16^*) \end{array}$$

Man hat also nun nach (3) die Korrektionsformel:

$$\angle S = 41,768 \sin(345^\circ 53' + S) \quad (19)$$

Wenn man hier für S die 4 Anfangswerte 0° , 90° , 180° , 270° und dann die 4 Endwerte $s = 224^\circ 36'$, $90^\circ + s$, $180^\circ + s$, $270^\circ + s$ einsetzt, so bekommt man:

$$\begin{array}{lllll} \text{für die Anfangswerte} & -10,2 & +40,5 & +10,2 & -40,5 & (20) \\ \text{" " Endwerte} & -21,2 & -36,0 & +21,2 & +36,0 \\ \text{Differenzen } \angle S: & -11,0 & -76,5 & +11,0 & +76,5 \\ \text{Beobachtungen (18), } l: & -15 & -72 & +7 & +81 \\ \text{übrig bleibende Fehler } v: & +4,0 & -4,5 & +4,0 & -4,5 \end{array}$$

Die Quadratsumme dieser 4 Werte ist $[v\ v] = 72,5$, was mit (13^*) hinreichend stimmt. Nach dieser Bestätigung rechnen wir den mittleren Fehler einer Messung nach (14):

$$m = \sqrt{72,5} = \pm 8,5 \text{ (nahezu } = 0,085^\mu) \quad (21)$$

Nach der Formel (19) kann man nun eine Korrektionsstafel für das betreffende Mikroskop berechnen, deren 4 Hauptwerte schon in (20) enthalten sind. Indessen reduziert man nun alles auf den Anfang, da es sich doch immer nur um Schrauben-Differenzen handelt. So bekommt man (Mikroskop I, rechts):

Schrauben- Ablesungen	Verbesserung	
	nach (20)	reduziert
0,0000-0	- 10·2	0·0
0,2500-0	+ 40·5	+ 50·7
0,5000-0	+ 10·2	+ 20·4
0,7500-0	- 40·5	- 30·3
1,0000-0	- 10·2	0·0

(22)

In gleicher Weise wurde auch das andere Mikroskop behandelt und dann für beide Mikroskope ausführliche Korrektionsstafeln berechnet. Die später in § 9. mitzuteilenden Mikroskop-Ablesungen sind nach diesen Reduktions-Tabellen reduziert.

Ein sehr feines Beispiel solcher Bestimmung und Ausgleichung periodischer Schraubenfehler ist mitgeteilt in dem Werke: „travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures, tome II, Paris 1883, Seite C 104—C 118“. Es wurden drei Hilfsstriche I, II, III in Abständen von 20^μ und zwei Fäden 1 und 2 im Abstände von 30^μ angewendet. Damit wurde gemessen:

- 1) Faden-Abstand 1—2 $= 30^\mu$ an einem beliebigen Strich,
- 2) Strich-Abstand I—II $= 20^\mu$ mit demselben Faden,
- 3) " " II—III $= 20^\mu$ " " "
- 4) " " I—III $= 40^\mu$ " " "

Alles dieses wurde in den verschiedensten Trommelstellungen sehr oft wiederholt.

Kreisteilungsfehler.

Zu den kurzen Angaben über Teilungsfehler diametraler Strichung von Teilungsfehlern durch Repetition, die schon in unserem II. B. halten sind, können wir hier noch einiges weiteres, was hierüber verhältnismäßig ist, berichten:

General *Schreiber* hat in der Abhandlung „Richtungs-Beobachtungen und Winkelbeobachtungen“ („Zeitschr. f. Verm.“ 1879, S. 118 u. ff.) Teilungs-Untersuchungen mitgeteilt. Er sagt:

Nach den Erfahrungen, die sich auf die Untersuchung verschiedener aus unseren ersten Werkstätten hervorgegangener Teilungen stützen, ist *der unregelmässige Teilungsfehler ein sehr bedeutender Teil des Gesamtfehlers einer unter günstigen Beobachtungen gemachten Beobachtung*. Es fand sich im Mittel aus 16 Instrumenten der Firmen *Pistor und Martins, Repsold u. Söhne, J. Wanschaff, C. Bamberg* folgendes:

Mittlerer Gesamtfehler einer beobachteten Richtung $\tau = \pm 0,78''$

Mittlerer unregelmässiger Teilungsfehler einer beobachteten Richtung $\tau' = \pm 0,50''$

Diese Werte sind aus wirklichen trigonometrischen Gebrauchsmessungen berechnet, und der regelmässige Teil des Teilungsfehlers ist durch einen 8gliedrigen periodischen Ausdruck von τ' abgesondert worden („J. f. V.“ 1879, S. 120).

Ferner ist von General *Schreiber* hier zu zitieren: „Untersuchung von Kreisteilungen mit zwei und vier Mikroskopen“ („Zeitschrift für Instrumentenkunde“, 1886, S. 1—5, S. 47—55, S. 93—104.

Die Untersuchungen sind angestellt mit einem Instrument, welches 1879 besonders zu diesem Zwecke von *J. Wanschaff* konstruiert wurde, dasselbe ist beschrieben und abgebildet in dem „Berichte über die wissenschaftlichen Instrumente auf der Berliner Gewerbe-Ausstellung im Jahre 1879“, herausgegeben von *Löwenherz*, 1880, S. 74 bis 76, und in der „Zeitschr. f. Instrumentenkunde“ 1881, S. 67, wornach unsere Fig. 2. (s. S. 52) als Kopie gemacht wurde.

Das Instrument hat unten einen unbeweglichen Kreis *A* und damit fest verbunden eine Schiene *SS* mit zwei Mikroskopen *M*₁ und *M*₂.

Eine zweite Schiene *T T'* mit zwei Mikroskopen *M*₃ und *M*₄ ist drehbar gegen den Unterlagskreis *A*, so dass die Schienen *SS* und *T T'* unter jedem Winkel gegen einander gestellt werden können.

Auf den beweglichen Kreis *B* kann ein zu untersuchender Teilkreis mit den Unterlagschrauben *F F'* aufgeschraubt werden, und ob der Kreis sich dann beim Umdrehen von *B* richtig in einer Ebene dreht, kann mit dem Fühlhebel *D* untersucht werden.

Die 4 Mikroskope *M*₁ *M*₂ *M*₃ *M*₄ werden nicht mit Tageslicht, sondern mit künstlicher Lampenbeleuchtung *F*₁ *F*₂ *F*₃ *F*₄ abgelesen.

Noch eine Eigentümlichkeit ist zu erwähnen: Man kann zwar die zwei Schienen *SS* und *T T'*, und damit auch die Mikroskop-Ebenen *M*₁ *M*₂ und *M*₃ *M*₄ beliebig gegen einander drehen, doch wäre es nicht möglich, den Winkel zwischen *M*₁ *M*₂ und *M*₃ *M*₄ auch = Null zu machen, wegen der Dicke der Mikroskope, wenn nicht besondere Vorsorge getroffen wäre, darin bestehend, dass zwar die Mikroskope *M*₁ und *M*₂ rechtwinklig zur Kreisebene *B* gerichtet sind, die beiden anderen Mikroskope *M*₃

Änderung von Teilstrichen. Bei dieser Gelegenheit mag auch erwähnt werden, dass man bei den feinsten metronomischen Untersuchungen an Strichmassen Andeutungen gefunden hat, dass die Teilstriche sich mit der Zeit *ändern*. Diese zunächst unglaublich klingende Behauptung kann aber wohl begründet sein, denn die Striche, welche in poliertes Metall gerissen werden, erzeugen in der gleichförmigen molekularen Struktur des Metalls gewissermassen Wunden, welche kleine molekulare Änderungen als Nachwirkung hervorbringen können. Es kommt dabei auch darauf an, ob und wie weit die Risse geglättet („ebarbiert“) werden. Die optische Strichmitte, auf welche man die Fäden einstellt, ist nun jedenfalls abhängig von der Beschaffenheit der Strichränder, und wenn hier kleine Änderungen durch allmähliche Ausgleichung molekularer Spannungen eintreten, so kann die Strichmitte für mikroskopisches Ablesen sich ändern.

§ 7. Normal-Masse.

Ein *Massstab* ist ein Werkzeug zur Ausführung von Längenmessungen. Ein Massstab, welcher diesem Zwecke nicht unmittelbar dient, sondern mittelbar dadurch, dass andere Massstäbe nach ihm reguliert werden, heisst ein *Normal-Massstab*.

Ein Massstab an und für sich genügt noch nicht zur Festsetzung eines Masses, weil der Stab bei verschiedenen Temperaturen verschiedene Länge hat, es muss deswegen noch angegeben werden, bei welcher Temperatur der Massstab die normale Länge hat, und damit der Massstab auch bei anderen Temperaturen brauchbar ist, muss die Ausdehnung bekannt sein.

Die Normal-Temperatur ist bei verschiedenen Massen verschieden; insbesondere haben wir:

beim Metermass	Normal Temperatur	= 0° C = 0° R,
beim alten Pariser Mass	"	= 13° R = 16,25° C,
beim englischen Mass	"	= 62° F 16,67° C = 13,33° R.

Der Ausdehnungs-Coëfficient.

Wenn ein metrischer Stab bei der Temperatur 0° die Länge L_0 hat und bei der Temperatur t° die Länge L_t , so setzt man eine Gleichung fest von der Form:

$$L_t = L_0 (1 + \alpha t) \quad (1)$$

und man nennt α den Ausdehnungs-Coëfficienten des Stabes.

Dieses ist die gewöhnliche Annahme, und wenn für alle Gebrauchs-Temperaturen t , der Coëfficient α denselben Wert hat, so ist hiezu nichts weiteres zu bemerken. Für die feineren Untersuchungen ist aber die Annahme eines *konstanten* α nicht mehr genügend, und man nimmt dann statt (1) eine quadratische Funktion:

$$L_t = L_0 (1 + \alpha t + 2\beta t^2) \text{ oder } L_t = L_0 (1 + (\alpha + 2\beta t) t) \quad (2)$$

Um in solchen Fällen eine unzweideutige Definition zu haben, zitieren wir nach dem Werke: „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures“, Tome II, Seite C. 30 und Tome III, Seite C. 19 folgendes:

Man nennt in Bezug auf die vorstehende Gleichung (2):

$\alpha + 2\beta t$ wahrer Ausdehnungs-Coëfficient bei t°

$\alpha + \beta t$ mittlerer Ausdehnungs-Coëfficient von 0° bis t° .

Als Beispiel nehmen wir aus: „travaux et mémoires“ III, Seite C. 19 für einen Platin-Iridium-Stab, der an und für sich mit L_2 bezeichnet wurde:

$$\begin{array}{rcl} \alpha = 0,000\,008\,594\,6 & \beta = 0,000\,000\,001\,26 \\ \pm & 13\,5 & \pm & 56 \end{array}$$

es ist also der mittlere Ausdehnungs-Coefficient von 0° bis t° :

$$\text{Stab } I_2: \quad \alpha_t = 10^{-9} (8\,594,6 + 1,26\,t) \quad (3)$$

und der wahre Ausdehnungs-Coefficient bei t° :

$$\text{Stab } I_2: \quad \alpha_t = 10^{-9} (8\,594,6 + 2,52\,t) \quad (4)$$

Bei weniger scharfen Messungen lässt man das zweite Glied (mit β) fort, und redet dann von dem Ausdehnungs-Coefficienten α schlechthin, doch muss man denselben für jeden Stab besonders bestimmen, weil verschiedene Stäbe aus demselben Metall oder derselben Legierung doch nicht genau gleiche Ausdehnungen haben, z. B. hat ein anderer in „travaux et mémoires“ III. Seite C. 43 erwähnter Platin-Iridium-Stab, der mit I bezeichnet ist, statt des obigen (3) den Wert:

$$\alpha_{(I)} = 10^{-9} (8\,602,9 + 2,09\,t).$$

Da man aber durchaus nicht immer in der Lage ist, Ausdehnungs-Coefficienten zu bestimmen, nimmt man für viele Zwecke die *Mittelwerte*, welche bereits bestimmt worden sind. Namentlich ist es wichtig, Ausdehnungs-Coefficienten, die einmal angenommen sind, in demselben Falle unverändert beizubehalten, damit wenigstens die *Differenzen* von Ausdehnungen in der Rechnung richtig bleiben.

Die Kaiserl. Normal-Aichungs-Kommission hat in den metronomischen Beiträgen Nr. 1, herausgegeben von Förster, Berlin 1870, Seite 17, folgende Werte angenommen:

Kupfer	Ausdehnungs-Coefficient	$\alpha = 0,000\,017\,17$	}	(5)
Messing	"	0,000 018 86		
Zinn	"	0,000 024 83		
Eisen	"	0,000 011 26		

Aus den „travaux et mémoires“, III. Seite C. 43—C. 44 entnehmen wir folgende Mittelwerte:

Platin-Iridium	Ausdehnungs-Coefficient	$\alpha = 0,000\,008\,573$	}	(6)
Platin	"	0,000 008 898		
Silber	"	0,000 018 340		
Eisen	"	0,000 011 063		
Stahl	"	0,000 010 420		
Glas	"	0,000 008 392		

Einige andere zuweilen in Frage kommende Mittelwerte sind:

Blei	Ausdehnungs-Coefficient	$\alpha = 0,000\,028$	}	(7)
Bronce	"	0,000 018		
Gold	"	0,000 014		
Guss-Eisen	"	0,000 011		
Zink	"	0,000 033		
Tannenholz	"	0,000 004		

Über die „Ausdehnungs-Coefficienten verschiedener Eisen- und Stahlsorten“ giebt Prof. Abt in Klausenburg eine Mitteilung in der „Centralzeitung für Mechanik und Optik“, 1880, S. 141—142, 22 Angaben für schneiges Puddelleisen, Puddelstahl und

Bessemerstahl, geschmiedet, gewalzt, gehärtet und ungehärtet; die Ausdehnungs-Coëfficienten schwanken zwischen 0,000 010 03 und 0,000 011 29.

Endmasse und Strichmasse.

Die Längemasse werden in zwei wesentlich verschiedene Gattungen eingeteilt, die man *Endmasse* und *Strichmasse* nennt.

Ein Endmass bestimmt eine Länge als äussersten Abstand seiner Teile in der Axrichtung.

Ein Strichmass bestimmt eine Länge als Querabstand zweier auf seiner Oberfläche eingerissener Parallelstriche.

Verschiedene Mass-Systeme.

Jedes Einheitsmass ist ursprünglich willkürlich, und deshalb ist die grosse Mannigfaltigkeit der Masse erklärlich. Die älteren Masse sind meist vom menschlichen Körper hergenommen, z. B. der Fuss, die Elle u. s. w. und insofern willkürlich.

Auch das Meter, welches die früheren Masse jetzt fast verdrängt hat, ist ursprünglich willkürlich, und der Umstand, dass 1 Meter nahezu der zehnmillionste Teil des Erdquadranten ist, ist metronomisch gleichgültig.

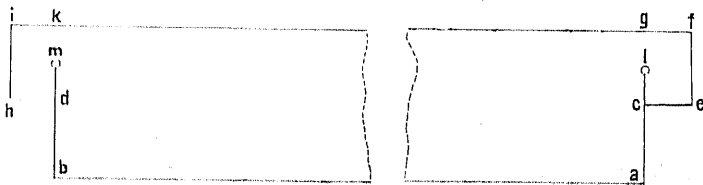
Wir geben in Folgendem einen Abriss der Geschichte der französischen Masse, aus welchen das heutige internationale Metersystem hervorgegangen ist. (zunächst nach Nr. 5. der metronomischen Beiträge, zur Geschichte und Kritik der Toisenmassstäbe, von C. F. W. Peters, herausgegeben von der K. Normal-Messungs-Kommission, Berlin 1885.)

Am Anfang des 18. Jahrhunderts befand sich in Paris am Fuss der Treppe des *Grand Chatelet* als Normalmass für öffentlichen Gebrauch eine eiserne Schiene mit zwei Vorsprüngen, zwischen welche ein Massstab von der Länge einer Toise hindurch geschoben werden konnte.

Etwas um 1735, vor dem Abgang der Gradmessungs-Expedition nach Peru, wurden nach dem rohen Chatelet-Normal zwei feinere Toisen angefertigt in der Form der nachstehenden Fig. 1.

Fig. 1.

Die Peru-Toise (Toise du Pérou).



Die beiden Toisen bestanden aus eisernen Stangen, an den Enden bd und ae hälftig eingeschnitten, so dass $ab = cd$ die Toisenlänge vorstellt. Die eine dieser Stangen, später unter dem Namen „*Toise du Pérou*“ bekannt, hatte auch noch zwei Punkte m und l , deren Abstand als Toise in Wirklichkeit in Peru gedient hat. Die andere Toise, später „*Toise du Nord*“ genannt, sollte ursprünglich als Kontroll-Normal in Paris zurückbleiben, während die erste nach Peru abging, indessen nach dem Ab-

gang der Peru-Expedition entschloss man sich rasch auch zu der Polar-Expedition, welcher man 1736 die zweite Toise mitgab.

Diese kam schon 1737 wieder nach Paris zurück, während die Peru-Toise erst 1748 wieder ankam.

Die Vergleichung gab im Jahr 1752, dass die Peru-Toise um 0,04 Linien länger war, als die nordische; man erklärte das durch Rosten der letzteren bei einer Havarie im bottnischen Meerbusen.

Im Jahre 1766 erschien eine Verfügung des Königs *Ludwig XV*, nach welcher die *Toise du Pérou* an Stelle der *Toise du Chatelet* als Normalmass in Frankreich eingeführt wurde. (1 Toise = 6 Pariser Fuss = 72 Pariser Zoll = 864 Pariser Linien.) Von 1813—1831 wurden verschiedene Kopieen der Toise genommen.

Die Toise kam später in Vergessenheit, und ob die im Jahre 1854 neu gereinigte, jetzt als „Toise du Pérou“ betrachtete Stange wirklich die Stange von 1735 oder nur eine Kopie derselben ist, blieb eine zeitlang zweifelhaft, ist aber jetzt durch die Ermittlungen von *Wolf* in Paris als erwiesen anzusehen. Jedenfalls sind die vorhandenen Kopieen der ursprünglichen Peru-Toise von Wichtigkeit. *C. F. W. Peters* hat 14 solcher Kopieen in Betracht gezogen und durch Zusammenstellung dessen, was über die Vergleichung dieser Stäbe mit der alten Peru-Toise oder der Kopieen unter sich bekannt ist, Endergebnisse gefunden, z. B. diese:

Ursprüngliche Peru-Toise	= 864,00000 Pariser Linien
Dänische Toise, Fortin = <i>D</i>	= 864,00238 „ „
Besselsche Toise = <i>B</i>	= 863,99920 „ „
Dänische Toise <i>Gambey</i> = <i>G</i>	= 863,99493 „ „
Englische Ordnance-Toise = <i>T</i> ²	= 864,06228 „ „

Die Normal-Temperatur des Toisen-Masses ist $13^{\circ} R = 16,25^{\circ} C$; dieses stammt von der Gradmessung in Peru 1735 her, wo die *Mittel*-Temperatur = $13^{\circ} R$ angenommen wurde.

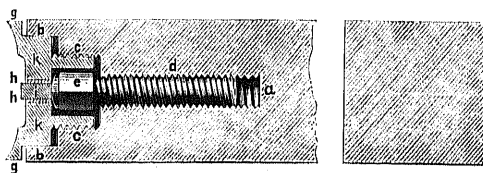
Die *Besselsche* Toise, welche hier mit genannt ist, wurde von *Bessel* dazu benutzt, um ein preussisches Normalmass in einem Stabe von 3 preussischen Fuss herzustellen. Unsere Fig. 2. zeigt die Einzelheiten desselben nach Tafel II des Werkes: „Darstellung der Untersuchungen und Massregeln, welche in den Jahren 1835—1838 durch die Einheit des preussischen Längenmasses veranlasst worden sind, von *P. W. Bessel*, Berlin 1839“.

Fig. 2.

Besselsche Normal-Stange (natürl. Grösse).

Längenschnitt.

Querschnitt.



Erklärungen zu Fig. 2.:

Hauptkörper *b, c, a* von Gussstahl,
e d eingedrehte Eisenschraube,
i Saphir-Kegel,
h Goldbettung,
g k Pressschraube.

Bessel hielt ein Endmass für sicherer als ein Strichmass, indem er die massgebenden Enden möglichst hart machte, nämlich von Saphir (*i* Fig. 2.), und die Verbindung durch Gold vor Rost schützte.

Der Stahlstab hat die Aufschrift:

„Urmass der preussischen Längeneinheit 1837. Dieser Stab, in der Wärme von $16,25^{\circ}$ des hunderttheiligen Thermometers, in seiner Axe gemessen, ist 0,00063 Linien kürzer als drei Fusse.“

Dieser Stab wurde durch das Gesetz vom 10. März 1839 als preussisches Urmass bestimmt.

Die Temperatur-Ausdehnung des Normalmasses fand *Bessel* = 0,004375 preuss. Linien für 1° C., oder da der Stab 432 preuss. Linien lang ist, Ausdehnung = 0,000010127 der Länge für 1° C.

Der preussische Fuss selbst ist dadurch = 139,13 Pariser Linien bestimmt.

Ausser der schon oben genannten „Darstellung“ u. s. w. sind hier noch weitere *Bessels*che Schriften zu zitieren:

„Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels“, Berlin 1828, S. 126. „Gradmessung in Ostpreussen“, S. 22. „Populäre Vorlesungen über wissenschaftliche Gegenstände“, Hamburg 1848, S. 307—325.

Nach dieser Abschweifung, betreffend das preussische Normalmass von 1837, kehren wir zur Geschichte des Toisen- und Metermasses zurück:

Das neue französische Masssystem vom Jahr 1791 bestimmte als Einheit das Meter, welches möglichst genau der zehnmillionste Teil des Erdmeridian-Quadranten sein sollte.

Das Dekret, welches den von der Akademie vorgeschlagenen Plan annahm, ist vom 26. März 1791 und die Genehmigung erfolgte 4 Tage nachher („*Delambre*, Base du système métrique“ I. S. 19).

Nach vorübergehender Anwendung eines provisorischen Meters von 443,44 Par. Linien wurde auf Grund der *Delambre*schen Gradmessung das „wahre und definitive“ Meter (mètre vrai et définitif) = 443,296 Pariser Linien festgesetzt. Die Normaltemperatur für das Meternmass wurde anders gewählt, als bei dem alten Pariser Mass. Während nämlich letzteres die Normaltemperatur 13° R. = $16,25^{\circ}$ C. hat, ist die Normaltemperatur des Meternmasses = 0° R. = 0° C., d. h. gleich der Temperatur des schmelzenden Eises.

Demzufolge wurde ein Platinstab hergestellt, dessen Länge bei 0° ist = $\frac{443,296}{864}$

derjenigen Länge, welche die Peru-Toise bei 13° R. hat. (Base du système métrique Band III. S. 622.) Der genannte Platinstab, dessen Querschnitt (Fig. 3.) ein Rechteck von 25^{mm} Breite und 4^{mm} Höhe ist, befindet sich noch in Paris, er heisst gewöhnlich „mètre des archives“.

Fig. 3.

Querschnitt des „mètre des archives“ in natürlicher Grösse.



Obgleich hiernach das Meternmass längst sicher gestellt zu sein scheint, so sind doch erst in neuerer Zeit die nötigen Vorkehrungen zu einer befriedigenden Sicherstellung desselben in Angriff genommen worden. Das französische Urplatinmeter (mètre des archives) entspricht nämlich in mehrfacher Beziehung nicht den heutigen wissenschaftlichen Anforderungen.

Um die damit verbundenen Übelstände zu heben, versammelte sich im Sommer 1870 eine internationale Kommission, welche jedoch wegen des Krieges zu keinen Resultaten kam. Die Kommission ist zum zweitenmale im Herbst 1872 in Paris zu-

sammengetreten, jedoch erst im Jahr 1875 kamen die Verhandlungen zum Abschluss. Dieselben haben eine internationale Meter-Konvention ergeben, woran sich allmählich fast alle Kulturstaaten der Erde angeschlossen haben.

Der Wortlaut der Konvention ist mitgeteilt in dem Deutschen Reichsgesetzblatt Nr. 19 vom 5. Sept. 1876, S. 191—212, derselbe ist abgedruckt in der „Zeitschr. f. Vermessungswesen“ 1877, S. 280—290. Die neuesten Bestimmungen für das metrische Masssystem in Deutschland sind enthalten in dem Gesetze vom 11. Juli 1884 (Reichsgesetzblatt 1884, Nr. 20).

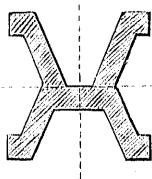
Die Verhandlungen der internationalen Kommission, welche vom 24. Sept. bis 12. Okt. 1872 in Paris stattfanden, sind mitgeteilt in den „Annales du conservatoire des arts et métiers“, Nr. 37, Tome X, 1^{er} fascicule. Paris 1873. Wir entnehmen hieraus folgendes:

Es sollen 30 Meterstäbe hergestellt werden, welche möglichst gleich dem Pariser Archiv-Meter zu machen und unter sich zu vergleichen sind, worauf sie unter die beteiligten Staaten verteilt werden, und künftig die Grundlage aller Massvergleichen bilden werden.

Als Material für diese Normalmeter ist eine *Legierung* von 90% Platin mit 10% Iridium gewählt. Das aus reinem Platin bestehende *mètre des archives* hat eine sehr poröse Struktur, dagegen hat die erwähnte Legierung von Platin und Iridium folgende Vorzüge: 1) Diese beiden Metalle krystallisieren in demselben System, nämlich dem regulären, und haben die gleiche Dichte 21,15. 2) Die Legierung hat noch nahezu dieselbe Dichte wie die einzelnen Metalle, wodurch eine innige Verbindung gesichert ist. 3) Von allen Metallen (mit Ausnahme des hier nicht in Betracht kommenden Arsen und Osmium) haben Platin und Iridium die geringste Ausdehnung durch die Wärme, nämlich etwa 0,000009 für 1° C.

Fig. 4.

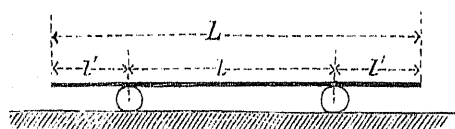
Querschnitt der internationalen Platin-Iridium-Meterstäbe, natürliche Grösse.



Die Stäbe werden prismatisch hergestellt mit einem in Fig. 4. in natürlicher Grösse gezeichneten Querschnittsprofil. Die Wahl dieses Profils ist das Ergebnis vieler Erwägungen, es fand sich nämlich für dasselbe das günstigste Verhältnis des Trägheitsmomentes zur Profillfläche, oder es hat der so konstruierte Stab die grösste Tragfähigkeit bei kleinstem Volumen. (Das fragliche Verhältnis ist 26mal günstiger als bei dem *mètre des archives*, Fig. 3.). Das gewählte Profil (Fig. 4.) hat noch einen Vorzug, es liegt nämlich die obere Fläche der Querverbindung (in Fig. 4. durch eine punktierte horizontale Linie hervorgehoben) in der neutralen Axe des Körpers, so dass bei eintretender Biegung keine Verlängerung oder Verkürzung in dieser Fläche stattfindet, insoweit es sich dabei um die mit den Biegungen verbundenen Drehungen des Querschnitts handelt. Die genannte Oberfläche ist zur Aufnahme der Striche bestimmt, welche zur Massbezeichnung dienen sollen.

Fig. 5.

Rollen-Unterlage der internationalen Massstäbe.



Die Unterlage der neuen Normalmeter soll nicht eine kontinuierliche sein, sondern aus zwei Rollen bestehen, damit der Temperatur-Ausdehnung keinerlei Hindernis bereitet wird. Allerdings findet bei dem Auflager auf zwei Rollen ein Einschlagen

durch das Eigengewicht des Stabes statt, doch ist dasselbe sehr klein. Die Verteilung der Stützen ist am günstigsten, wenn (entsprechend Fig. 5. S. 58) die Beziehung stattfindet:

$$l' = 0,394 l \text{ oder } l = 0,559 L$$

Wenn diese Verhältnisse eingehalten werden, so beträgt für das in Fig. 4. bezeichnete Profil die Einschlagtiefe nur $0,00863^{mm}$ und die entsprechende Verkürzung des Stabes nur $0,000\,000\,4^{mm}$.

Über die Frage, wie weit diese Einrichtungen fortgeschritten sind, kann man eine Antwort entnehmen aus *Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures*, tome III. Paris 1884, Seite C. 13: D'après le résultat de ces comparaisons (1881—1882) et sur le Rapport de sa Commission, le Comité international décide, dans sa séance du 4 octobre 1882 (Procès-verbaux, 1882, p. 72), que „j'usqu'à l'époque du sanctionnement des nouveaux prototypes métriques, on adopterait pour les travaux du Bureau international des Poids et Mesures, comme unité de longueur, la distance comprise, à 0° , entre les traits délimitatifs de l'étalon I_2 , diminuée de six microns“. Nous admettrons donc

$$I_{2(n)} = 1^m + 6,00^\mu$$

et cette équation servira de point de départ pour la détermination de toutes nos longueurs.

Dieses ist derselbe Platin-Iridium-Stab I_2 mit dem Profil Fig. 4., den wir schon oben (3) und (4) S. 54 beispielshalber angeführt haben.

Nach dem neuesten Stande der Arbeiten (Anfang 1889) ist die definitive Sanktionierung der Prototype, sowohl des internationalen Meters, welcher die letzte gemeinsame Instanz bilden wird, als seiner Kopieen, in kurzer Frist zu erwarten.

§ 8. Komparatoren.

Ein Komparator ist ein Apparat zur Vergleichung zweier Längenmasse. Entsprechend der Einteilung der Längenmasse in Endmasse und Strichmasse hat man verschiedene Komparatoren.

Ein Komparator für Strichmasse, welcher aber zugleich auch zur Vergleichung von Endmassen eingerichtet werden kann, ist in Fig. 1. und Fig. 2. S. 61, gezeichnet. Derselbe ist von Mechaniker *Reichel* in Berlin konstruiert, und gehört dem Gr. bad. Oberaichungsamt Karlsruhe. (Mit ähnlichen Komparatoren sind alle deutschen Oberaichungsämter ausgerüstet.)

Fig. 1. zeigt den eigentlichen Komparator in Längs- und Queransicht.

Auf der hölzernen Unterlage $AA\ BB$ erheben sich zwei eiserne Säulen CC , welche eine gut gehobelte eiserne Schiene von \perp förmigem Querschnitt tragen. Auf dieser Schiene gleiten vermittelt zweier Schlitten die zwei Mikroskope EE . Das Fadennetz des einen (rechtseitigen) Mikroskops ist nicht fest, sondern vermittelt einer Mikrometerschraube F beweglich. Dieses Mikroskop hat im wesentlichen dieselbe Einrichtung wie die bekannten Theodolit-Mikroskope.

Auf dem hölzernen Untergestell sind ferner zwei tischartige eiserne Platten GG aufgesetzt, und zwar mit Zwischenlage je zweier horizontaler Cylinder KK , welche um *excentrische* Axen drehbar sind, und dadurch die Tischplatten GG innerhalb eines Spielraums von $1\text{--}2^{cm}$ zu heben oder senken gestatten. Dieses Heben oder Senken

ist notwendig, damit die Oberflächen der Massstäbe JJ' , welche verglichen werden sollen, immer in die deutliche Sehweite der Mikroskope gebracht werden können. Zwischen JJ' und GG sind noch Unterlagsplatten HH angebracht.

Vergleichung zweier Strich-Masse.

Wenn es sich um Vergleichung zweier *Strich-Masse* JJ' handelt, so werden dieselben in der beschriebenen Weise neben einander aufgelegt, so dass ihre Oberflächen in eine Ebene zusammenfallen, und zusammen mittelst der Mikroskope beobachtet werden können. Da die Unterlagsplatten HH mittelst besonderer Schrauben der Länge nach etwas Spielraum haben, kann man es dahin bringen, dass man mit dem einen (etwa dem linkseitigen) Mikroskop die zusammenfallenden Nullstriche beider Strichmasse zwischen den Mikroskopfäden sieht. Dann hat man zum Zweck der Vergleichung nur noch das andere (rechtseitige) Mikroskop auf die Endstriche der beiden Strichmasse einzustellen, und dabei den Abstand dieser beiden Endstriche mit der Mikrometerschraube zu messen.

Hiebei ist also vorausgesetzt, dass die einander entsprechenden Striche der zu vergleichenden Massstäbe *gleichzeitig* in das Gesichtsfeld der Mikroskope gebracht werden können, und dieses ist deswegen gewöhnlich thunlich, weil die Striche auf die eine Kante ausmündend gezogen sind.

Vergleichung eines Strich-Masses mit einem End-Mass.

Mit Hilfe der besonderen Einrichtung, welche in Fig. 2. in 4mal grösserem Massstab als Fig. 1. gezeichnet ist, kann man auch Strichmasse und Endmasse vergleichen.

Das zu vergleichende Endmass wird hiebei ganz in der vorher beschriebenen Weise behandelt, es ist J oder J' , und liegt auf einer der beiden Platten H . Die andere Platte H wird weggenommen, und statt derselben werden nun die in Fig. 2. links und rechts gezeichneten Anschlag-Cylinder aufgeschraubt.

Diese Cylinder a' und a'' stecken in Hülzen a und haben infolge von eingelegeten Federn das Bestreben, in der Richtung gegen einander aus den Hülzen hervorzutreten, d. h. sie drücken beiderseits gegen das Endmass bb , welches in Fig. 2. dazwischen gelegt ist.

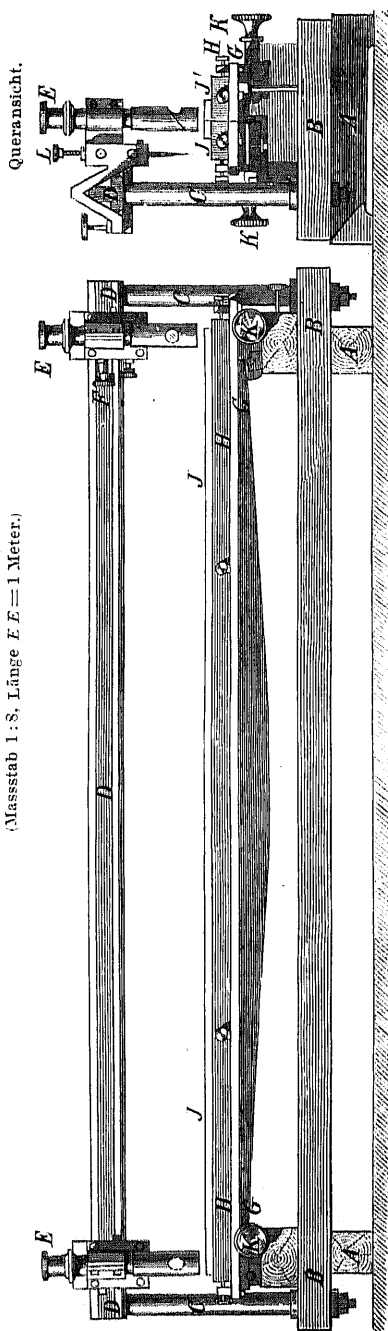
Wenn b in horizontale Schnitten endigt, so wird man a'' in eine vertikale Schneide oder a' in eine Rundung endigen lassen u. s. w.; für die Betrachtung der Wirkungsweise des Apparates ist diese Unterscheidung unwesentlich.

Auf den Cylindern a' und a'' sind Platten c aufgesetzt, welche nach vorn vorgebogen und mit feinen Strichen d und d' versehen sind. (Die auf der anderen Seite befindlichen Schrauben e dienen zur Höhenregulierung für die Striche d .)

Man denke sich nun die Cylinder a' und a'' auf der einen Tischplatte ϵ befestigt, und ein Endmass bb zwischen die Cylinder-Enden a' und a'' eingelegt. Auf der anderen Tischplatte G (bzw. auf der Zwischenplatte H) liegt ein *Strich-Massstab* J , und man bringt es nun dahin, dass die Indexstriche d und d' der Cylinder an der Kante des Strichmasses anliegen und gleichzeitig mit den benachbarten Strichen des Strichmasses in den Mikroskopen erscheinen. Man behandelt dann die Striche d und d' wie die Anfangs- und Endstriche eines Strichmasses und macht die Strichmass-Vergleichung in der früher angegebenen Weise.

Es handelt sich noch darum, die Länge dd' auf die Länge $\alpha\alpha'$ zwischen den

Fig. 1.
Komparator des (r. Ober-Aichungs-Amtes Karlsruhe (von 'Mechaniker Reichel in Berlin).
(Massstab 1:8, Länge $E E = 1$ Meter.)

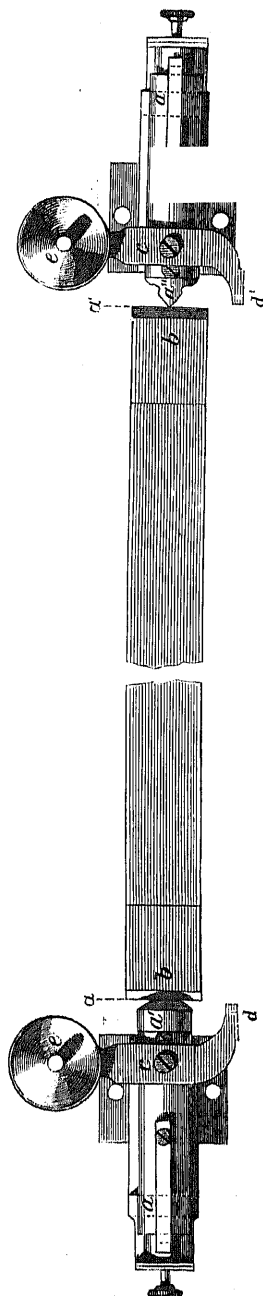


Quersicht.

Fig. 2.
Besondere Einrichtung zum gegenseitigen Vergleichen von Strichmassen und Endmassen.
(Massstab 1:2, 4 fach von Fig. 1.)

Anschlag-Cylinder $a a'$

Anschlag-Cylinder $a'' a$

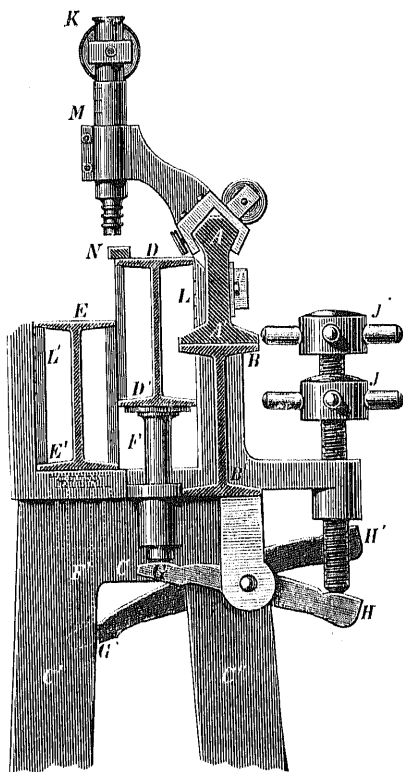


Enden der Anschlag-Cylinder zu reduzieren, und dieses geschieht dadurch, dass man nach Entfernung des Massstabes bb den einen Cylinder abnimmt und ihn unmittelbar an den anderen Cylinder anstossend wieder befestigt. Es stoßen dann die Cylinder-Enden α und α' zusammen, während die Indexstriche d und d' einen kleinen Zwischenraum zwischen sich lassen, den man misst und an der vorhergehenden Vergleichung in Rechnung bringt.

Einige andere, zum Teil sehr sinnreiche und doch einfache Verfahren zur gegenseitigen Vergleichung von Endmassen und Strichmassen berichtet „Zachariae, Die geodätischen Hauptpunkte“, deutsch von *Lamp*, Berlin 1878, S. 96—98.

Komparator für hölzerne Latten.

Fig. 3.
Latten-Komparator.
Querschnitt, Massstab 1:6.



(Karlsh. u. Hannov. Sammlung,
Mechaniker Siekler.)

genähert der Fall ist, so kann man bereits Vergleichen machen, weil kleine Neigungen der Mikroskop-Axen bei den immer nahezu gleichen Höhen-Einstellungen wenig ausmachen.

Im wesentlichen nach demselben Grundgedanken wie der vorher beschriebene aichamtliche Meter-Komparator, jedoch länger und stärker, ist der Komparator für Nivellierlatten und ähnliche Massstäbe, dessen Querschnitt in Fig. 3. gezeichnet ist.

Der Hauptteil ist eine Eisenschiene AA' (aus einer Eisenbahnschiene hergestellt), 3,5^m lang und mit einer durchlaufenden Millimeterteilung versehen. DI' und EE' sind zwei Träger, welche durch die auf der anderen Seite angebrachten Schrauben J und J' durch Hebel HG und $H'G'$ der Höhe nach gestellt werden können.

N ist ein aufgelegter Massstab, der durch das Mikroskop M verglichen wird.

Weiteres hierüber haben wir früher in der „Zeitschrift für Instrumentenkunde“, 1881, S. 41—47 mitgeteilt.

Normalstellung der Mikroskop-Axen.

Wenn man bei einem Längen-Komparator der bisher beschriebenen Art die Laufschiene der Mikroskope und die Unterlagsplatten mit Libellen gut horizontal stellt, so ist nur noch die Frage zu beantworten, ob die Mikroskop-Axen vertikal sind. Wenn letzteres nur wenigstens

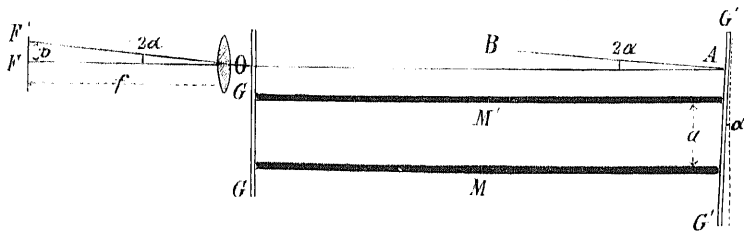
Um jedoch die Mikroskop-Axen genau vertikal zu stellen, hat man das Mittel des Quecksilber-Horizontes; man stellt nämlich unter ein Mikroskop ein Gefäß mit Quecksilber und beobachtet darin das Spiegelbild der Fäden, welches sich mit den Fäden selbst decken soll. Jedoch muss man dazu die Fäden *beleuchten*; das geschieht durch einen kleinen seitwärts angebrachten Spiegel, den wir aus anderer Veranlassung beschrieben haben in „Grundzüge der astr. Zeit- und Ortsbestimmung“, Berlin 1885, S. 225.

Eine andere Untersuchung über Mikroskop-Axen-Neigung u. s. w. giebt unser nachfolgender § 9. Auch ist hier zu zitieren: „Weinstein, Handbuch der physikalischen Massbestimmung“, II. Band, Berlin 1888, S. 72–89.

Fühlspiegel-Komparator von Steinheil.

Ein anderes Prinzip der Massvergleichung, für *Endmasse* geeignet, ist das des Fühlspiegels, von dem wir in Fig. 4. wenigstens den Grundgedanken darstellen (nach einem Berichte von *Steinheil* in dem „Gen.-Ber. d. Europ. Gradm. für 1869“, S. 76 bis 80 und „*Tinter*, Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Vereins“, 1871, S. 40, und „Publ. des geod. Instituts. Massvergleichungen“, II. 1876).

Fig. 4.

Fühlspiegel-Komparator von *Steinheil*.

In Fig. 4. sind M und M' zwei Endmasse, welche verglichen werden sollen. Dieselben befinden sich in paralleler Lage im Abstand a , und stoßen links mit ihren Enden gegen eine ebene Glasplatte GG an. Wenn diese Masse M und M' gleich lang sind, so wird eine zweite Glasplatte $G'G'$, welche gegen die anderen Enden (rechts) gedrückt wird, mit der ersten Platte GG parallel sein; andernfalls machen die Platten GG und $G'G'$ einen kleinen Winkel α , entsprechen der Gleichung:

$$\sin \alpha = \frac{M' - M}{a}$$

Nun hat man ein Fernrohr $F'O$, rechtwinklig zur Glasplatte GG gerichtet; und wenn $G'G'$ parallel GG ist, so wird $F'O A$ mit $F'O$ gemeinsam nach F' reflektiert. Wenn dagegen der erwähnte kleine Winkel α vorhanden ist, so bekommt man zwei Reflexionspunkte F und F' , deren Abstand $v = 2f \sin \alpha$ ist, also in Verbindung mit der ersten Gleichung:

$$M' - M = \frac{a v}{2 f}$$

Insofern a erheblich kleiner ist als f , giebt ein Fehler an v einen entsprechend kleinen Einfluss auf die Massvergleichung $M' - M$.

Man hat die Fühlspiegel-Vergleichung von Endmassen früher namentlich deswegen gewählt, weil man dabei die Stäbe in einer *Flüssigkeit* vergleichen kann, was

das beste Mittel zur sicheren und gleichmässigen Temperatur-Bestimmung ist; indessen in neuer Zeit macht man auch mikroskopische Strich-Vergleichungen in der Flüssigkeit, wie aus dem Nachfolgenden zu ersehen ist.

Mass-Vergleichungen des internationalen Mass- und Gewichts-Bureaus.

Zum Abschluss unserer Betrachtungen über Massvergleiche wollen wir noch einen Auszug vorführen aus dem Werke: „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures“, Tome II, Paris 1883, Seite C 3 — C 147, und Tome III, 1884, Seite C 3 u. ff. mesures de dilatation et comparaisons des règles métriques.

1. Verfahren im Allgemeinen.

Die Messungen der Ausdehnungen der metrischen Strichmasse wurden nach dem von dem schwedischen General *Wrede*, Mitglied des internationalen Mass- und Gewichts-Bureaus angegebenen Verfahren ausgeführt, welches im wesentlichen in der aufeinander folgenden Vergleichung zweier Stäbe besteht, welche nach einander unter die Objektive zweier vertikaler im Abstand von 1^m befestigter Mikrometer-Mikroskope gebracht werden. Die Messungen werden wie bei gewöhnlichen Vergleichungen zweier Meter gemacht, mit dem einzigen Unterschied, dass jeder der Stäbe in einen besonderen Trog mit Flüssigkeit eingeschlossen ist, und dass die Stäbe hierin im allgemeinen verschiedene Temperaturen haben, welche nach Umständen reguliert werden können. Auch kann die Temperatur des einen Stabes während der Dauer der Vergleichungen konstant erhalten werden, und man erhält dadurch die Ausdehnung des anderen Stabes unmittelbar. Der Vorteil der Methode besteht darin, dass ihre Ergebnisse unabhängig von dem absoluten Abstand der Mikroskop-Axen sind, dieser Abstand braucht nur während der kurzen Zeit des Übergangs von einem Stab zum anderen als konstant oder während abwechselnden Übergangs als gleichförmig veränderlich angenommen zu werden.

Der Vergleich-Apparat besteht hiernach im wesentlichen aus zwei fest aufgestellten Mikroskopen und einer zwischen beiden befindlichen Schienen-Wagen-Einrichtung, mittelst welcher die in Tröge eingeschlossenen Meterstäbe rasch unter die Mikroskope geschoben werden können.

2. (C. 4.) Der *Komparator* besteht aus zwei Mikroskopen, welche auf Steinpfeilern im Abstand von 1^m gut fundiert sind; dazwischen bewegt sich ein Wagen auf Schienen, welcher die Vergleichs-Stäbe mit ihren Trögen unter die Mikroskope bringt.

3. (C. 12) *Richtigstellung aller Teile.*

4. (C. 13) *Die Mikroskope.* Objektiv von 36^{mm} Brennweite, Ganghöhe der Schraube = 0,75^{mm}, 1 Umdrehung giebt 0,1^{mm}, die Trommel ist in 100 Teile geteilt, giebt also sehr nahe 0,001^{mm} = 1^μ, Gesichtsfeld = 1,1^{mm}, Okular *Ramsden*, Vergrösserung 90 bis 95fach.

5. (C. 14) *Neben-Apparate* zur Regulierung der Temperatur in den Trögen mit Hilfe von Wasser-Zirkulation.

6. (C. 16 und Tome III C. 11.) Als *Flüssigkeit* wurde zuerst Glycerin genommen, aber wieder aufgegeben, weil die Klebrigkeit sich als Hindernis gleichförmiger Temperatur-Verteilung zeigte; ähnlich verhält es sich mit vegetabilischen Ölen. Petroleum stört durch die gesundheitsschädlichen Dämpfe. Reines Wasser wurde schliesslich ausreichend gefunden für Platin, Messing und Bronze, dagegen für Eisenstäbe wurde als nicht angreifende Flüssigkeit nach verschiedenen Versuchen, gesättigte Borax-Lösung genommen.

Die Stäbe sind in der Regel 25^{mm} tief in die Flüssigkeit eingetaucht, und die mikrometrische Messung durch eine 25^{mm} tiefe Flüssigkeits-Schichte geschieht nahezu mit derselben Genauigkeit wie durch Luft.

7. (C. 20 und Tome III C. 6) *Künstliche Beleuchtung* in der Axe der Mikroskope, durch einen Spiegel unter 45°.

8. (C. 26) *Einstellen auf deutliche Schneite*, nach *Försters* Theorie (vgl. unseren nachfolgenden § 9 „mise au foyer“ u. s. w.).

9. (C. 30) *Ausdehnungs-Coefficienten* (vgl. unseren früheren § 7. S. 53—54).
 10. u. ff. (C. 30) *Thermometer* und (C. 62) *Barometer*.
 30. (C. 104 und Tome III. C. 7.) *Periodische Schraubenfehler* (vgl. unseren früheren § 6. S. 48—50).
 31. (C. 118 und Tome V. Seite 47) *Fortschreitende Schraubenfehler*.

§ 9. Bestimmung der Neigung der Mikroskop-Axen.

Als Abschluss der vorstehenden Mitteilungen von § 8. über Komparatoren, bringen wir hier noch eine feinere Untersuchung, welche vom Verfasser im April 1881 nach dem Vorschlage des Herrn Geheimen Regierungsrats *Foerster* an dem grossen *Repsold'schen* Komparator der Kaiserlichen Normal-Aichungs-Kommission in Berlin an- gestellt wurde.

Diese auf die Bestimmung der Mikroskop-Axen-Neigungen abzielende Untersuchung bietet über dieses Ziel hinaus gehendes Interesse, weil die Art der Bestimmung in Beziehung steht zu der in der Mikrometrie wichtigen Frage, ob die Mikrometer-Ebene (Fadenmetz-Ebene) genau mit der Bild-Ebene des Mikroskops zusammenfällt, und welche Änderungen entstehen, wenn dieses nicht genau der Fall ist.

Hiermit beschäftigt sich eine Abhandlung:

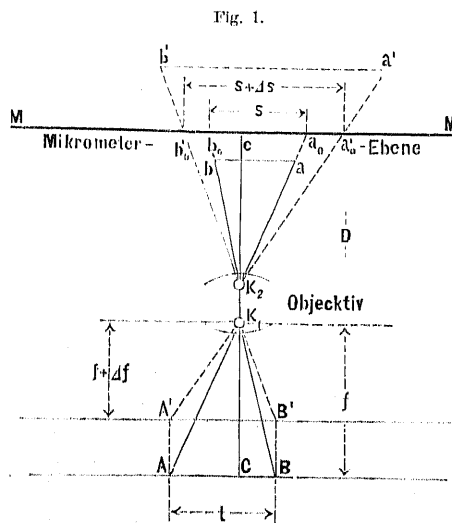
„Note sur l'influence de la mise au foyer et de l'inclinaison des microscopes sur les mesures micrométriques; par *M. W. Foerster*, extrait des procès-verbaux du Comité international des Poids et Mesures, séances de 1877. Paris 1878.“

Wir geben zunächst eine nahezu wörtliche Übersetzung des ersten Teiles dieser Abhandlung:

Das Mikroskop ist in unserer Fig. 1. vorgestellt durch die Haupt- und Knotenpunkte K_1 und K_2 seines Objektivs und durch die Mitte c seiner Mikrometer-Ebene MM . Die Punkte K_1 und K_2 sind die zwei Scheitelpunkte des dioptrischen Systems, welche in vielen Fällen ohne merklichen Fehler in einen gemeinschaftlichen Punkt, den „optischen Mittelpunkt“ zusammenfallen, welche aber bei schärferer Behandlung auseinander zu halten sind.

Der Einfachheit wegen haben wir die Mitte c des mikrometrischen Netzes (Fadenkreuz oder Nullpunkt des Mikrometers) in die optische Axe $K_1 K_2$ des Mikroskops gebracht, und zunächst angenommen, dass die Richtung dieser optischen Axe normal zu einem linearen Intervall t ist, welches in den beiden Lagen AB und $A'B'$ zur mikrometrischen Messung vorgelegt ist.

In der ersten Lage AB habe man die dioptrischen Bilder ab und in der zweiten Lage $A'B'$ habe man entsprechend $a'b'$; und es handelt sich darum, für jeden dieser



4 Punkte seinen mikrometrischen Ort zu bestimmen, d. h. denjenigen Punkt des mikrometrischen Netzes MM , welcher mit dem Bilde von A , B u. s. w. in Deckung gesehen wird.

Die nachfolgende Betrachtung zeigt, dass der mikrometrische Ort, z. B. für den Punkt A , der Schnittpunkt a_0 des Hauptstrahls $K_2 a$ mit der Mikrometer-Ebene MM ist, d. h.:

$$\left. \begin{aligned} t = AB & \text{ hat das mikrometrische Intervall } a_0 b_0 = s \\ t = A'B' & \text{ „ „ „ „ } a_0' b_0' = s + \Delta s \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Man giebt sich hievon leicht Rechenschaft, wenn man annehmen kann, dass nur sehr dünne Lichtkegel vorhanden sind, oder wenn man zum Grenzfall übergehend, die Lichtkegel auf ihre Axen AK_1 , $K_2 a$ u. s. w. reduziert, so dass dann allerdings a_0 auf der Geraden $K_2 a$ liegen muss u. s. w.

Für *breitere* Lichtkegel, entsprechend der mehr oder weniger weiten Objektiv-Öffnung des Mikroskops wird die Frage, an welcher Stelle der Mikrometer-Ebene MM z. B. der Bildpunkt a_0 des Punktes A zu suchen ist, etwas schwieriger zu beantworten sein, wegen der sogenannten Parallaxe der Bilder.

Es wird z. B. das mikroskopische Bild des Lichtpunktes A , welches auf der Netzhaut mittelst eines ziemlich weiten Lichtkegels entsteht, *nicht* gleichzeitig stigmatisch sein mit dem Bilde seines mikrometrischen Ortes, d. h. mit dem Punkte a_0 .

Bei einer Okularstellung, welche ein scharfes, stigmatisches Bild von a_0 giebt, wird A nicht mehr als ein Punkt, sondern als eine kleine runde Lichtfläche erscheinen, deren Intensitäts-Centrum sich ändert, wenn das Auge sich quer zur Axe $K_2 a$ verschiebt, so dass Teile des Lichtkegels für die Netzhaut verloren gehen.

Indessen bei mässigen Verschiebungen AA' kann man hievon absehen, und, vorbehaltlich der nachfolgenden Bestätigung durch Messungsversuche, nehmen wir nun an, dass die mikrometrischen Intervalle die Werte s und $s + \Delta s$ haben, welche bereits oben bei (1) angegeben und in Fig. 1. eingeschrieben sind.

Nimmt man dann noch die ebenfalls in Fig. 1. eingeschriebenen Masse D und f , nebst $f + \Delta f$ hinzu, so hat man die einfachen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{s}{t} &= \frac{D}{f} & \frac{s + \Delta s}{t} &= \frac{D}{f + \Delta f} \\ \frac{s + \Delta s}{s} &= \frac{f}{f + \Delta f} \\ 1 + \frac{\Delta s}{s} &= \frac{f}{1 + \frac{\Delta f}{f}} = 1 - \frac{\Delta f}{f} + \dots \\ \frac{\Delta s}{s} &= - \frac{\Delta f}{f} \end{aligned} \quad (2)$$

Übergehend zur Bestätigung dieser Formel durch Messungsversuche, führen wir von den verschiedenen Zahlenreihen der Försterschen Abhandlung nur *eine* übersichtliche vor:

Es wurde ein Intervalle t von rund $0,4^{mm}$ zweimal mit verschiedenen Abständen f gemessen; die Schraubenwerte s sind sehr nahe in Einheiten von $1''$ angegeben, weshalb wir sie der Übersicht wegen als solche Werte hersetzen:

Die Höhen-Änderung Δf wurde durch eine Libelle bestimmt.

Erste Reihe		Zweite Reihe	
mit $f = 51,500^{mm}$		mit $f = 51,300^{mm}$, also $\Delta f = -0,200^{mm}$	
	396,5 μ		398,3 μ
	395,1		398,3
	396,3		398,1
	396,0		397,8
	396,6		397,6
Mittel	396,10 μ		398,02 μ
Periodische Korrektion der Schraube	+ 0,15		- 0,10
	$s = 396,25\mu$		$s + \Delta s = 397,92\mu$, $\Delta s = +1,67\mu$

Die Rechnung nach der Formel (2) giebt:

$$\Delta s = -\frac{\Delta f}{f} s = +\frac{0,200}{51,4} 397\mu = +1,54\mu$$

Diese Übereinstimmung 1,54 μ und 1,67 μ zwischen Rechnung und Beobachtung ist befriedigend.

Nach dieser Vorbereitung gehen wir über zur

Bestimmung der Neigungen der Mikroskop-Axen.

Im Anschluss an die schematische Figur 2. S. 68 und mit Rücksicht auf die frühere Komparator-Zeichnung Fig. 1. S. 61 beschreiben wir die Anordnung von Massvergleichungen mit dem Nebenzweck der Ermittlung der Axenneigungen der Mikroskope.

$B_1 B_2$ ist die horizontale Eisenschiene, auf welcher die Mikroskope während einer Vergleichung befestigt sind. Die Mikroskop-Axen, d. h. hier die durch den Nullpunkt ihrer Mikrometer und die optischen Mittelpunkte der Objektive gehenden Richtungen, seien rechts $E_1 E_1'$ und links $E_2 E_2'$, diese Axen sollten vertikal sein, machen aber kleine Winkel ε_1 und ε_2 mit den wahren durch die Objektivmitten gehenden Vertikalen.

Weiter unten, im lotrechten Abstand f von den Objektivmitten, befindet sich die Tischebene $G_1 G_2$, auf welcher ein zur Vergleichung bestimmter Massstab M aufgelegt ist. Die richtige Lage von $G_1 G_2$ ist die Horizontale, man kann aber die Unterstüztungen bei G_1 und G_2 heben und senken, und dadurch z. B. einem zweiten zur Vergleichung bestimmten Massstabe M' eine etwas gehobene und auch geneigte Lage geben, wie durch die beiden Höhen h_1 und h_2 angedeutet ist.

Für die Endstriche der Stäbe M und M' seien die Mikroskop-Ablesungen an dem rechten Ende, nach Andeutung von Fig. 2. bzw. s und s' ; wenn jedoch der Stab M' nicht gehoben wäre, würde man eine andere Ablesung $s' - \Delta s'$ machen und nach der im vorstehenden mitgetheilten Foersterschen Abhandlung hat man, entsprechend Gleichung (2), anzunehmen, zunächst ohne Rücksicht auf das Vorzeichen:

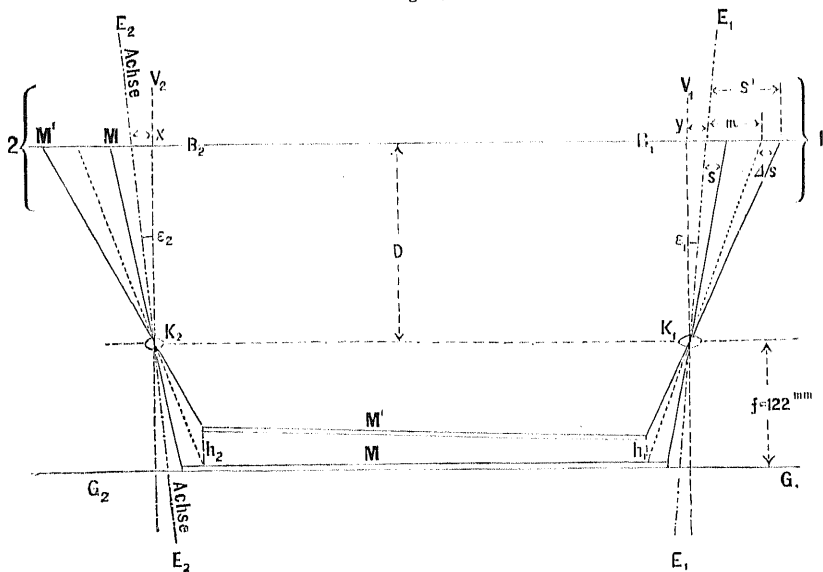
$$\Delta s' = \frac{h_1}{f} (s' + y)$$

und es ist also die Ablesung, welche das *nicht* gehobene Ende geben würde, die folgende:

$$m' = s' - \frac{h_1}{f} (s' + y) \quad (3)$$

Eine solche Gleichung gilt an beiden Enden der Stäbe, und indem wir, wie in Fig. 2., die beiden Seiten mit 1 und 2 bzw. mit y und x unterscheiden, und alle

Fig. 2.



Mikroskop-Ablesungen nach *auswärts* zählen, können wir die Massvergleichung zwischen M und M' bilden. Dazu führen wir noch den konstanten horizontalen Abstand beider Objektivmitten $K_1 K_2 = K$ ein (K ist nicht in Fig. 2. eingeschrieben) und haben damit:

$$M = K - (y + s_2 + x + s_1) \quad M' = K - (x + m_2' + y + m_1') \\ M' - M = s_2 - m_2' + s_1 - m_1'$$

oder mit Einsetzung von (3):

$$M' - M = s_2 - s_2' + \frac{h_2}{f} (s_2' + x) + s_1 - s_1' + \frac{h_1}{f} (s_1' + y) \quad (4)$$

Wenn weiter t die Temperatur des Massstabes M , und t' diejenige von M' ist, wenn ferner M_0 und M_0' die Stablängen bei der Temperatur 0° sind, und beide Stäbe von Messing sind mit der Ausdehnung $18,3\mu$ für 1° , so ist:

$$M = M_0 + 18,3 t \quad M' = M_0' + 18,3 t' \quad (5)$$

Ehe wir von da zur Aufstellung der Schlussgleichungen schreiten, wollen wir noch überlegen, ob nicht die Verkürzung merklich werden kann, welche durch das Schiefliegen des Stabes M' entsteht. Diese Verkürzung ist bekanntlich:

$$\frac{(h_2 - h_1)^2}{2 M'} = \sigma \quad (6)$$

Dieses kann in unserem Falle bis zu $0,2\mu$ anwachsen, und wenn man nun die Differenz der beiden Stäbe mit Rücksicht auf das Schiefliegen von M' bestimmen will, so muss man statt (5) schreiben:

$$M = M_0 + 18,3 t \quad M' = M_0' + 18,3 t' - \sigma \quad (7)$$

Damit wird die Differenz beider Stäbe:

$$\xi = M_0 - M'_0 = M - M' - 18,3(t - t') - \sigma \quad (8)$$

Wenn man nun die Gleichungen (4) und (8) verbindet, und zur Abkürzung schreibt:

$$a = \frac{h_2}{f}, \quad b = \frac{h_1}{f}, \quad l = s_2 - s_2' + s_1 - s_1' + a s_2' + b s_1' + 18,3(t - t') + \sigma \quad (9)$$

so erhält man:

$$0 = \xi + a x + b y + l \quad (10)$$

Jede Massstab-Vergleichung giebt eine solche Gleichung. Macht man mehr als drei Vergleichen bei möglichst verschiedenen Höhen h_1 und h_2 , so nehmen die Gleichungen (10) den Charakter von Fehlergleichungen an in der Form:

$$\begin{aligned} v_1 &= \xi + a_1 x + b_1 y + l_1 \\ v_2 & \dots \dots \dots \text{u. s. w.} \end{aligned} \quad (11)$$

und man hat dann eine Ausgleichung zu machen.

Wir haben an dem *Repsoldtschen* Komparator der K. Normal-Aichungs-Kommission im April 1881 eine solche Messung und Berechnung mit zwei Messingmeterstäben durchgeführt; die verschiedenen Höhenlagen des Massstabs M' wurden dabei durch eine aufgesetzte *Libelle* bestimmt, deren Ausschläge mit Rücksicht auf die Abstände von den Unterstützungspunkten die Höhenlagen berechnen liessen. Wir nahmen folgende 5 Fälle:

Fall	links h_2	rechts h_1
1.	0,0 μ	0,0 μ (Normallage mit $f = 122^{mm}$)
2.	+ 809,1 μ	+ 170,6 μ
3.	+ 9,2 μ	+ 1,9 μ
4.	+ 160,2 μ	+ 801,1 μ
5.	+ 5,8 μ	— 10,6 μ

Folgendes sind die hierzu gehörigen Mikrometer-Ablesungen, welche wir sofort in Form von Mikromillimetern angeben, indem eine Umdrehung = 97,7 μ war, wonach die Umrechnung der Umdrehungen in Millimeter erfolgen konnte:

Fall	Mikroskop		Mikroskop		Temperatur	
	s_2	links s_2'	s_1	rechts s_1'	t	t'
1	— 15,90 μ	— 25,22 μ	+ 92,72 μ	— 36,30 μ	17,07°	17,005°
2	— 15,55	— 10,52	+ 91,74	— 53,95	17,11	17,065
3	— 16,35	— 58,97	+ 93,11	— 1,12	17,14	17,100
4	— 15,50	— 149,60	+ 92,86	+ 94,13	17,18	17,145
5	— 15,50	— 149,55	+ 92,42	+ 90,13	17,21	17,188

Damit kann man die Rechnung nach den Formeln (9) und (11) durchführen; man findet zunächst die Fehler-Gleichungen (wobei die Absolutglieder nahe auf 0,01 genau sind):

$$\begin{aligned} v_1 &= \xi + \dots \dots + 139,54 \\ v_2 &= \xi + 0,00664 x + 0,00140 y + 140,64 \\ v_3 &= \xi + 0,00008 x + 0,00002 y + 137,57 \\ v_4 &= \xi + 0,00131 x + 0,00656 y + 134,10 \\ v_5 &= \xi + 0,00005 x - 0,00013 y + 136,75 \end{aligned}$$

Wenn man als neue Unbekannte einführt:

$$\xi' = \xi + 133\mu \quad x' = 0,001 x \quad y' = 0,001 y \quad (12)$$

(d. h. x' und y' werden nun in Millimetern gezählt), so erhält man die Normalgleichungen (in abgekürzter Schreibweise):

$$\begin{array}{r} 5,00 \xi' + 8,08 x' + 7,85 y' + 23,60 = 0 \\ \quad + 45,81 x' + 17,88 y' + 52,72 = 0 \\ \quad \quad + 45,01 y' + 17,52 = 0 \\ \quad \quad \quad + 137,30 \end{array}$$

Die Auflösung giebt:

$$\begin{array}{lll} \xi' = -4,95^{\mu} & x' = -0,56^{mm} & y' = +0,69^{mm} \\ \pm 0,86^{\mu} & \pm 0,26 & \pm 0,26 \end{array} \quad (13)$$

Mittlerer Gewichtseinheitsfehler:

$$m = \sqrt{\frac{4,4}{5-3}} = \pm 1,48^{\mu} \quad (14)$$

Nach (12) hat man auch wieder $\xi = \xi' - 133 = -137,95^{\mu}$.

Dieses ist die Differenz der beiden Massstäbe M_0 und M_0' und zwar ist nach (8):

$$M_0 - M_0' = -137,95^{\mu} \pm 0,86^{\mu} \quad (15)$$

Der Stab M_0 ist also um ungefähr $0,1^{mm}$ kürzer als der Stab M_0' .

Wichtiger als diese Stabvergleiche (15) sind uns hier die Masse $x' = -0,56^{mm}$ und $y' = +0,69^{mm}$, welche die Neigungen der Mikroskop-Axen bestimmen, es sind das Masse, welche aus Schrauben-Umdrehungen abgeleitet, sich auf die unten liegenden Stäbe beziehen; wenn man also daraus die Mikroskop-Neigungen als Winkel ausdrücken will, so braucht man den Objektiv-Abstand $f = 122^{mm}$, und die Axen-Neigungswinkel werden:

$$\varepsilon_2 = \frac{x}{f} \varrho = -16' \pm 7' \quad \varepsilon_1 = \frac{y}{f} \varrho = +19' \pm 7'$$

Hiernach kann man die Mikroskop-Axen neu richten, oder die Fehler ε_2 und ε_1 in Rechnung bringen.

Andererseits enthält der mittlere Gewichtseinheits-Fehler $m = \pm 1,48^{\mu}$ nach (14), mit Rücksicht auf die ziemlich bedeutenden Hebungen $\Delta f = h$, welche bis zu $0,8^{mm}$ betrugen, eine Bestätigung der *Foersterschen* Formel (2).

Es ist klar, dass aber bei so grossen Hebungen die feinsten Vergleichen nicht erzielt werden konnten. Aus der Messungsweise konnte indessen jedenfalls die Beruhigung entnommen werden, dass die Neigungen der Mikroskope klein genug waren, um für alle sonstigen Messungen, bei denen in der Regel Abstands-Unterschiede Δf kaum im Betrage des zwanzigsten Theils der obigen Maximalwerte der Δf vorkommen, vernachlässigt werden zu können.

§ 10. Ältere Basis-Messungen.

Die ersten Basis-Messungen waren nichts anderes als Linien-Messungen, im wesentlichen von ähnlicher Art, wie sie der Landmesser mit Messlatten heute noch macht, jedoch mit besonderer Sorgfalt ausgeführt.

So begann *Snellius* 1615 (vgl. unsere Einleitung S. 4); und auch die Franzosen massen im 17. und auch noch im 18. Jahrhundert mit hölzernen Latten.

Ähnliche Messungen kamen in Deutschland auch noch in diesem Jahrhundert vor; so berichtet z. B. *Benzenberg* aus dem Jahre 1805, in dem Buche „Über das Cataster“, Bonn 1818, S. 20 - 21, „die Standlinien wurden mit hölzernen Messstangen

gemessen, die 12 Fuss lang waren, mit Ölfarbe angestrichen und an beiden Seiten mit Kupfer beschlagen. Diese wurden über kleine Brücken gelegt, die in eine Länge von 1000 Fuss durchs Feld gebaut wurden, und auf denen sich eine viermalige Messung fortsetzte, während dass hinten die Brücken abgebrochen und vorne wieder angebaut wurden. 22 Feldmesser wurden bei der Messung der Standlinien gebraucht.“

Folgendes sind *Benzenbergs* Angaben für die 4malige Messung bei Mündelheim, wobei wir sogleich die Reduktion in Metermass und eine Genauigkeits-Berechnung zufügen:

	Fuss	Zoll	Linien	Meter	v	v^2
1.	24062	1	8,1	= 7551,9867	+ 14,9 ^{mm}	222
2.	24062	1	5,0	= 7551,9799	+ 21,7	471
3.	24062	3	3,6	= 7552,0292	— 27,6	762
4.	24062	2	7,1	= 7552,0107	— 9,1	83
Mittel	24062	2	3	= 7552,0016		1538

Man berechnet hieraus:

Mittlerer Fehler einer Messung:

$$m = \sqrt{\frac{1538}{3}} = \pm 22,6^{\text{mm}}$$

Mittlerer Fehler des Mittels aus allen 4 Messungen:

$$M = \frac{m}{\sqrt{4}} = \pm 11,3^{\text{mm}}$$

Mittlerer Fehler einer Messung von 1^{km} Länge:

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{7,552}} = \pm 8,2^{\text{mm}} \quad (1)$$

Diese Genauigkeits-Angaben beziehen sich *nur* auf die *unregelmässigen*, durch die Handhabung der Stangen und etwaige Änderungen derselben während der Messungen erzeugten Fehler; einseitig wirkende Fehler und namentlich die Unsicherheiten der Latten selbst sind hier *nicht* mitgerechnet.

Trotzdem schien es nicht unzweckmässig, an diesem, wie es scheint, zuverlässigen Beispiele zu zeigen, wie genau man mit den einfachsten Mitteln im Felde messen kann, wenn man gute Messungs-Unterlagen hat.

Bei dieser Gelegenheit mag auch erwähnt werden, dass *Koppe* die Aarberger Basis von 1880 auch mit gewöhnlichen 5 Meter-Latten längs gespannter Schnüre mass, und für 1^m den mittleren unregelmässigen Fehler $\pm 0,28^{\text{mm}}$ fand, also für eine Messung von 1^{km} den mittleren Fehler:

$$m_1 = 0,28 \sqrt{1000} = \pm 8,9^{\text{mm}} \quad (2)$$

(vgl. *Koppe* „Der Basis-Apparat des General *Ibanez* und die Aarberger Basis-messung“, Zürich 1881, S. 7—8.)

Nach dieser Vorbemerkung über das Messen mit gewöhnlichen Messlatten, geben wir eine kurze Darlegung der Entwicklung der Basismessungs-Verfahren zunächst von den französischen Messungen im 17. und 18. Jahrhundert bis zum Anfang dieses Jahrhunderts.

Picard wandte 1669 4 hölzerne je 2 Toisen lange Massstäbe an, die er mit Hilfe von Schrauben zu 2 je 4 Toisen langen Messlatten verband. Diese legte er un-

mittelbar eine vor die andere auf den (horizontalen) Boden. Da sie im Querschnitt rund, und leicht von Gewicht waren, so war eine Verschiebung auf dem Boden kaum zu vermeiden. (*La Condamine*, *Mesure des trois premiers degrés* u. s. w. S. 249.)

Bei den Gradmessungen in Peru und Lappland (1736) wurden ebenfalls hölzerne Latten, und zwar deren *drei* zusammen angewendet. Dieselben waren 15 oder 20 Fuss lang, 2 Zoll breit, $1\frac{1}{2}$ Zoll dick und mit Eisen beschlagen; sie wurden auf je zwei Stützen, jede einzeln horizontal, gelegt. (*La Condamine* S. 250.)

Bei der im Jahre 1739 vorgenommenen Nachmessung der *Picardschen* Basis von Juvisy bediente sich *Cassini* zum erstenmal metallener Massstäbe, nämlich 4 eiserner Stäbe, deren Temperatur-Ausdehnung er aus Quecksilber-Thermometerangaben ermittelte. (*La Condamine* S. 251.)

Der englische General *Roy* mass im Jahre 1784 eine Grundlinie bei *Hounslow-Heath*, zwischen London und Greenwich, 7 530^m lang, mehrmals mit verschiedenen Hilfsmitteln:

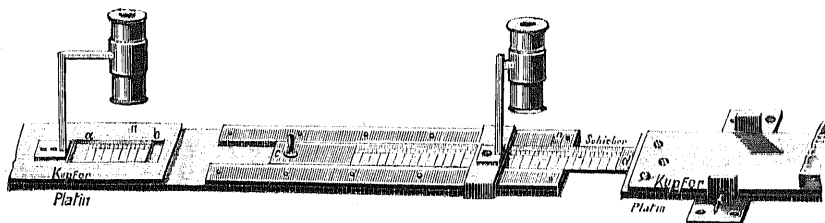
erste Messung mit einer Kette . . .	27 408,22 Fuss
zweite " " Holz-Massstäben . .	27 406,60 "
dritte " " Glasröhren . . .	27 404,72 "

Ferner im Jahre 1787 eine Basis bei Romney-Marsh wieder mit der Kette, 28 532,92 Fuss, und 1794 bei Salisbury 36 574,4 Fuss.

Doppelmetall-Stange von Borda.

Den Übergang von der unvollkommenen Temperatur-Bestimmung *Cassinis* („le thermomètre à la main“) zu der heute noch in Gebrauch befindlichen Verbindung zweier *verschiedener* Metalle zu einer Messstange fand *Borda*, dessen aus Platin und Kupfer zusammengesetzte Stäbe bei der grossen französischen Gradmessung von 1792 u. ff. von *Delambre* und *Méchain* angewendet wurden.

Fig. 1.
Platin-Kupfer-Stange von Borda.
(Platinstab 12 Fuss lang, 6 Linien breit, 1 Linie dick.)



Wir geben in Fig. 1. die Zeichnung der *Bordaschen* Stangen nach „*Puissant*, *traité de géodésie*“, 2^{me} édition, Paris 1819, I. S. 203—207. Die eigentliche Messstange ist von Platin, 2 Toisen = 12 Fuss = 3,898^m lang, $\frac{5}{6}$ Linien = 13,5^{mm} breit und 1 Linie = 2,3^{mm} dick. Auf dieser Platinstange befindet sich eine Kupferstange, und zwar am linken Ende mit der Platinstange fest verbunden, während das rechte Kupfer-Ende sich frei ausdehnen kann, und etwa 0,16^m vom rechten Ende entfernt, mit einer Teilung *ab* und Nonius *n* in seiner Stellung gegen das Platin abgelesen

wird. Die so gemachten Ablesungen geben nun das Mass für die Ausdehnung, denn da Platin den Ausdehnungs-Coëfficient $\alpha = 0,000\ 0089$ und Kupfer $\alpha' = 0,000\ 0172$ (für 1° C.) hat, also α' etwa das Doppelte von α ist, lässt sich aus der Ausdehnungs-Differenz die Ausdehnung des Platins selbst berechnen. (Wir werden dieses bei den Besselschen Stangen mit Eisen und Zink in § 11.—12. ausführlicher behandeln.)

Ausser dem Temperatur-Massstab ab zeigt Fig. 1. noch einen Massstab an dem Schieber cd , welcher dazu dient, den Zwischenraum je zweier aufeinander folgender Stangen ohne Stoss zu messen.

Solcher Stangen wie die hier beschriebene wurden je 4 zusammen auf Stativen mit Mikrometer-Schrauben eingerichtet; die Stangen-Neigungen wurden durch Libellen und Gradbogen bestimmt, und in Rechnung gebracht.

Mit diesen Bordschen Stangen sind (nach den Verh. d. 5. allg. Conf. d. Eur. Gr., Gen.-Ber. für 1877, S. 40) 7 Grundlinien gemessen worden, nämlich:

1798 Grundlinie bei Melun	11 842 ^m
„ „ „ Perpignan	11 706
1804 „ „ „ Ensisheim	19 044
1818 „ „ „ Brest	10 527
1826 „ „ „ Bordeaux	14 119
1827 „ „ „ Gourbera	12 220
1828 „ „ „ Aix	8 067

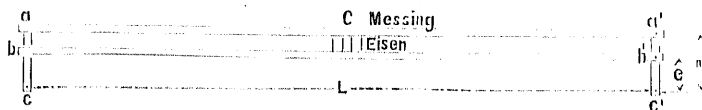
Colbys Kompensations-Stangen.

Eine sinnreiche Anwendung des Grundgedankens der aus zwei verschiedenen Metallen zusammengesetzten Basismessstangen hat der englische General Colby, etwa um 1827, gemacht, indem er zwei Ausdehnungen von Eisen und Zink einander gegenseitig aufheben liess, so dass der Apparat selbstthätig kompensierend wird.

Fig. 2.

Colbys Kompensations-Stange.

(Länge = 10 Fuss = 3,048 m.)



Nach Andeutung von Fig. 2. hat man eine Messing-Stange und eine Eisen-Stange in der Mitte bei C fest verbunden, so dass sich die Enden links a und b , rechts a' und b' frei ausdehnen können. Nun sind Hebel abc und $a'b'c'$ angebracht in den Verhältnissen:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a'c'}{b'c'} = \frac{m}{e}$$

wo m und e die Ausdehnungs-Coëfficienten für Messing und Eisen sind (etwa $m = 0,000\ 019$ und $e = 0,000\ 011$ für 1° C.). Nun ist leicht einzusehen, dass der zwischen c und c' gemessene Abstand L unabhängig von den Ausdehnungen ist.

Solcher Stangen in Holzkästen wurden 6 zusammen angewendet, und die Zwischenräume der Stangen wurden mikroskopisch gemessen.

Mit diesem Apparat wurden 2 Linien in England gemessen: Longh Foyle, nördl. Irland, 1827, 41 641 Fuss, und Salisbury, westl. von London, 1849, 34 841 Fuss; Ferner 10 Linien in Indien.

Näheres hierüber giebt „Ordnance trig. survey“ (vgl. S. 10) S. 200 u. ff. mit Plate II, sowie im Auszug Clarke, Geodesy (vgl. S. 16) S. 163 u. ff.

Für die *Bayrische Landesvermessung* lieferte das mechanische Institut von *Utzschneider* und *Reichenbach* im Anfang dieses Jahrhunderts einen Apparat, welcher aus fünf in hölzernen Kästen eingelegten je 4 Meter langen in polierte Stahlkanten auslaufenden eisernen Stangen bestand. Die Zwischenräume der bei der Messung sich nicht berührenden Stäbe wurden durch stählerne Keile (12^m lang, hinten $6,5^m$, vorn $0,5^m$ dick), die Neigungswinkel durch Libellen, und die Temperatur durch auf den Stangen ruhende Thermometer bestimmt (Generalbericht der Europ. Gradmessung 1867, S. 25). Die genaue Beschreibung und Zeichnung dieses *Reichenbachschen* Apparates findet sich in dem Werke: „Die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage“, München 1873, S. 3—65, von v. *Bauernfeind*.

Ähnlich diesem *Reichenbachschen* Apparat, in einzelnen Teilen noch sinnreicher ausgedacht, war *Schwerd's* Apparat, den er beschrieben hat in dem Werke: „Die kleine Speyerer Basis“ u. s. w. Speier 1822.

Der Württembergische Basis-Apparat von Bohnenberger.

Auch dieser Apparat ist grösstenteils nach dem *Reichenbachschen* Muster unter *Bohnenbergers* Leitung im Jahr 1818 gearbeitet (s. „Die Landesvermessung des Königreichs Württemberg“, herausgegeben von *Kohler*. Stuttgart 1858, S. 45).

Die schon 1792 von *Borda* erfundene Verbindung zweier Metalle zur Bestimmung der Temperatur-Ausdehnung kam bei dem *Reichenbachschen* und *Bohnenbergerschen* Apparat nicht zur Verwendung, sondern es wurden nur gewöhnliche Thermometer benutzt.

Die Messstangen sind je 2 Toisen lang, 32 Pfund schwer und „genau nach der Peru-Toise auf 13° R reguliert“ (hierüber haben sich später Bedenken erhoben).

Fig. 3.

Eiserne Messstange in einem Holzkasten.

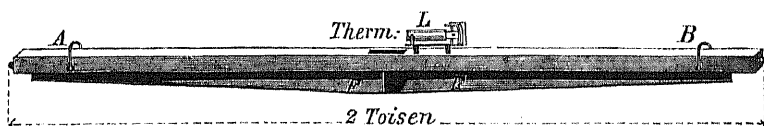
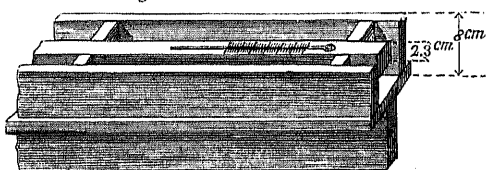


Fig. 4.

Eiserne Stange mit Thermometer im Holzkasten.

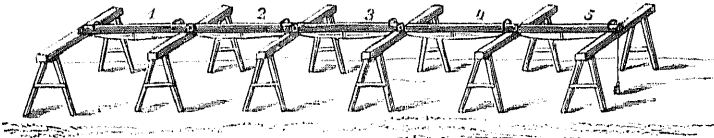


Der Querschnitt der Stangen ist ein Quadrat von $2,3^m$ Seite. Jede Stange endigt einerseits in eine horizontale, andererseits in eine vertikale Schneide. Die Stangen sind in hölzerne Gehäuse eingeschlossen, wobei jedoch die Schneiden beiderseits hervorragen. Die Gehäuse haben unten Verstärkungsrippen *B'* und oben Handhaben *A B* (Fig. 3.). In jede Stange ist ein Thermometer eingelassen (Fig. 4.), welches mittelst einer durch Glas verschlossenen und beim Nichtgebrauch bedeckten Öffnung in dem Holzgehäuse beobachtet werden kann. Bei *L* ist eine Libelle mit Gradbogen angebracht.

Der Messkeil ist von gehärtetem Stahl, abgesehen von der Handhabe ist er 12^m lang, 5^m breit, vorn $0,5^m$ und hinten $6,2^m$ dick.

Die Messungsbrücke bestand aus einfachen hölzernen Böcken.

Fig. 5.
Messungs-Brücke.



Die Basis Solitude-Ludwigsburg von 6687 Toisen oder rund 13 Kilometer Länge wurde in der Zeit vom 18. September bis 12. Oktober 1820 in 19 Arbeitstagen einmal gemessen.

Weiteres und Ausführlicheres über die älteren Basismess-Apparate giebt Westphal „Basisapparate und Basismessungen“, Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1885, S. 257—274, S. 333—345, S. 373—385, S. 420—432. Ferner 1888, S. 189—203, S. 225—236, S. 337—346.

Reduktion einer Basislänge auf den Meereshorizont.

Ausser den Reduktionen für Temperatur, Stangenneigung, Zwischenräume u. s. w., welche bisher erwähnt worden sind, hat man bei Basismessungen, um sie unter sich trigonometrisch vergleichbar zu machen, auch noch die Reduktion auf den Meereshorizont (bzw. auf *N. N.*) anzubringen.

Wenn h das arithmetische Mittel der Höhen der einzelnen Stangenlagen über dem Vergleichs-Horizont ist, und r der Erdkrümmungs-Halbmesser, wenn ferner B die Summe der horizontalen Stangenlagen und B_0 deren zentrale Projektion auf den Horizont ist, so besteht die Beziehung:

$$\frac{B}{B_0} = \frac{r + h}{r} = 1 + \frac{h}{r}$$

oder auch hinreichend genähert:

$$B - B_0 = B \frac{h}{r}$$

Zur Übersicht geben wir hiezu einige Zahlenwerte:

h	$\log \left(1 + \frac{h}{r} \right)$	h	$\log \left(1 + \frac{h}{r} \right)$	
0 ^m	0,0000000-0	500 ^m	0,0000340-3	
100	68-1	600	408-4	Differenz
200	136-1	700	476-4	68-1
300	204-2	800	544-5	für 100 ^m
400	272-2	900	612-5	
500	340-3	1000	680-6	

Für die Basislänge $B = 1000^m$ und die Höhe $h = 100^m$ beträgt die Reduktion 0,0157^m.

Zuweilen kommt auch Reduktion auf einen anderen als den Meeres-Horizont vor, z. B. liegt der Horizont der Württembergischen Landes-Vermessung 844 Par. Fuss = 274,16^m über dem Meer.

Um daher eine württembergische Dreiecksseite z. B. mit einer benachbarten badischen Seite zu vergleichen, deren Horizont in der Meereshöhe liegt, hat man den Logarithmus der württembergischen Seite um 0,0000186-6 zu vermindern. Zur Ver-

wandlung von württembergischen Landesvermessungs-Fussen im Vermessungs-Horizont in Meter im Meeres-Horizont hat man den Reduktions-Logarithmus 9.456 98865 (vgl. Band II. Anhang Seite [53]).

§ 11. Der *Besselsche* Basis-Mess-Apparat.

Als *Bessel* im Jahre 1834 zu seiner „Gradmessung in Ostpreussen“ einen Basis-Mess-Apparat bauen liess, standen ihm die Erfahrungen von *Borda*, *Reichenbach*, *Repsold*, *Schwerd* u. A. zu Gebote (Platin und Kupfer, Messkeil u. s. w.).

Bessel hat zu diesen Erfahrungen sein eigenes Verständnis hinzugefügt, er hat alle Einrichtungen und Berechnungen so scharfsinnig erdacht und so folgerichtig durchgeführt, dass der Apparat immer als klassisches Beispiel gelten wird, obgleich er natürlich jetzt nach 50 Jahren nicht mehr der beste sein kann.

Mit dem *Besselschen* Apparat sind bis jetzt 13 Grundlinien gemessen worden, nämlich 1) bei Königsberg 1834, 2) Kopenhagen 1838, 3) Upsala 1840, 4) Berlin 1846, 5) Bonn 1847, 6) Lommel in Belgien 1851, 7) Ostende 1853, 8) Strehlen in Schlesien 1854, 9) Braak in Holstein 1871, 10) Grossenhain in Sachsen 1872, 11) Ensisheim im Elsass 1877, 12) Göttingen 1880, 13) Meppen 1883.

Obgleich der Apparat bei allen diesen Messungen in seinen Hauptteilen derselbe geblieben ist, und obgleich damit die Art der Basismessung einen gewissen konservativen Charakter angenommen hat, ist doch auch hier die Wissenschaft nicht stehen geblieben; seit der Braaker Basis ist die Art der Massvergleichen und die Ausführung der Messung (z. B. die Ablesung) gegen früher stetig vervollkommenet worden, und vor der Göttinger Messung hat der Chef der trigonometrischen Abteilung, *Schreiber*, den (1830 mit den rohesten technischen Hilfsmitteln hergestellten) Apparat und alle Einzelheiten seiner Anwendung eingehender Kritik unterworfen, woraus die zwei letzten Messungen bei Göttingen und Meppen hervorgegangen sind, welche zur Zeit als die beste Ausnützung des *Besselschen* Gedankens zu betrachten sind.

Wir geben im Folgenden die Beschreibung und die wichtigsten Zeichnungen des Apparates, teils nach der ersten Mitteilung von *Bessel* selbst („Gradmessung in Ostpreussen“, S. 1—51 und Tafel I—V), teils nach den vor Göttingen angebrachten Verbesserungen.

Der Besselsche Basis-Mess-Apparat.

(Darstellung in natürlicher Grösse.)

Fig. 1.

Ansicht der Stangen-Enden (Anordnung von 1834).

(*E* = Eisen, *Z* = Zink, *St* = Stahl, *T* = Tragstange, *R* = Rollen).

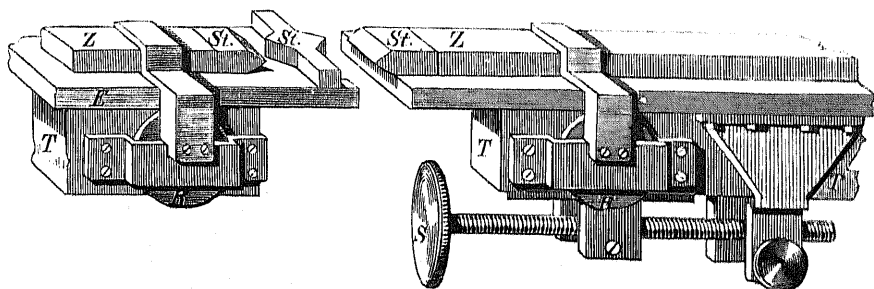


Fig. 2.
Querschnitt der Stangen
mit Massen in Pariser Linien
(1 Par. Linie = 2,26 mm).
(Anordnung von 1834.)

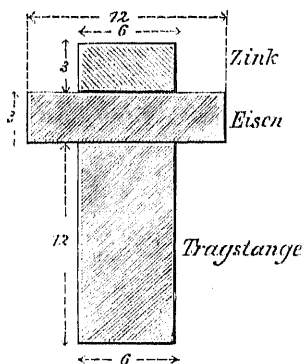


Fig. 3.
Einweis-Scheibe *EE*
mittelt des Rahmens *R* auf das vordere
Stangenende aufgeschraubt.
(Anordnung von 1880.)

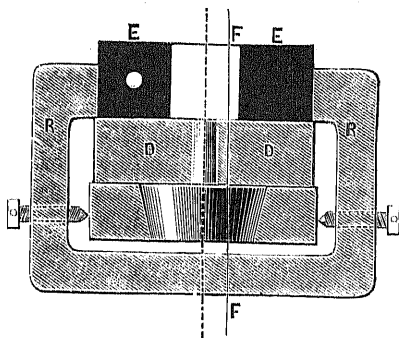


Fig. 4.
Vorderes und hinteres Stangen-Ende (Anordnung von 1880)
im Längsschnitt und im Grundriss (natürl. Grösse).

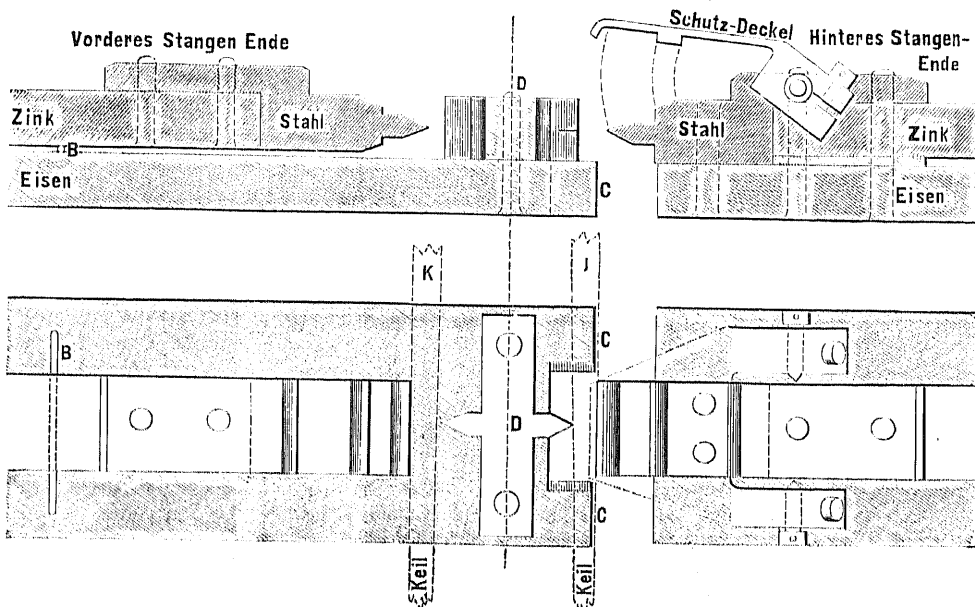


Fig. 5.
Der gläserne Messkeil (natürl. Grösse).
(20 = 2 Par. Linien = 4,5 mm 8 = 0,8 Par. Linien = 1,8 mm)



(Ordinaten-Differenz, zwischen 2 Strichen, = 0,01 Par. Linien = 0,0226 mm.)

I. Die Messstangen.

Es werden 4 Messstangen zusammen gebraucht, jede Messstange ist 3,898^m (= 2 Toisen) lang, 27^{mm} breit und 7^{mm} dick. Dieses bezieht sich auf die eigentliche eiserne Messstange, auf welcher aber eine zweite, halb so breite Zink-Stange aufliegt, wie aus dem Querschnitt Fig. 2. zu ersehen ist.

Die Zinkstange ist an dem *einen Ende* mit der Eisenstange fest verbunden, im übrigen liegt sie frei auf und kann sich gegen die Eisenstange ausdehnen. Die horizontale Fuge zwischen Eisen und Zink gab aber zu Reibungen Veranlassung, und deswegen wurde diese Fuge später auf etwa 1^{mm} erweitert, und durch kleine Rollen ausgefüllt, welche in Fig. 4. links durch *B* angedeutet sind.

Da die flachen Eisen- und Zinkstangen sich auf eine Länge von nahe 4^m nicht freitragen könnten, ist ihnen eine *Tragstange* hochkantig untergelegt, jedoch durch Vermittlung von mehreren Rollenpaaren, nach Andeutung von Fig. 1. Die Bewegung auf den Rollen ist aber nur eine geringe, und wird durch die Mikrometer-Schraube *S* (wie an der Alhidade eines Theodolits) geregelt.

Die *Holzkästen*, in welche die Stangen eingelegt werden, sind in unseren Figuren S. 76 und 77 nicht gezeichnet, sie sind etwa 23^{cm} breit und ebenso hoch.

Auch die Libellen, welche auf den 4 Stangen zur Neigungs-Bestimmung angebracht sind, mögen hier nur kurz erwähnt werden. Gewöhnliche Quecksilber-Thermometer wurden mit in die Kästen gelegt, obgleich sie neben der Zink- und Eisen-Verbindung nicht unbedingt nötig sind, und nur ausnahmsweise abgelesen wurden.

Aus den erwähnten Holzkästen ragen nun die Stangen nur mit ihren *Enden* hervor, worüber noch einiges zu sagen ist:

Fig. 1. zeigt zwei Stangen-Enden und man erkennt daraus die Art des Aneinanderlegens der Stangen. Es endigt nämlich die linke Stange in eine vertikale Stahlschneide, und die rechte Stange in eine horizontale Stahlschneide, und diese beiden Schneiden werden einander so nahe gebracht, dass der übrig bleibende Zwischenraum durch einen Messkeil gemessen werden kann.

Fig. 4. zeigt die neuere Anordnung der Stahlschneiden und deren Verbindung mit den Eisen- und Zinkstangen. Dabei wurden auch die horizontalen Schneiden der 4 Stangen mit gelenkartig niederzuklappenden Schutzdeckeln versehen, wodurch dem früher nicht seltenen Falle von Beschädigung dieser Schneiden vorgebeugt wird, während die vertikalen Schneiden durch die vorspringenden Enden *C* der darunter befindlichen Eisenstangen schon genügend geschützt sind. (Der Schutzdeckel ist in dem Grundriss von Fig. 4. nur teilweise gezeichnet, indem dessen linker Teil nur punktiert angedeutet ist, damit die darunter liegende horizontale Schneide nicht dem Anblick entzogen wird.)

Die auf jeder Eisenstange aufliegende *Zinkstange* ist an einem (linkseitigen) Ende durch Schrauben und Lötung mit der Eisenstange verbunden, von diesem Ende bis zum andern Ende ist sie ohne Verbindung mit der Eisenstange. Auf der entgegengesetzten (rechten) Seite endigt die Zinkstange in eine horizontale Stahlschneide, deren jeweiliger Abstand von einer vertikalen, auf der Eisenstange befestigten Stahlschneide durch einen horizontal eingeschobenen Keil gemessen wird.

Hier ist auch noch die kleine *Einweis-Scheibe* *EE* Fig. 3. S. 77, zu erwähnen, welche mittelst eines umgreifenden Rahmens *R* an dem rechtseitigen Ende *D* jeder Stange befestigt ist. Von dieser Scheibe mit ihren drei schwarzen und weissen Feldern wird bei der Geradrichtung der Basis weiter die Rede sein.

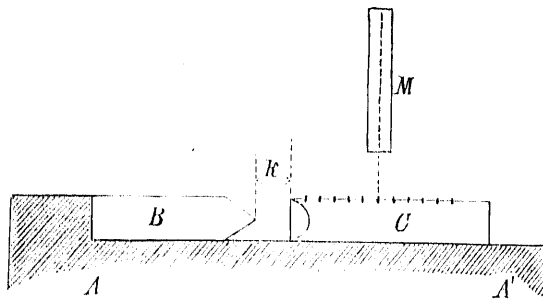
II. Die Messkeile.

Die bei der Göttinger Messung 1880 gebrauchten Glaskeile sind in Fig. 5. S. 77, in natürlicher Grösse gezeichnet.

Die Zunahme der Keildicke von einem Strich zum folgenden ist = 0,01 Pariser Linien, und da man noch 0,1 des Intervalls schätzen kann, so hat man Ablesungen von 0,001 Linien für die Keildicken (0,001 Par. Linien = 2,256 μ).

Die Bestimmung der Keildicken geschah durch eine Einrichtung, welche durch die schematische Fig. 6. angedeutet ist.

Fig. 6.
Bestimmung der Keildicken *k*.



Auf einer festen Unterlage *AA'* befindet sich ein Cylinder *B* mit horizontaler Schneide befestigt, und ein zweiter Cylinder *C*, welcher der horizontalen Schneide des Cylinders *B* eine vertikale Schneide gegenüberstellt, ist auf dieselbe Unterlage *AA'* beweglich aufgelegt. Dieser bewegliche Cylinder *C* trägt auf seiner oberen Fläche eine Teilung, welche durch ein lotrecht darüber angebrachtes Mikroskop *M* abgelesen werden kann. Man schiebt den Cylinder *C* mit seiner Schneide gegen den Cylinder *B* berührend an, und liest die Teilung auf *C* am Faden des Mikroskopes ab; zieht man dann den Cylinder *C* ein wenig zurück, und füllt den Zwischenraum *k* zwischen den beiden Schneiden durch den zu untersuchenden Messkeil aus, wobei eine zweite Ablesung auf *C* gemacht wird, so ist die Differenz der Ablesungen auf *C* gleich der betreffenden Keildicke *k*.

Auf diese Weise wurde jeder Keil an mehreren Stellen in Bezug auf seine Dicke untersucht, es zeigte sich, dass die Keildicken auf 0,01 Linien genau proportional den Keillängen waren, dass also die Keilflächen bis zu dieser Genauigkeit eben geschliffen waren. Nach diesen Bestimmungen, welche in Fig. 6. angedeutet sind, wurden Tabellen angelegt, aus denen für jede Keilablesung die zugehörige Keildicke entnommen werden kann.

Die Messkeile dienen zwei verschiedenen Zwecken: erstens werden damit die Zwischenräume zwischen je zwei Stangen-Enden gemessen (Keil *J* Fig. 4. S. 77) und zweitens werden damit die Verschiebungen der Zinkstangen gemessen (Keil *k* Fig. 4. S. 77).

Die ganze Einrichtung von Zink und Eisen mit Keilmessung ihrer Differenz nennt man auch *Metall-Thermometer*.

III. Die Messungs-Brücke.

Als Auflager für die Stangenkästen benützte Bessel kleine hölzerne Böcke, welche jedoch nicht geradezu auf den Boden gestellt wurden, sondern es wurden zuerst je drei 20^m lange eiserne Nägel in den Boden geschlagen, darauf ein Brett gelegt und darauf ein Bock gestellt, der ausserdem mit etwa 50^{kg} belastet wurde, um seine Standfestigkeit zu erhöhen.

Auf je zwei Böcke wurden dann die einzelnen Stangenkästen aufgelegt und sowohl nach der Höhe, als der Quere nach, eingerichtet. Dieses Einrichten geschah von der Königsberger Messung 1834 bis zur Braaker Messung 1871 von freier Hand, und war daher sehr mühsam. Nach den Erfahrungen von Braak wurden die hölzernen Böcke mit Kurbelschrauben versehen, zum raschen mikrometrischen Regulieren der Höhen sowohl als auch der Geradrichtung. Diese verbesserten Böcke sind seitdem bei Grossenhain in Sachsen und bei Oberhergheim im Elsass mit Vorteil gebraucht, zur Basismessung bei Göttingen und Meppen aber durch neue, aus Schmiedeeisen konstruierte Böcke ersetzt worden. Die hölzernen Unterlagsbretter und die eisernen 20^m tief in den Boden einzuschlagenden Nägel, auf welchen diese Bretter ruhen, blieben dieselben wie bei Bessel. („Gradm. i. Ostpr.“ Tafel IV.)

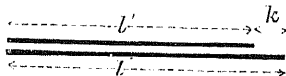
Wegen der Standfestigkeit ist die Auflegung der Stangen so *nieder* als möglich gehalten. Die Böcke sind nur 0,63^m hoch, so dass mit Zurechnung der Unterlagsbrettdicke und der halben Kastenhöhe die Stangenschneiden nur 0,77^m über den Erdboden zu liegen kommen, was gerade noch Handhabung und Ablesung der Keile ohne zu unbequeme Körperlage gestattet.

§ 12. Massbestimmungen des Besselschen Apparates.

I. Das Metall-Thermometer.

Wir betrachten zunächst das Metall-Thermometer in seiner einfachsten Gestalt (Fig. 1.). Eine Eisenstange von der Länge l und eine Zinkstange von der Länge l' werden so aufeinander gelegt, dass die linkseitigen Enden zusammentreffen, dann ist der Abstand k der beiden rechten Enden die Angabe des Metall-Thermometers.

Fig. 1.
Metall-Thermometer



Bei irgend welcher Temperatur wird $l = l'$ werden, und die gemeinsame Länge beider Stäbe sei in diesem Falle $= L$. Zählt man nun die Temperatur t' von jenem Stand rückwärts, nennt e und z die Ausdehnungs-Coëfficienten von Eisen und Zink, so ist:

$$l = L(1 - e t') \quad l' = L(1 - z t') \quad (1)$$

st:

$$l - l' = L(z - e) t' = k \quad (2)$$

t' erhält man:

$$l = L - \frac{e}{z - e} k \quad (3)$$

Den relativen Ausdehnungs-Coefficienten, welcher hier Coefficient von k ist, bezeichnen wir mit m , d. h.:

$$\frac{e}{z - e} = m \quad (4)$$

und damit haben wir:

$$l = L - m k^* \quad (5)$$

Eine Gleichung von der Form (5) gilt für jede der 4 Stangen.

Dürfte man auf die *Gleichheit* der Ausdehnungen bei allen 4 Stangen (die aus einem Stück geschnitten sind) rechnen, so wären die Ausdehnungs-Coefficienten e und z , für Eisen und Zink als konstant zu betrachten. *Bessel* nimmt jedoch für jede Stange besondere Werte e und z , also auch einen besonderen Wert m an, und demnach bestehen entsprechend (5) für die 4 Stangen folgende 4 Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= L_1 - k_1 m_1 \\ l_2 &= L_2 - k_2 m_2 \\ l_3 &= L_3 - k_3 m_3 \\ l_4 &= L_4 - k_4 m_4 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

wo k_1, k_2, k_3, k_4 die Keilmasse der Metall-Thermometer der 4 Stangen bedeuten.

Für die Längen L_1, L_2, L_3, L_4 werden andere Formen eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= L + x_1 \\ L_2 &= L + x_2 \\ L_3 &= L + x_3 \\ L_4 &= L + x_4 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

dabei sind x_1, x_2, x_3, x_4 die Korrekturen, welche an einem gemeinsamen Wert L noch anzubringen sind. Dieser Wert L ist willkürlich; man kann deswegen z. B. L als arithmetisches Mittel der 4 Werte L_1, L_2, L_3, L_4 annehmen, also:

$$L = \frac{L_1 + L_2 + L_3 + L_4}{4} \quad (8)$$

und damit wird für die Korrekturen x die Bedingung erhalten:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad (9)$$

damit gehen die Gleichungen (6) über in die folgenden:

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= L + x_1 - k_1 m_1 \\ l_2 &= L + x_2 - k_2 m_2 \\ l_3 &= L + x_3 - k_3 m_3 \\ l_4 &= L + x_4 - k_4 m_4 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Mittel: $l = L - k m$

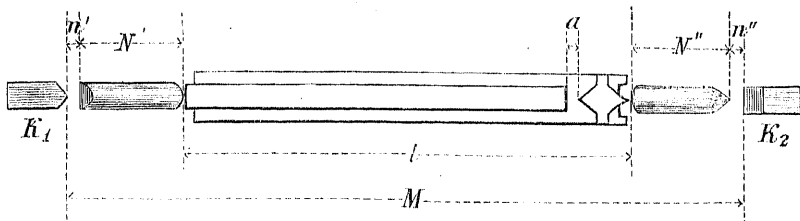
*) *Anmerkung*: Wenn man die einzelnen Verbindungsstücke zwischen Zink und Eisen, Stahlschneiden, Lötungen u. s. w. besonders betrachtet, so findet man eine etwas andere Gleichung als (5); indessen bleibt die Gleichung immer *linear*, L und m bekommen ein wenig andere Bedeutungen als nach (1) und (4); für die weitere Theorie ist das jedoch ohne Einfluss. (Die genaueren Formeln waren in der vorigen Auflage 1878, S. 89—90, Gleichungen (1)—(6) angegeben.)

Es ist hier auch zu bemerken, dass die Bezeichnungen teilweise andere sind als bei *Bessel* in § 2. der Gradmessung in Ostpreussen, wo $\lambda', \lambda'', \lambda''', \lambda''''$ statt unserer L_1, L_2, L_3, L_4 und a, b, c, d statt unserer k_1, k_2, k_3, k_4 stehen.

Hier hat L für das Mittel aus allen 4 Stangen dieselbe Bedeutung, wie L_1, L_2, L_3, L_4 nach (6) für die einzelnen Stangen.

II. Gegenseitige Vergleichung der 4 Stangen. Bestimmung der x und m .

Fig. 2.
Stangen-Vergleichung.



In Fig. 2. bedeuten K_1 und K_2 zwei möglichst unveränderliche, auf gemeinsamer Unterlage befestigte Stahlkeile, welche zum Zweck des scharfen Austossens in Schneiden endigen. Der Abstand M der Schneiden ist etwas grösser als die Stangenlänge l , so dass zum Ausfüllen ausser der Stange l noch zwei Cylinder N' und N'' und die Keilmasse n' und n'' nötig sind. (Die Ausfüll-Cylinder N' und N'' sind nur aus Gründen der Bequemlichkeit angebracht und für das Prinzip des Apparates unwesentlich.) Denkt man sich nun die Stange Nr. 1 in den Vergleich-Apparat Fig. 2. eingelegt, so erhält man eine Gleichung:

$$M = l_1 + (N' + N'') + (n_1' + n_1'') \quad (11)$$

Es ist aber nach (10):

$$l_1 = L + x_1 - k_1 m_1 \quad (12)$$

Nun wird, um alles Gleichartige zusammenzufassen, gesetzt:

$$\left. \begin{aligned} M - (N' + N'') - L &= C \\ n_1' + n_1'' &= n_1 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Damit erhält man aus den zwei vorhergehenden Gleichungen (11) und (12) die folgende:

$$n_1 = C - x_1 + k_1 m_1 \quad (14)$$

Wenn man nach einander die 4 Stangen einlegt, so erhält man entsprechend (14) folgende 4 Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -n_1 + C - x_1 + k_1 m_1 \\ 0 &= -n_2 + C - x_2 + k_2 m_2 \\ 0 &= -n_3 + C - x_3 + k_3 m_3 \\ 0 &= -n_4 + C - x_4 + k_4 m_4 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Z. B. gaben die 4 ersten solchen Vergleichungen folgende erste Gruppe von Gleichungen dieser Art, mit eingesetzten Beobachtungswerten:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -3,9693 + C_1 - x_1 + 1,8960 m_1 \\ 0 &= -3,3600 + C_1 - x_2 + 1,9957 m_2 \\ 0 &= -3,4875 + C_1 - x_3 + 1,3387 m_3 \\ 0 &= -3,4506 + C_1 - x_4 + 1,3377 m_4 \end{aligned} \right\} \quad \text{Gruppe I.} \quad (16)$$

Alle Keilmasse, z. B. 3,9693 und 1,8960, sind hier in Pariser Linien ($= 2,2558^{mm}$) gezählt.

Ähnlich wie (16) wurden noch 8 andere Gruppen von Vergleichen unter möglichst verschiedenen Umständen gewonnen, und die 36 Gleichungen nach der M. d. kl. Q. aufgelöst. Dabei sind folgende Unbekannte zu bestimmen:

- 1) $C_1 C_2 \dots C_9$. für jede Gruppe ein *besonderes* C (nach 13), damit den Änderungen des Apparates von Gruppe zu Gruppe Rechnung getragen wird,
- 2) $x_1 x_2 x_3 x_4$ mit $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, also nur *drei* unabhängige x ,
- 3) $m_1 m_2 m_3 m_4$.

Man hat also in den 36 Gleichungen die Anzahl von $9 + 3 + 4 = 16$ Unbekannten. Die Auflösung nach der M. d. kl. Q. gab die verschiedenen C und ferner:

$$\left. \begin{array}{ll} x_1 = -0,3015 \text{ Par. Linien} & m_1 = 0,54033 \\ x_2 = +0,3986 & m_2 = 0,55976 \\ x_3 = -0,0713 & m_3 = 0,57575 \\ x_4 = -0,0258 & m_4 = 0,58103 \\ \text{Summe} = 0,0000 & \text{Mittel } m = 0,56422 \end{array} \right\} \quad (17)$$

und den mittleren Fehler einer Vergleichung:

$$m = \pm 0,00353 \text{ Par. Linien} = \pm 0,0080^{mm} \quad (18)$$

oder relativ:

$$\frac{m}{l} = \frac{0,00353}{1728} = 0,000\,002 = 2 \text{ Milliontel} \quad (18a)^*$$

III. Vergleichung der Stangen mit dem Normalmass.

Da durch die $x_1 x_2 x_3 x_4$ die 4 Stangen bereits unter sich verglichen sind, genügt es, *eine* der 4 Stangen mit dem Normalmass zu vergleichen. Das Normalmass war eine von *Arago* und *Zahrtmann* in Paris mit der Peru-Toise verglichene Toise, deren Gleichung ist:

$$T = 863,835384 (1 + 0,000\,014\,588 R) \quad (19)$$

wo die Länge in Pariser Linien und die Temperatur R in Réaumur-Graden gemessen ist.

Hiezu nimmt man die Stange Nr. 1, welche nach (10) und (17) die Gleichung hat:

$$l_1 = L - 0,3015 - 0,54033 k_1 \quad (20)$$

Legt man diese Stange Nr. 1. und die Toise T nach einander in den Vergleichs-Apparat Fig. 2., so erhält man durch die verschiedenen Keilmasse n eine Vergleichung, und eine Beziehung zwischen den Gleichungen (19) und (20), aus welcher eine Bestimmung von L hervorgeht.

Es wurden 12 solcher Bestimmungen gemacht, und im Mittel erhalten:

$$L = 1729,1167 \pm 0,000\,984 \text{ Pariser Linien} \quad (21)$$

und der mittlere Fehler *einer* solchen Vergleichung

$$\mu_1 = \pm 0,003\,407 \text{ Par. Linien} = \pm 0,0077^{mm} \quad (22)$$

oder relativ:

$$\frac{\mu_1}{L} = 0,000\,0020 = 2 \text{ Milliontel} \quad (23)$$

$$\frac{0,000984}{L} = 0,000\,000\,6 = 0,6 \text{ Milliontel} \quad (23a)^*$$

*) Es hat sich später ergeben, dass diese sehr kleinen mittleren Fehler der wirklichen sachlichen Genauigkeit wahrscheinlich nicht entsprechen, sondern zu klein angenommen sind. vgl. den späteren § 15.

Hierbei ist $L = m k_0 = L_0$ diejenige Stangenlänge L , welche für $t = 0$ stattfindet.

Für die Mittelwerte der *Besselschen* Stangen haben wir $k_0 = 2,1249$ (für t in R°),
 $m = 0,56422$, womit berechnet wird $L_0 = 1727,9178$ und insbesondere:

$$x = 0,000\,014\,854 \quad \text{und} \quad z = 0,000\,041\,180$$

(Die letzten Stellen dieser Zahlen sind nur genähert richtig, entsprechend der Anmerkung zu der Gleichung (5) auf Seite 81.)

Nun hat man für die Messstangen zwei Arten von Längen-Bestimmungen, erstens mit den Metall-Thermometern nach der Gleichung (24) und zweitens mit den eingelegten Quecksilber-Thermometern nach (26a).

Bessel hat die Königsberger Basis nach *beiden* Arten berechnet, und gefunden, dass die Quecksilber-Thermometer mehr gaben, nämlich:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für die erste Messung:} \quad + 16,346^\circ = 20^{\text{mm}} \text{ für } 1^{\text{mm}} \\ \text{für die zweite Messung:} \quad + 7,406^\circ = 9^{\text{mm}} \text{ für } 1^{\text{mm}} \\ \text{Mittel:} \quad + 11,876^\circ = 15^{\text{mm}} \text{ für } 1^{\text{mm}} \end{array} \right\} \quad (29)$$

Der Grund dieser erheblichen Unterschiede wurde darin gefunden, dass die eingelegten Quecksilber-Thermometer den Temperatur-Änderungen Morgens und Abends viel rascher folgen, als die massiven und tragen Eisen- und Zinkstangen. Insofern nun diese Stangen ihr eigenes Thermometer sind, wurde ihren Angaben der Vorzug gegeben und die Quecksilber-Thermometer nicht weiter berücksichtigt.

Die Basis wurde in zwei Abschnitten je zweifach hin und her gemessen, und die Berechnung nach den Metall-Thermometern gab folgenden:

Abschnitt	Messung I.	Messung II.	Differenz d	I — II
1.	141,1852 ⁸	141,1839 ⁸		+ 1,3 ^{mm}
2.	1381,1571 ⁸	1381,1632 ⁸		6,1 ^{mm}
Summe	1822,3423 ⁸	1822,3471 ⁸		4,8 ^{mm}

(30)

VI. Festgesetzte Mass-Bestimmungen für den *Besselschen* Apparat.

In ähnlicher Weise, wie wir im Vorstehenden von der Königsberger Messung beschrieben haben, wurden auch später Mass-Bestimmungen zu den in § 11. S. 76 erwähnten Basis-Messungen gemacht, z. B.:

$$\left. \begin{array}{l} 1834 \text{ Königsberg } l = 1729,1167^\circ = 0,56422 k \\ 1846 \text{ Berlin } \quad l = 1729,0999^\circ = 0,55228 k \end{array} \right\} \quad (31)$$

Die nicht unerheblichen Änderungen in diesen Zahlen haben zu der Anschauung geführt, dass die Stangen im Laufe der Jahre ihre molekulare Struktur geändert hätten. „*Publik. d. geol. Inst. Massvergleichungen*“ I, 1872, S. 38–46, Bericht von General *Hager*.

Um das Wesentliche der hierauf bezüglichen Fragen anzuführen, reduzieren wir die verschiedenen Formeln (31) auf den Mittelwert $k = 1,4$, d. h. wir formen so um:

$$\left. \begin{array}{l} 1834 \text{ Königsberg } l = 1728,3268^\circ = 0,56422 (k = 1,4) \\ 1846 \text{ Berlin } \quad l = 1728,3267^\circ = 0,55228 (k = 1,4) \end{array} \right\} \quad (32)$$

entsprechend der Formel $l = L' = m(k - 1,4)$

Nun sind die Absolutglieder fast gleich geworden, während sie vorher bei (31) um 0,0168 Par. Linien = 0,038^{mm} verschieden waren.

Die Absolutglieder in (31) gelten für $k = 0$, was einer Temperatur von etwa $47^{\circ} R$ entspricht, welche beim Gebrauche nie vorkommt, und deswegen ist die Form (32) mit dem Mittelwert $k = 1,4$, entsprechend einer Temperatur von etwa $16^{\circ} R$, zur sachlichen Vergleichung viel mehr geeignet.

Auch die Änderung der Ausdehnungs-Coefficienten m , e , s , welche sich z. B. zwischen den Jahren 1834 und 1846 als Verkleinerung von e und s zeigt, kann ohne die Annahme molekularer Änderungen erklärt werden.

Eine Eigentümlichkeit des Apparates besteht auch darin, dass die Abnützung der äusseren Schneiden die Stangen verkürzt, wie immer bei Abnützung von Endmassen, dass aber eine Abnützung der inneren Schneiden, zwischen welchen der Temperaturkeil k (Fig. 4. S. 77) eingelegt wird, die Stangen scheinbar *verlängert*. Wenn nämlich dieselbe Stangenlänge l nach der Formel (32) zweifach dargestellt ist

$$l = L' - m(k - 1,4) \quad \text{oder} \quad = L'' - m(k' - 1,4)$$

und wenn, durch Abnützung der inneren Schneiden, k' grösser als k ist, so muss auch L'' grösser als L' sein. Wenn also z. B. in (32) die beiden Werte $L' = 1728,3268$ und $1728,3267$ nach Verlauf von 12 Jahren fast gleich sind, so kann doch die wirkliche Länge l bei einer bestimmten Temperatur durch Abnützung der äusseren Schneiden kürzer geworden sein, wenn gleichzeitig eine noch stärkere Abnützung oder Auseinandertreibung der inneren Schneiden stattgefunden hat.

Man vgl. hierüber „Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft“ 1877, S. 150 bis 152, und eine Abhandlung von A. Börsch, „astr. Nachr.“ 99. Band (1881), Nr. 2364. Hierauf bezieht sich auch eine Publikation des königl. preuss. geodätischen Instituts, „die Ausdehnungs-Coefficienten der Küsten-Vermessung“ von Dr. Alfred Westphal, Berlin 1881.

§ 13. Die Göttinger Basismessung.

Wie schon früher in § 11. S. 76 berichtet wurde, zeichnet sich die Göttinger Basismessung vom Jahre 1880 vor den früheren mit dem Besselschen Apparat gemachten Messungen dadurch aus, dass hier zum erstenmal die von General Schreiber vorgenommenen Verbesserungen des Apparates und des Messungs-Verfahrens zur Anwendung kamen.

Verfasser hat damals aktiv an der Basismessung teilgenommen (als Keilleger und Abloter) und hat dadurch unsomehr Veranlassung, diese Messung hier genau zu beschreiben, entsprechend einem bereits in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1880, S. 377–403 veröffentlichten Berichte.

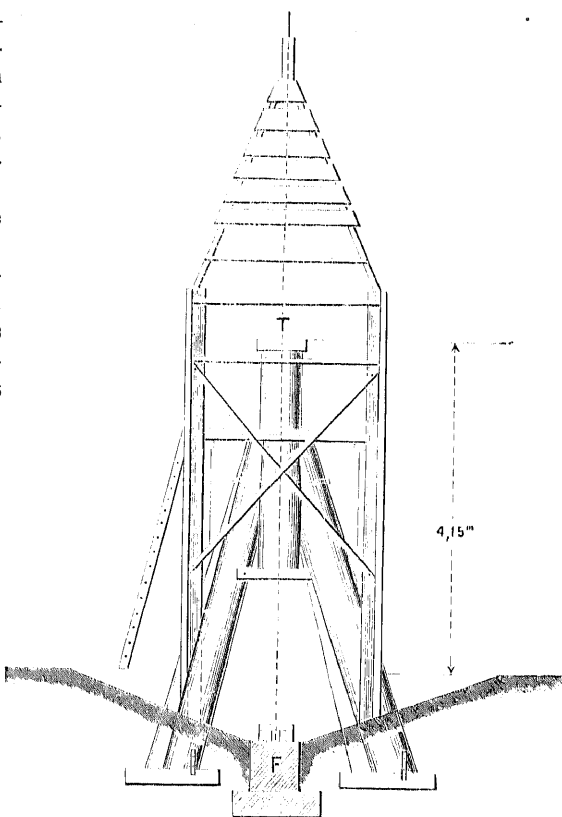
I. Gesamt-Anordnung der Basis.

Das Leinethal, in der Gegend von Göttingen, bietet südlich von dieser Stadt genügend festen und horizontalen Boden östlich der Landstrasse. Nach mehrfachen ^{in dieser} ~~zuerungen~~ ^{zuerungen}, welche sich namentlich auf ein günstig zu gestaltendes Basisnetz ^{in dieser} ~~zuerungen~~ ^{zuerungen} Gegend gewählt mit einer 5^{km} langen Linie. Weitere südliche wäre wohl wünschenswert gewesen, wurde aber durch die Boden-

Das Längenprofil der Basis hat in den ersten zwei Dritteln ziemlich horizontale Erstreckung, während im letzten südlichen Drittel eine Ansteigung bis 31^m über dem Anfang stattfindet. Dort betragen die Steigungen mehrfach bis zu 3°.

Der nördliche und der südliche Endpunkt werden hinsichtlich ihrer Festlegung und trigonometrischen Bezeichnung durch Fig. 1. veranschaulicht. Die Ablesungen des Instrumenten-Standpunktes *T* auf den Basispunkt *F*, beziehungsweise die betreffenden Centrierungen, wurden durch seitlich aufgestellte Theodolite bewirkt, wodurch auch 4 äussere Fundament-Versicherungen beigezogen wurden. Die Länge der Basis wurde vorläufig zu 5193^m bestimmt und dann in 33 meist gleiche Teile geteilt durch Anlage von 32 Zwischen-Festlegungen. Hierzu dienten kupferne Bolzen, mit einzusetzenden stählernen in Nadeln endenden Pinnen mit Fundierung in Cement, wie in Fig. 1. unten bei *F* angedeutet ist. Hieraus ergibt sich der mittlere Wert einer Teilstrecke = 156^m = 10 Stangenlagen, während die erste und letzte Strecke etwas länger waren.

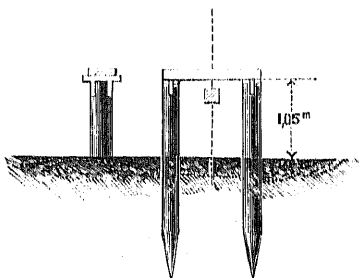
Fig. 1.
Endpunkts-Pyramide mit Hänge-Pfeiler.
(Massstab 1:100.)



II. Gerad-Steckung.

Um die 32 Zwischen-Festlegungen in die Basisrichtung zu bringen, überhaupt um die Basis für die Messung gerade zu stecken, hatte man nach erster vorläufiger Absteckung eine ebenso grosse Zahl von „Galgen“ aufgestellt, je 15,6^m = 1 Lage, nach Süden von den Festlegungen entfernt. Die technische Rüstung dieser Galgen, mit 1,5^m tief eing Bohrten und eingerammten Pfählen von 20^{cm} Dicke, zeigt Fig. 2. Die 35^{cm} breiten und 9^{cm} dicken Deckbohlen dieser Galgen dienten bei der durchlaufenden Geradrichtung zum Aufstellen der Theodolite, beziehungsweise der Signalscheiben, beide centrisch über einge-

Fig. 2.
Geradrichtungs-Galgen.
(Massstab 1:100.)



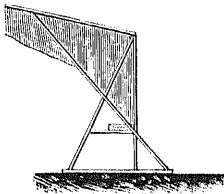
schlagenen Messingpinnen. Zur Auffindung der Lagen für diese Pinnen, d. h. für die eigentliche Geradrichtung wurde im Wesentlichen das Verfahren angewendet, Zwischenpunkte durch Messung von 180° -Winkeln einzuschalten, wie wir schon in Band II, S. 658 gezeigt haben.

Es wurde zuerst die Mitte gegen die beiden Endpunkte eingerichtet, dann der erste Viertelpunkt gegen den Anfang und die Mitte u. s. w.

Nach dieser Einrichtung aller Galgenpinnen wurde nochmals zur unabhängigen Versicherung eine durchlaufende Winkelmessung über alle Galgen hinweg, je mit Sichtung auf den vorhergehenden und den nachfolgenden Galgen, vorgenommen, woraus sich durch Rechnung ein Polygon von 32 Brechungspunkten zwischen dem 0^{ten} und dem 33^{ten} Punkte ergab, welches eine grösste (westliche) Abweichung von 25^{mm} ergab, was auf 5193^m Länge ausser Betracht bleibt.

Zwischen je 2 Galgen wurden noch 4 Pflöcke (in Abständen von 33,2^m) geschlagen, zum Spannen einer Schnur, längs welcher die Stangen-Unterlagen vorläufig eingerichtet werden konnten, während die endgiltige Einweisung der Stangen selbst von den Galgen aus, beziehungsweise von Zwischenstationen aus, durch Theodolite besorgt wurde. Dabei dienten Zelte von der Form Fig. 3. zum Schutz gegen die Sonne.

Fig. 3.
Schutz-Zelt.
(Massstab 1:100.)



Zum Einweisen der einzelnen Stangen dienten die schon früher in § 11. S. 79 erwähnten, in Fig. 3. Seite 77 rechts gezeichneten Aufsatz-Scheibchen. Wir denken uns, der Einweise-Theodolit sei auf einem Galgen (Fig. 2.) oder einer Zwischenstation aufgestellt, und das vordere Ende einer Stange sei bereits durch Fadenwinkeln so genau eingewiesen, dass der Faden des Fernrohrs in das mittlere weisse, 1^m grosse Feld der Scheibe fällt. Genauer wird *nicht* eingewiesen, sondern der noch übrige Rest des Einweisungs-Fehlers wird geschätzt, aufgeschrieben und später in Rechnung gebracht. Wenn zwei aufeinander folgende Stangen-Enden die Ablesungen d und d' geben, so ist die zugehörige Geradstreckungs-Reduktion bekanntlich $= \frac{(d-d')^2}{2l}$, wenn l die Stangenlänge selbst ist ($l = 3,95^m$).

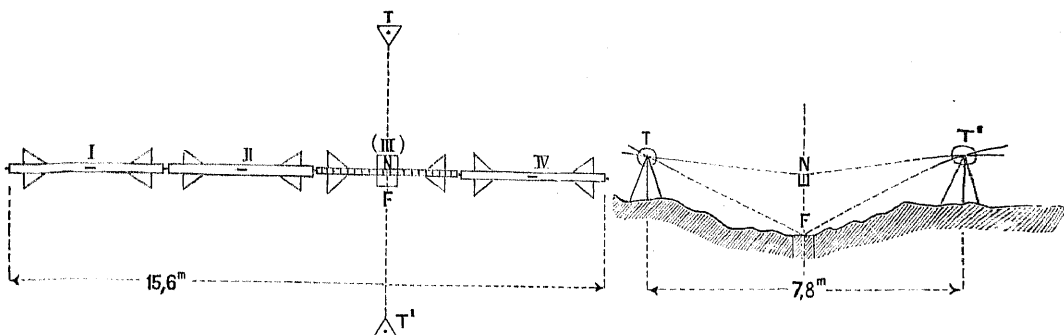
Diese Beträge sind immer sehr klein, sie dürfen aber nicht vernachlässigt werden, weil sie sich niemals gegenseitig aufheben, sondern alle in *demselben* Sinne, nämlich vergrössernd wirken. Die ganze Basis hat etwa 1315 Stangen, folglich, wenn man den Wert $\pm 2^{\text{mm}}$ als mittlere Stangen-Ausweichung und 0,0005^{mm} als mittlere Reduktion annimmt, eine Gesamtreduktion etwa $= 1315 \times 0,0005 = 0,66^{\text{mm}}$ oder etwa 0,13 Milliontel der Länge, ein Betrag, der sich aber sofort auf das Vierfache erhöht, wenn die obige kleine Annahme $\pm 2^{\text{mm}}$ für 1 Stange auf den doppelten Wert kommt.

III. Ablotungen.

Die Anordnung der zahlreichen Ablotungen, welche an den Endpunkten der Basis, an den Zwischen-Festlegungen und an den Unterbrechungen über Nacht und über Mittag nötig werden, ist von wesentlichem Einfluss auf den Gesamtverlauf der Messung und die Zuverlässigkeit ihrer Resultate. Das unmittelbare mechanische Abloten mittelst Fadenlotes ist wegen der Pendelschwingungen unbequem und ungenau. Viel sicherer vollzieht sich das *optische* Abloten mit Hilfe eines seitlich aufgestellten Theodolits. Dieses wurde schon bei der Braaker Basis angewendet und ist für die

Göttinger Basis in die Form gebracht worden, welche wir nun im Anschluss an Fig. 4. beschreiben.

Fig. 4.
Abloten.



Man hat zu unterscheiden, ob ein Stangenende oder ein Zwischenpunkt einer Stange auf eine Boden-Festlegung abgelotet werden soll; der letztere Fall ist durch Fig. 4. angedeutet.

Es stellt I, II, (III), IV eine Stangenlage vor, es ist aber in diesem Falle (III) keine gewöhnliche Stange, sondern die besondere, mit einer oberen Teilung versehene Festlegungs-Stange, welche hier zur Ablotung auf den Punkt *F* dient.

Nachdem die gewöhnliche Messung bereits über *F* hinweggegangen ist, während jedoch die benachbarten Stangen II und IV noch *unverrückt* liegen, wird III vorsichtig herausgenommen und durch (III) ersetzt. Durch Ausziehen von Schlitten-Schiebern hinten und vorn kann man mit dieser Stange (III) die *ganze* Länge zwischen II und IV (nämlich die Länge der Stange III samt den 2 Keilmassen) ausfüllen, und folglich den Punkt *F* als Projektion *N* auf der Teilung von (III) angeben. Das hierzu nötige Herauf-Loten von *F* geschieht durch 2 seitlich aufgestellte Theodolite *T* und *T'*. Es empfiehlt sich jedoch, nicht direkt den Auflote-Punkt *N* auf der Stange (III) zu bestimmen, sondern durch vorläufiges Herauf-Projizieren einen anderen genäherten Punkt *N'* zu ermitteln, und dann noch den kleinen Horizontalwinkel zwischen *F* und *N* genau zu messen und das ihm entsprechende lineare Mass in Rechnung zu bringen.

(Einige dabei zu beachtende Einzelheiten s. „Zeitschr. f. Verm.“ 1880, S. 385 bis 386.)

Da alle diese Ablotungen *doppelt*, nämlich durch *zwei* symmetrisch seitwärts gestellte Theodolite ausgeführt wurden, ergab sich eine Versicherung unmittelbar. Die 34 Ablotungen der ersten Basismessung gaben eine mittlere Differenz von nur 1,51". also für das Mittel aus beiden Messungen nur einen mittleren Fehler von 0,76", was auf 3,90m Theodolit-Abstand einen mittleren linearen Fehler von nur 0,014^{mm} giebt. Die Instrumente waren 21^{cm}-Mikroskop-Theodolite, sonst zu Triangulationen zweiten Rangs gebraucht.

Zwar sind nicht alle bei den fraglichen Ablotungen mitwirkenden Vorrichtungen, Ablesungen an der Stange (III) u. s. w. ebenso genau, doch sind die Ablotungen im Ganzen auf 0,1^{mm} sicher, wobei noch zu beachten ist, dass diese Fehler der Zwischenpunkte sich nicht fortpflanzen und in das Gesamtbasis-Resultat überhaupt nicht eingehen.

In ähnlicher Weise wie diese Ablotungen an den regelmässigen Festlegungen wurden auch die Unterbrechungs-Ablotungen Mittags und Abends gemacht.

IV. Die Keilmessung.

Das Einlegen eines gläsernen Messkeiles (vgl. Fig. 4. und Fig. 5. § 11. S. 77) zwischen die Schneiden, und das Ablesen der Teilung ist nicht so einfach, als dieses auf den ersten Blick scheinen könnte; es ist eine gewisse Übung dazu erforderlich. Vor Allem muss man sich hüten, den Keil zu stark „einzuschieben“, er soll nur „einggelegt“ werden, wobei die erste Berührung mehr wie eine Art Kleben als wie ein Druck gefühlt werden soll. Wird zu stark eingedrückt, so entstehen erhebliche konstante Fehler, deren Existenz schon die Brüsseler Kommission 1854 fand.

Im preussischen Generalstab hat sich eine feine Art der Keillegung seit *Bessel* durch Tradition erhalten, und die besonderen bei Göttingen angestellten Versuche, über welche wir nachher berichten werden, haben ergeben, dass bei Befolgung dieser vorsichtigen Keillegung die konstanten Fehler äusserst kleine Beträge haben.

Was zunächst den mittleren unregelmässigen Keillege- und Ablesefehler betrifft, so fand man denselben aus Wiederholungen der Metall-Thermometer-Messungen $= \pm 1,8'$ und aus Wiederholungen der Intervallen-Messungen $= \pm 2,3'$. Hierbei soll mit t der Wert 0,001 Par. Linie bezeichnet werden; es ist nämlich $1'$ die letzte noch wahrzunehmende Grösse, welche dem geschätzten Zehntel der Keilteilung entspricht. Diese Genauigkeit von etwa $\pm 2' = \pm 0,005^{mm}$, mit freier Hand und mit blossem Auge erreicht, ist sehr überraschend.

Die Metall-Thermometer-Fehler gehen in die Basislänge nur etwa mit ihrem halben Betrag ein, man hat also für eine Stangenlänge nur etwa $\sqrt{0,92} \pm 2,32 = \pm 2,5' = \pm 0,0056^{mm}$ in Rechnung zu nehmen, oder für 1^{km} Länge mit rund 250 Stangen den mittleren Messungsfehler $= \pm 0,0056 \sqrt{250} = \pm 0,09^{mm}$. Thatsächlich ist der mittlere unregelmässige Basismessungs-Fehler, aus Doppelmessungen berechnet, etwa $= \pm 1^{mm}$ pro 1^{km} , d. h. 10 mal so gross, als der soeben a priori gefolgerte. D. h. der nackte mittlere unregelmässige Keilmessungs-Fehler bildet nur einen verschwindend kleinen Teil der wirklichen Fehler. Erheblichere Beträge werden erzeugt durch Gleiten der Stangen auf ihren Böcken, sowie durch Ungleichheit der Temperaturen in den Eisen- und Zinkstangen.

Zur Bestimmung des Keildrucks wurde die in Fig. 5. angedeutete Einrichtung getroffen, es ist nämlich auf dem rechten Ende der Stange II ein Schrauben-Mikroskop

Fig. 5.



befestigt, dessen Gesichtsfeld auf das linke Ende der Stange III hinüberreicht, und eine dort angebrachte feine Teilung einzustellen gestattet. Jede relative Bewegung der zwei Stangen

II und III kann mit dieser Vorrichtung leicht auf $\pm 0,1'$ genau gemessen werden.

Es wurde dadurch gefunden, dass *stärkere* absichtliche Keildrücke zweierlei Wirkung haben, erstens grösstenteils elastisches Zurückgehen, zweitens aber eine dauernde Verschiebung von etwa $0,4'$.

Die schwachen Keildrücke, wie sie bei der eigentlichen Basismessung vorkamen, hatten eine dauernde Wirkung von nur im Mittel $0,29'$ oder $0,17$ Milliontel der Länge.

V. Temperatur-Verhältnisse.

Temperatur-Bestimmung mit dem Quecksilber-Thermometer findet bei der *Besselschen* Messmethode unmittelbar nicht statt. Indessen besteht doch ein gewisses Interesse, auch die eigentlichen Stangen-Temperaturen zu kennen, und zu diesem Zweck zuerst eine Beziehung zwischen dem Keilmass k und dem Temperaturgrad R eines Quecksilber-Thermometers herzustellen; so hat *Bessel* in der „*Gradn. in Ostpreussen*“ S. 29 (vgl. unseren § 12. Gleichung (25) S. 84) für das Mittel der 4 Stangen die Beziehung gegeben:

$$k = 2,1249 - 0,045489 R, \quad \text{oder} \quad R = 46,712^\circ - 21,983 k$$

wo k das Keilmass in Par. Linien und R die entsprechende Quecksilber-Thermometer-Angabe in R° bedeutet.

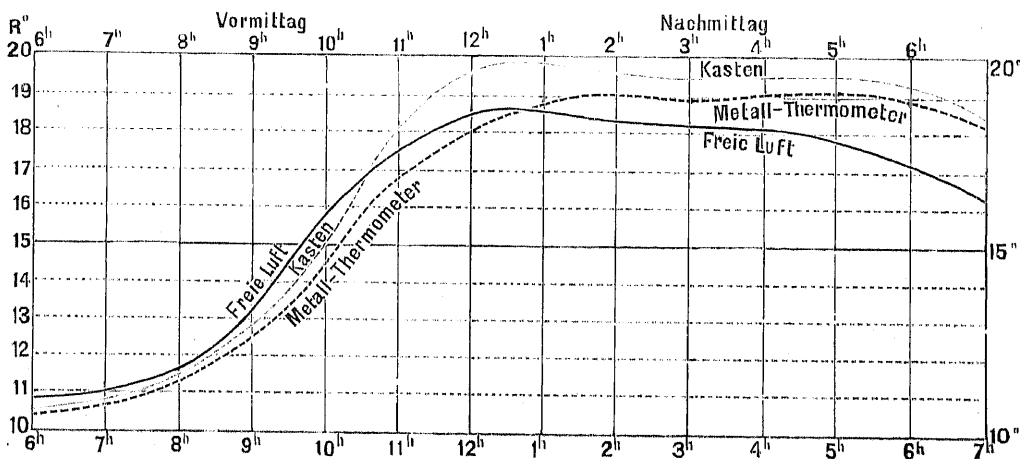
Bei Göttingen machte ich an den 2 Tagen der intensivsten Messung, 17. und 18. August, einige Versuche zur Vergleichung mit Quecksilber-Thermometern.

Es wurden etwa halbstündlich folgende 3 Aufzeichnungen gemacht:

1. Temperatur der freien Luft durch Schleuder-Thermometer.
2. Temperatur des Innenraums der Kästen, an den eingelegten Thermometern durch die Glasverschlüsse abgelesen.
3. Metall-Thermometer-Keilmasse für die 4 Stangen.

Die Verhältnisse waren auch insofern andere, als bei der ersten Königsberger Vergleichung von 1834, als damals die mit heller Ölfarbe angestrichenen hölzernen Stangenkästen unmittelbar den Sonnenstrahlen ausgesetzt wurden, während bei Göttingen die Kästen noch Überzüge von weissem Schirting hatten, welche durch die Erfahrungen bei der Braakschen Messung, 1871, als nützlich erkannt, in der That einen erheblichen Schutz gegen strahlende Wärme gewähren.

Fig. 6.
Gang der Temperaturen bei der Göttinger Basismessung:
(Mittel vom 17. und 18. August 1880.)



Die Ergebnisse dieser Vergleichungen sind in vorstehender Figur 6. dargestellt. Die Original-Beobachtungen hiezu wurden in der „*Zeitschr. f. Verm.*“ 1880, S. 394

veröffentlicht, und zwar 17. und 18. August 1880 im Allgemeinen halbstündlich. Die Beobachtungen dieser zwei Tage wurden zuerst gemittelt und wenig ausgeglichen, wodurch folgende Zusammenstellung erhalten wurde:

Göttingen 17.—18. August 1880.

	Tageszeit	Luft	Kasten	Metall-Thermometer
Morgen	6 ^h	10,7° C	9,9° C	10,0° C
	7	10,8	10,8	10,6
	8	11,6	11,6	11,2
	9	13,1	12,6	12,2
	10	15,8	14,8	14,2
	11	17,4	17,8	16,6
Mittag	12	18,4	19,5	17,8
	1	18,5	19,7	18,6
	2	18,3	19,5	19,0
	3	18,1	19,4	18,9
	4	18,0	19,5	19,0
	5	17,7	19,4	19,0
	6	17,1	19,2	18,8
Abend	7	16,0	18,4	18,2

Diese Werte wurden nochmals ein wenig graphisch ausgeglichen, und dann wurde Fig. 6. § 91. darnach aufgetragen.

Der Gang der Temperaturen ist im Wesentlichen dieser: Unmittelbar vor dem Erscheinen der Sonne haben die Luft, der Kasten und die Stangen infolge der nächtlichen Ausgleichung nahezu gleiche Temperatur; sobald die Sonne zu wirken beginnt, hebt sich die Lufttemperatur und *nachfolgend* auch allmählich die Temperatur des Kastens und der Metallstangen; dann beginnt der Kasten nach und nach als Wärmebehälter zu wirken und teilt auch den Stangen seinen Wärmeverrat mit, so dass Nachmittags und Abends der Kasten und die Stangen wärmer als die Luft sind. Die Unterschiede zwischen dem Quecksilber-Thermometer und dem Metall-Thermometer, welche über 1° gehen, zeigen sich hier deutlich; dagegen über den Temperatur-Unterschied der Eisenstange und der Zinkstange giebt dieser Versuch keine Auskunft.

§ 14. Neuere Basis-Apparate mit isolierten Mikroskopen.

Der Grundgedanke eines Massstabs zwischen festen Mikroskopen, welche von dem Massstabe isoliert, an dessen Enden aufgestellt sind, wurde wie es scheint, von verschiedenen Seiten unabhängig erfasst. Wir beschreiben hier die wichtigsten Ausführungen, welche dieser Grundgedanke durch die Mechaniker *Brunner* und *Repsold* unter Anleitung der Geodäten *Ibanez* und *Comstock* erfahren hat.

I. Der ältere spanische Basis-Apparat.

General *Ibanez* liess im Jahre 1856 für seine spanische Landes-Aufnahme einen Basis-Apparat durch Mechaniker *Brunner* in Paris konstruieren, mit dem er mehrere Grundlinien, namentlich im Jahre 1858 die 14664^m lange Grundlinie bei Madrilejos mass.

Wir geben die Beschreibung des Basisstabes nach dem Werke: „Expériences faites avec l'appareil à mesurer les bases appartenant à la Commission de la carte d'Espagne, par *Laussedat*, Paris 1860“.

Fig. 1.

Brunners Basis-Messstange.
Querschnitte in natürlicher Grösse.

Fig. 1a.
Feste Verbindung in der Mitte.

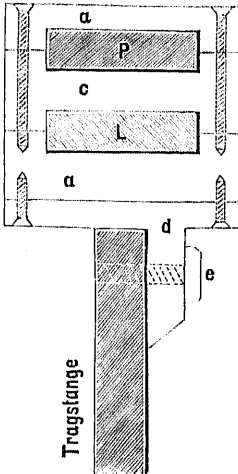


Fig. 1b.
Allgemeiner freier
Querschnitt.

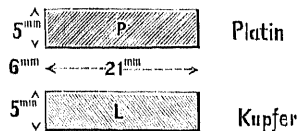
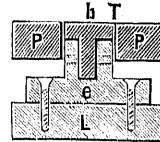


Fig. 1c.
Ausdehnungsbestimmung an den Enden.



Die beiden Stäbe von Platin und Kupfer haben gleiche Dimensionen, nämlich wie in Fig. 1b. angegeben ist, je 21^{mm} Breite und 5^{mm} Höhe, mit einem Zwischenraum von 6^{mm}. Fig. 1b. zeigt den normalen Querschnitt, wie er überall der Länge nach ist, wo keine Berührung der beiden Stäbe stattfindet.

In der Mitte sind beide Stäbe fest verbunden, wie in Fig. 1a. angegeben ist; zwei Rahmen *a* mit einem Mittelstück *c* sind seitlich fest zusammengeschraubt und halten damit die Platinstange *P* und die Kupferstange *L* fest zusammen. Fig. 1a. zeigt auch eine Tragstange, welche der ganzen Länge nach durchgeht, mit einem Querschnitt von umgekehrter **T**-Form, ebenso wie in der späteren Fig. 4. S. 96.

Endlich zeigt noch Fig. 1c. den Querschnitt an dem einen Ende, wo die gegenseitige Ausdehnung zwischen Platin und Kupfer gemessen wird.

Hier ist der Platinstab in seinem mittleren Drittel durchbrochen und durch ein besonders **T**förmiges Platinstück *b* ausgefüllt, das zwischen *P* und *P* lose gleitet, dagegen nach unten fest mit *e* und *L* verbunden ist.

An der Fuge zwischen *b* und *P* befindet sich auf der horizontalen Oberfläche von *b* und von *P* eine Teilung *T*, an welcher man die relative Ausdehnung der Stäbe *L* und *P* mikroskopisch ablesen kann.

II. Basis-Apparat des geodätischen Instituts.

Etwa im Jahre 1876 hat das geodätische Institut einen Basis-Apparat von Mechaniker *Brunner* in Paris bestellt und 1878 geliefert erhalten. Dieser Apparat hat im Wesentlichen dieselbe Konstruktion, wie der soeben beschriebene spanische Apparat von General *Ibanez*. Der Apparat des geodätischen Instituts hat einen Stab, der aus Platin-Iridium und Messing zusammengesetzt ist. Die erste Mitteilung hierüber giebt der Generalbericht der Europ. Gradn. für 1878, S. 99, mit einem Anhang „Sur la construction de la règle géodésique internationale, par M. M. *H. Sainte-Claire Deville* et *E. Mascart*“ und Fortsetzung in dem Gen.-Ber. d. Europ. Gr. für 1879, Anhang.

Mit diesem Apparat wurden vom geodätischen Institute bis jetzt zwei Grundlinien-Messungen ausgeführt, nämlich 1879 Nachmessung der 2763 Meter langen Basis von Strehlen in Schlesien, welche früher 1854 mit dem *Besselschen* Apparate gemessen worden war, ferner 1880 Nachmessung der 2336 Meter langen, früher 1846 für die

Küsten-Vermessung angelegten Grundlinie bei Berlin. Einiges Weitere hierüber werden wir später in § 25. und § 26. angeben.

III. Der neue, vereinfachte spanische Basis-Apparat.

Während die Genauigkeit der Messungen mit dem *Brunnerschen* Apparat genügend war, fand man in Spanien die Geschwindigkeit, nämlich etwa 70 Meter für 1 Stunde, nicht befriedigend.

Es wurde deswegen nach Angabe von General *Ibanez* im Jahre 1864 ein neuer einfacherer Apparat, jedoch im Wesentlichen nach dem ersten Grundgedanken konstruiert, mit dem nicht nur von 1865—1879 8 weitere spanische Grundlinien, sondern dann auch von 1880—1881 drei Linien in der *Schweiz* gemessen wurden. 2,4^{km} bei Aarberg, 2,54^{km} bei Weinfeldern und 3,2^{km} bei Bollinzona.

Wir beschreiben zuerst im Anschluss an Fig. 2. und Fig. 3. S. 95 die Anordnung des Apparates und den Gang der Messung im Allgemeinen, und benützen dabei zunächst die Broschüre von Dr. *Koppe*: „Der Basis-Apparat des Generals *Ibanez* und die Aarberger Basismessung, Zürich 1881“, nebst einigen dankenswerten Privatmitteilungen von *Koppe*.

Es wird ein Massstab von 4^m Länge angewendet, welcher in Fig. 3. durch *ab* angedeutet ist, und auf 2 Stativen *S*₁ und *S*₂ aufliegt.

Unabhängig von dem Massstab und seinen Stativen *S*₁ *S*₂ sind zwei Mikroskope *M*₁ und *M*₂ auf besonderen Stativen *T*₁ und *T*₂ an den Enden des Massstabes aufgestellt. Die Mikroskope *M*₁ und *M*₂ werden auf die Endstriche *a* und *b* (oder nahe den Endstrichen) eingestellt, dann wird der Massstab um seine eigene Länge von rechts nach links vorgerückt, so dass *a* nach *b* kommt und die Stative *S*₂ und *S*₁ in Anwendung kommen; *M*₂ bleibt stehen, und *M*₁ rückt um die zweifache Massstablänge vor, so dass es nun vorderes Mikroskop wird u. s. w.

Der Massstab *ab* bewegt sich hierbei nicht in der abgesteckten und festgelegten Geraden *AB* selbst, sondern in einer Parallelen *ab* zu *AB*; was offenbar gleich gültig ist.

Die Messstange *ab* besteht aus Eisen, und ist der freien Luft ausgesetzt, ohne Schutz durch einen hölzernen Kasten. Dagegen wird der Apparat im Ganzen durch *Zelte* geschützt, welche mit Leinwand bespannt gegen direkte Sonnenstrahlen und auch gegen leichten Regen Schutz gewähren. Die Zelte sind tragbar, und werden dem Fortschritte der Messung entsprechend stets hinten abgenommen und vorne wieder angesetzt.

Die Anordnung im Ganzen zeigt Fig. 2. S. 95.

Übergehend zu den Einzelheiten betrachten wir in Fig. 4. S. 96 zuerst den Querschnitt der Stange; derselbe hat umgekehrte **T**-Form, so dass ein breites Auflager entsteht. Der Stab ist 4^m lang und 50^{kg} schwer.

Zur Temperatur-Bestimmung dienen gewöhnliche Quecksilber-Thermometer, welche in Fig. 4. S. 96 rechts oben durch *T* veranschaulicht sind und auch in Fig. 3. S. 95 der Länge nach an 4 Stellen durch *T*₁, *T*₂, *T*₃, *T*₄ angedeutet wurden.

Die mit Quecksilber gefüllten Glaskugeln dieser Thermometer sind mit dem Eisen der Stange in unmittelbarer inniger Berührung und sind ganz in Eisenspäthne eingebettet. Die Glasröhren der Thermometer (in Fünftelgrade geteilt) werden durch übergedeckte Glasplatten von Aussen abgelesen.

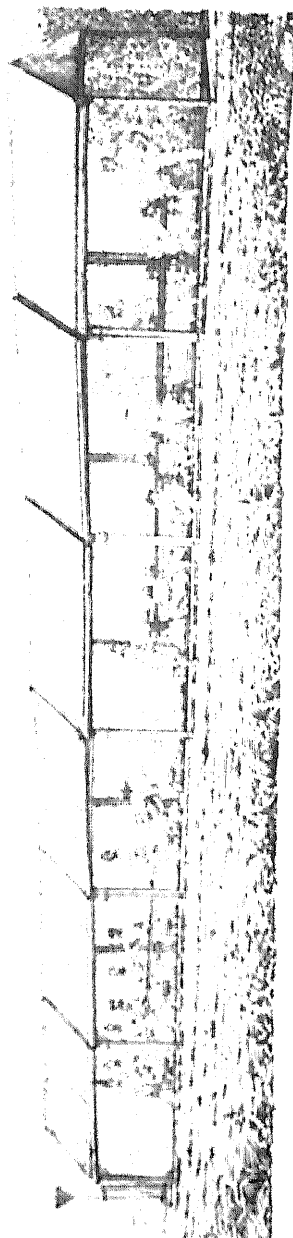
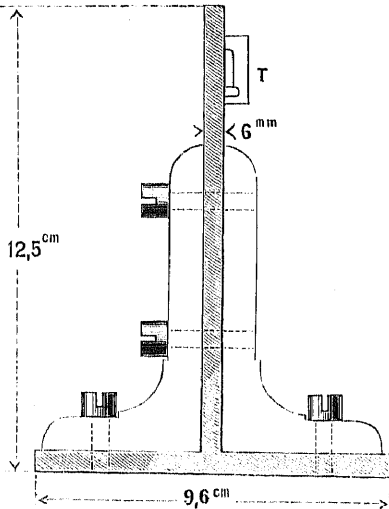


Fig. 4.
Querschnitt des Massstabes
in halber natürlicher Grösse.



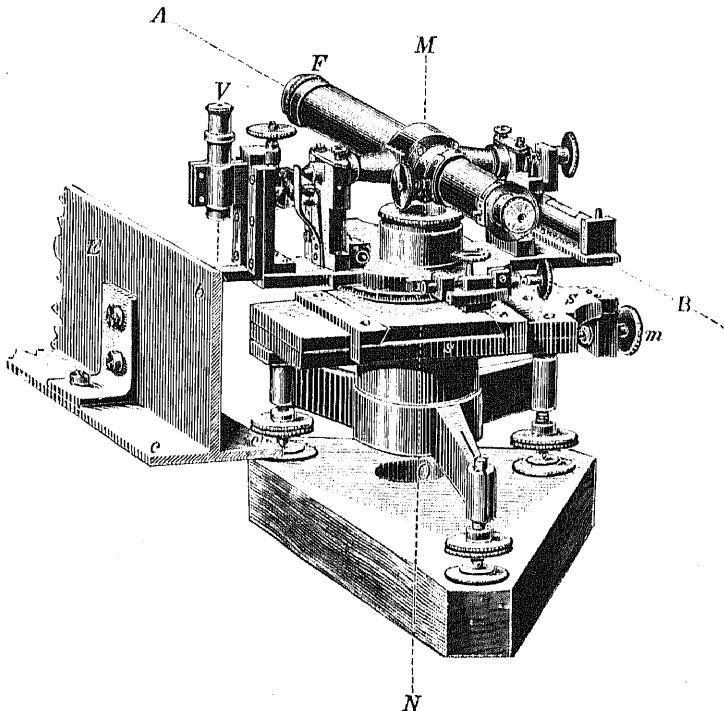
Zur Neigungs-Bestimmung der einzelnen Stangenlagen dient eine in der Mitte angebrachte Libelle *L* (Fig. 3. S. 95).

Die Messstange ist auf ihrer oberen schmalen Fläche mit einer *Teilung* versehen, früher der ganzen Länge nach in Centimeter, bei der neueren vereinfachten Anordnung nur noch von 0,5 zu 0,5 Meter, und zwar durch feine Striche auf eingelegten Platin-Plättchen.

Nun haben wir das in Fig. 5. abgebildete Instrument, „Mikroskop-Theodolit“ genannt, zu betrachten, welches dreien Zwecken gemeinsam dient, nämlich:

- 1) Abloten auf die Festlegungs-Bolzen in Erdboden,
- 2) Einrichtung in die abgesteckte Basis-Gerade,
- 3) Mikroskopische Einstellung oder Ablesung auf den Stangen-Enden.

Fig. 5.
Mikroskop-Theodolit (Massstab etwa 1 : 5).



Zu diesen drei Zwecken, denen der Mikroskop-Theodolit zu dienen hat, ist im Einzelnen zu bemerken:

- zu 1) Wenn der Mikroskop-Theodolit als *Abloter* dienen soll, so wird statt des horizontalen Fernrohrs *F* Fig. 5. ein *vertikales* Fernrohr eingelegt, welches durch das Loch *O* im Stativ nach der Vertikalen *MN* eingerichtet werden kann. Dabei stellt man das Instrument zuerst genähert lotrecht über *N*, und hat dann Schlittenführungen *s* und Schraubenbewegungen *m* nach zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen (zweite Schraube *m* *jenseits* in Fig. 5 nicht sichtbar).
- zu 2) Wenn es sich um Einrichtung in die Gerade in horizontalem Sinne handelt, so wird das horizontale Fernrohr *F* Fig. 5. vor- oder rückwärts nach *A* oder *B* eingerichtet. Soll die Mitte *M* selbst Zielpunkt werden, so wird das Fernrohr *F* ausgehoben und eine Zielmarke in die Axenlager eingelegt.
- zu 3) Die mikroskopische Einstellung auf die Messstange ist in Fig. 5. bei *V* und *b* links angedeutet. *V* ist ein vertikales Mikroskop, welches rechtwinklig zur Fernrohraxe *AB* angebracht ist und auf die schmale Oberfläche *b* des eisernen Massstabes *E* eingestellt werden kann. Den Massstab *E* haben wir mit seinem Querschnitt *bcc'* in Fig. 5. angedeutet; die untere Fläche *cc'* hat hier keine Unterstützung, weil der Massstab seine zwei besonderen Stativ hat (vergl. *S*₁ und *S*₂ in Fig. 3. S. 95; jedoch sind die Einzelheiten der Stativ a. s. w. in Fig. 5. S. 96 und Fig. 3. S. 95 nicht ganz übereinstimmend, insofern es sich nur um Veranschaulichung des Prinzips handelt).

Der Gang der Messung lässt sich nun vollends leicht beschreiben:

Die Aarberger Basis von 2400^m Länge war durch drei grosse dreieckige Scheiben-Baken (s. Fig. 2. S. 95 links) über der Erde bezeichnet, und wurde durch Messingbolzen in Quadern unterhalb festgelegt.

Die Linie befand sich auf gerader und ebener Landstrasse, die Stativ wurden ohne weiteres auf den Strassenboden gestellt. Der Strassenverkehr wurde während der Dauer der Messung gesperrt.

Zu gleichzeitiger Verwendung kamen:

- 4 Mikroskop-Theodolite,
- 4 Auflagdreifüsse für die Messstange,
- 6 grosse Holzstativ (*T* Fig. 3. S. 95) für die Mikroskop-Theodolite,
- 10 kleine Holzstativ (*S* Fig. 3. S. 95) für die Messstange,
- 2 hölzerne je 4 Meter lange Latten zum Vor-Messen.

Das Personal war:

- 2 Beobachter mit Gehilfen zum Vorwärtstragen und vorläufigen Stellen der Holzstativ,
- 2 Beobachter mit Gehilfen zum endgültigen Stellen der Holzstativ,
- 4 Beobachter an der Messstange zum Einstellen der Null- und Endstriche unter die Mikroskope, zum Ablesen der 4 Thermometer und der Libelle,
- 2 Gehilfen zum Vorwärtstragen der Stange (die Fig. 2. S. 95 zeigt 15 Mann).

Über die Messungs-Geschwindigkeit teilt *Koppe* folgendes mit:

Am 22. August 1880, Morgens 4 Uhr, wurde zur ersten Basismessung ausgerückt. Das Wetter war trübe und neblig und den Beobachtungen wenig günstig. Erst nach 5 Uhr war es hinreichend Tag geworden, um die Baken und die Mikroskope einstellen zu können. Trotz des feinen niederrieselnden Regens, der sich nach und nach zu einem tüchtigen Landregen entwickelte, begann die Messung 5 Uhr 48 Minuten und wurde programmässig bis 800^m durchgeführt. Nach drei Tagen war die erste Messung der Aarberger Basis beendet; gleichzeitig wurden in Entfernungen von 400^m zu 400^m feste Punkte errichtet.

Am Nachmittage des 24. August wurden die Instrumente, die Zelte und sämtliche Gerätschaften nach dem Basisanfang zurücktransportiert; alle Apparate einer sorgfältigen Prüfung unterworfen und noch an denselben Abende die nötigen Vorbereitungen getroffen, um am folgenden Morgen die Kontrollmessung sofort beginnen zu können. Am 25., 26. und 27. August wurde, wie an den drei vorhergehenden Tagen, wieder um je 800^m vorgerückt, alle Fixpunkte eingemessen und so trotz der Ungunst der Witterung, die namentlich durch Nebel die Sichtbarkeit der Richt-Baken für das Einweisen sehr beeinträchtigte, auch die zweite Messung in drei Tagen beendet. Die Zeiten, welche auf die Messung der einzelnen Sektionen verwandt wurden, sind folgende:

Sektion	I. Messung		II. Messung	
1. = 400 Meter	2	Stunden 47 Min.	2	Stunden 6 Min.
2. = 400 "	2	" 44 "	1	" 59 "
3. = 400 "	1	" 27 "	2	" 24 "
4. = 400 "	2	" 26 "	2	" 8 "
5. = 400 "	2	" 21 "	2	" 31 "
6. = 400 "	2	" 49 "	2	" 49 "

Mittel: 400 Meter 2 Stunden 36 Min. 2 Stunden 20 Min.

Die zweite Messung geht im Allgemeinen etwas rascher vor sich als die erste, weil das Setzen der Fixpunkte bei der ersten Messung einige Zeit in Anspruch nimmt. Zwischen dem ersten und dem zweiten Teil der jedesmaligen Tagesmessung wurde eine Stunde Pause gemacht.

Die grösste Neigung der Messstange während dieser Messungen betrug 1,5°, die Korrektion für die Neigung im Mittel nahe 1^m für 1 Sektion. Ausgesprochen ungünstig für die Messung war der erste Beobachtungstag, namentlich während der Messung der zweiten Sektion, indem der strömende Regen die Zelte völlig durchweichte. Die Differenz ist bei dieser Sektion die grösste.

(Über die Genauigkeit werden wir in § 25. berichten.)

Zum Schlusse giebt *Koppe* noch die Mitteilung eines Ausspruchs von General *Ibanez* selbst über seine Basis-Apparate:

„Die einfache Einrichtung meines Apparates und die Art seiner Anwendung ist das Ergebnis der Erfahrungen, welche ich bei *neun* in Spanien ausgeführten Basis-Messungen zu machen Gelegenheit hatte. Bei meinem ersten Apparate waren alle denkbaren Korrektions-Vorrichtungen angebracht. Die Messstange bestand aus zwei Metallen, deren Längen Unterschied infolge verschiedener Ausdehnung durch die Wärme mit einer Mikrometer-Schraube gemessen wurde. In gleichen Intervallen eingelassene Quecksilber-Thermometer lieferten eine zweite, von der ersten unabhängige Bestimmung

der Temperatur. *Es zeigte sich schliesslich, dass die Quecksilber-Thermometer die Temperatur der Messstange leichter und besser bestimmen lassen, als das Metall-Thermometer und deshalb habe ich erstere allein beibehalten.* Die Sucht, jedes Mass und jede Korrektion gesondert mit der Mikrometer-Schraube messen zu wollen, wie wir es erstmals thaten, führt zu grossem Zeit- und Arbeits-Aufwande ohne reellen Gewinn an Genauigkeit; und grössere erreichbare Vorteile gehen durch die komplizierte Art und längere Dauer der Messung verloren. Das beste Mittel, dem Anhäufen der Beobachtungs-Fehler in ausgedehnten Dreiecksnetzen entgegen zu arbeiten, ist die Messung einer ausreichenden Zahl von Grundlinien. Dieses Mittel kann aber um so eher in Anwendung gebracht werden, je mehr der Messapparat mit einfacher Einrichtung und Handhabung ausreichende Genauigkeit der Resultate verbindet.“

IV. Der amerikanische Basis-Apparat von Repsold.

Die nord-amerikanischen Vermessungen im neueren Sinne begannen etwa 1841; von da bis 1874 wurden 9 Grundlinien gemessen und im Jahre 1876 wurde ein neuer Basis-Apparat von *Repsold* in Hamburg angeschafft, mit welchem unter Leitung von *Comstock* dann drei Grundlinien, bei Chicago 1877, Sandusky 1878, und Olney 1879 gemessen wurden.

Nachricht hierüber giebt das grosse amtliche Werk: „Professional papers of the corps of engineers, U. S. Army, Nr. 24. Report upon the primary triangulation of the United States Lake Survey, by Lieut. Col. *C. B. Comstock*, Corps of Engineers, Brevet Brigadier-General, U. S. A., aided by the Assistants on the survey. Washington: Government printing office. 1882.“ (vgl. auch „Zeitschr. f. Verm. 1884“, S. 533 bis 547 und 1888, S. 385—395.)

Fig. 6.
Repsold-Comstock's Messstange.
Querschnitt in natürlicher Grösse.

Der Grundgedanke des *Repsold-Comstock'schen* Apparates ist derselbe wie beim *Brunnerschen* (S. 93), nämlich eine Messstange, deren Enden zwischen festen Mikroskopen abgelesen werden.

Die Messstange besteht aus der Verbindung von Zink und Stahl, wie in Fig. 6. angegeben ist.

Die aus Zink und Stahl zusammengesetzte Messstange ist in eine Röhre von 12,5^{mm} Durchmesser eingeschlossen und ragt an den Enden derselben hervor.

Dieses ist durch die nachfolgenden Fig. 7. bis 12. S. 99—102 dargestellt.

Die zwei Platinplättchen *c c* in Fig. 9. S. 102 sind mit feinen Teilungen versehen, welche durch die isoliert aufgestellten Mikroskope abgelesen werden.

Fig. 12. (S. 102) zeigt den Röhren-Querschnitt und zugleich die Queransicht eines mit der Röhre parallelen Richte-Fernrohrs *b*, welches in der grossen Fig. 7. (S. 100) rechts oben in Seiten-Ansicht dargestellt ist.

Dieses Richte-Fernrohr lässt sich durchschlagen, also auf eine vordere oder eine hintere Richte-Bake der Geraden einstellen.

Im Übrigen ist durch die zahlreichen Figuren alles wesentliche erklärt. Die photographische Aufnahme des Gesamt-Apparates mit den Schutz-Zelten, welche wir

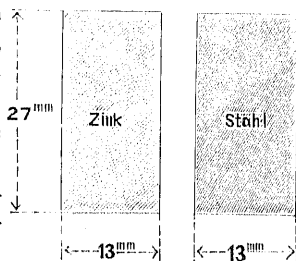
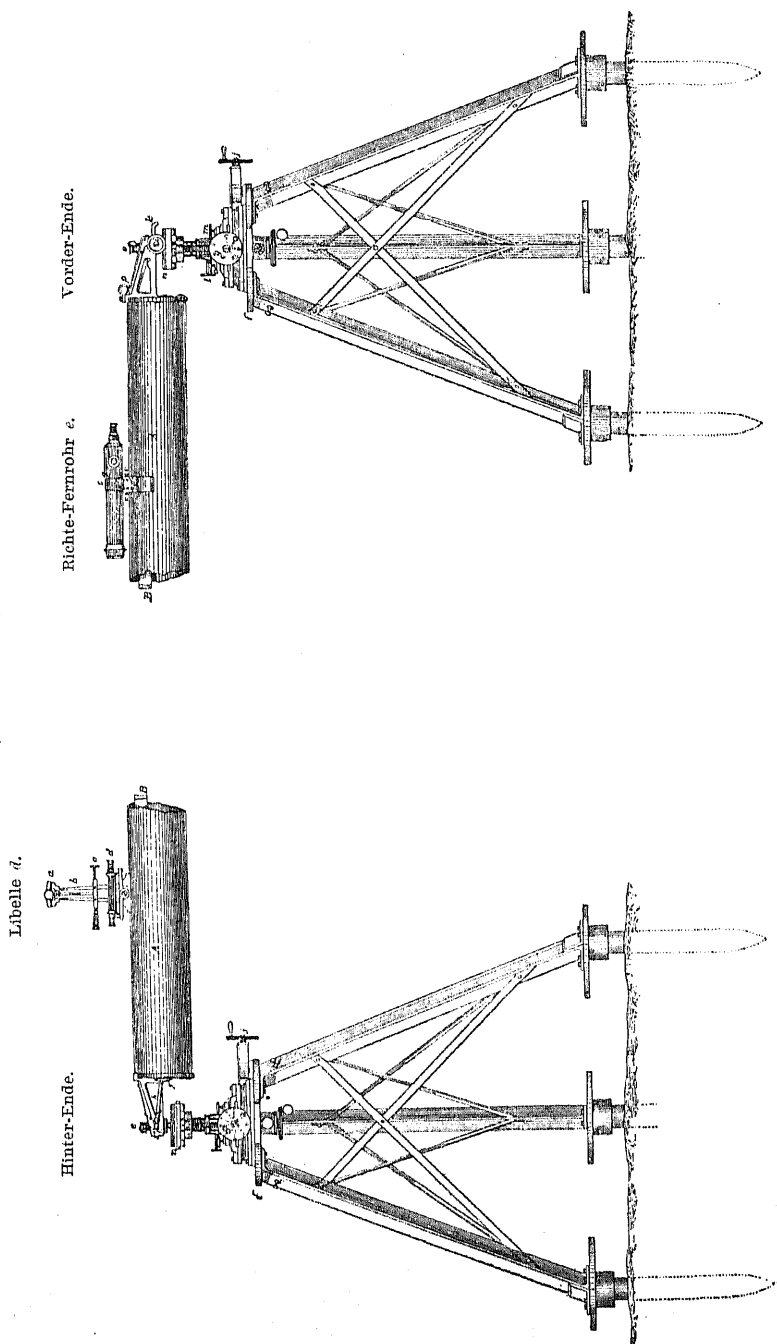


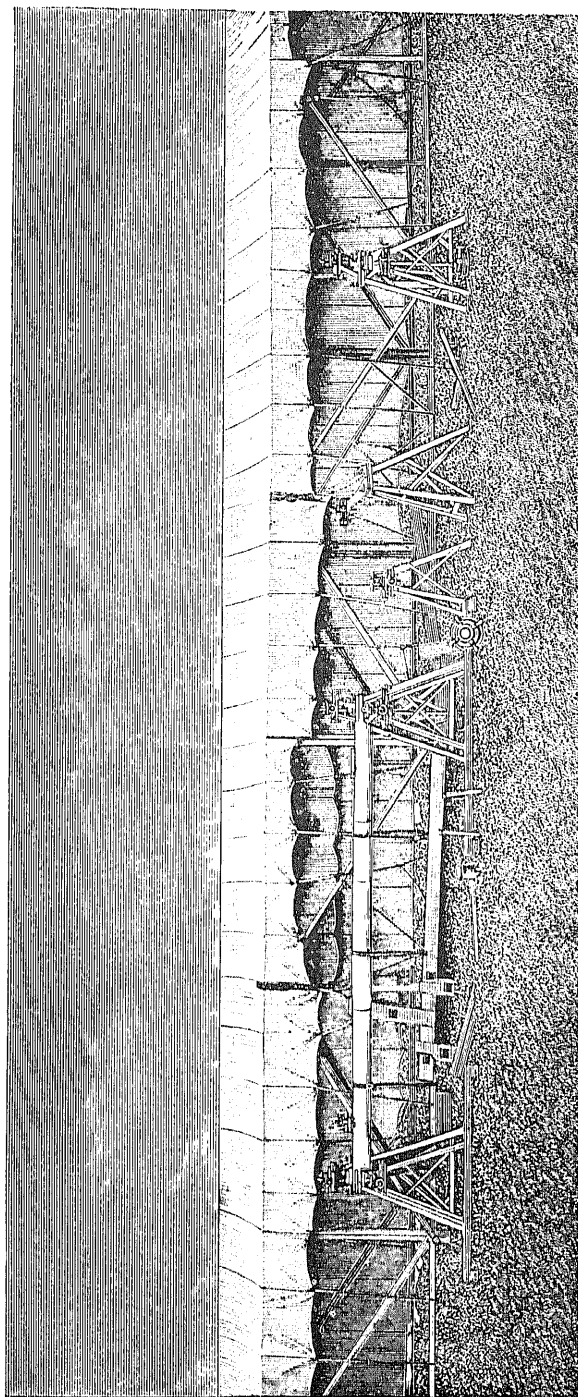
Fig. 7.
Repsold-Comstock's Basismess-Apparat,
 angewendet bei den Grundlinien von Chicago 1877, Sandusky 1878, Olney 1879.
 (Maßstab 1 : 16.)



Länge der Röhre = 4 m, Durchmesser der Röhre = 0,125 m.

Im Innern der Röhre befindet sich der aus Zink und Stahl bestehende Massstab, welcher an den Enden hervorragt und durch isoliert aufgestellte Mikroskope abgelesen wird.

Fig. 8.
Reissold-Comstock's Basismess-Apparat, photographische Ansicht.



Röhren-Stativ.
Mikroskop-Stativ.

Mess-Röhre, 4 Meter lang.

Mikroskop-Stativ.
Röhren-Stativ.

Röhren-Stativ.

Mikroskop.
Mikroskop-Stativ.

Mikroskop-Stativ.
Röhren-Stativ.

$$F = 2(b + h)l \quad V = bhl$$

$$\text{also:} \quad (\Delta t) = \frac{2(b + h)}{bh} \frac{\alpha \lambda}{Aw}$$

Die *Oudemansschen* Stangen lagen scharf *neben* einander, hatten gleiche Höhen $h = 22^{\text{mm}}$ und die Breiten $b = 13,5^{\text{mm}}$ für Stahl und $b' = 11,5^{\text{mm}}$ für Zink, es ist also zu setzen: $F = (2b + h)l$ oder $= (2b' + h)l$, folglich:

$$(\Delta t)_s = \frac{27 + 22}{13,5 \times 22} \frac{\alpha \lambda}{Aw} \quad , \quad (\Delta t)_z = \frac{23 + 22}{11,5 \times 22} \frac{\alpha' \lambda'}{A' w'}$$

Die Ausrechnung giebt 12,7 und 20,1 oder das Verhältnis 0,63 : 1, d. h. die Stangen entsprechen *nicht* genügend den Wärme-Verhältnissen.

Auch bei *Bessels* Stangen (vgl. Fig. 2. S. 77) sind diese Verhältnisse nicht eingehalten, die Stangen liegen *auf*einander und geben, wenn man die Tragstange als nicht vorhanden annimmt:

alles rund in Millimetern:

<i>Eisen:</i> $F = 55l$	$V = 189l$	<i>Zink:</i> $F' = 27l$	$V' = 91l$
$\alpha = 0,175$	$\lambda = 374$	$\alpha = 0,19$	$\lambda = 363$
$A = 7,82$	$w = 0,11$	$A = 6,86$	$w = 0,089$

Die Ausrechnung giebt hiefür nach der Formel (1):

$$(\Delta t)_s : (\Delta t)_z = 22 : 34$$

Hier ist die Zinkstange offenbar zu schwach, und das Verhältnis ist deswegen nicht richtig.

Dagegen berichtet *Fischer* für den Platin-Messing-Basismessstab des geodätischen Instituts, wobei beide Teile je 21^{mm} breit und 5^{mm} dick, durch einen Zwischenraum von 7^{mm} von einander getrennt sind, dass das thermische Verhältnis nach der Formel (1) sich = 1,00 : 1,08 ergab. („Astr. Nachr.“ 103. Band, 1882, Nr. 2451, S. 43.)

Zugleich teilt *Fischer* eine Bestimmung des Temperatur-Unterschiedes beider Stäbe durch Thermo-Elemente mit, welche am 25. Mai 1882 in dem Beobachtungs-Raum zu Steglitz bei Berlin eine mittlere Differenz von nur = $0,05^{\circ}$ ergab, von $0,01^{\circ}$ bis $0,12^{\circ}$ anwachsend und bis $0,02^{\circ}$ wieder abnehmend, mit Schlusswert $0,04^{\circ}$.

In Bezug auf die vorerwähnte thermische Theorie der Formel (1) besteht natürlich eine grosse Unsicherheit, wie auch *Oudemans* selbst hervorhebt. Trotzdem handelt es sich hier um Überlegungen, welche nicht zu umgehen sind.

Neue Massbestimmungen für den Besselschen Apparat, von General Schreiber.

Die Massbestimmungen, welche zuerst 1834 von *Bessel* mit den Zink- und Eisenstangen vorgenommen wurden, haben wir bereits in § 12. S. 80—86 beschrieben.

Vor der Braaker Basismessung (welche 1871 stattfand) wurde jedoch der Vergleichs-Apparat neu und besser eingerichtet, statt der früheren Holzgerüste in Königsberg wurden in dem Untergeschoss des Generalstabs-Gebäudes in Berlin Zementpfeiler aufgebaut, und die Keilmessung für die Konstanten-Bestimmung durch Mikroskop-Ablesung ersetzt. Zur Temperatur-Regulierung wurden Holzkästen mit Doppelwänden zur Aufnahme von Wasser konstruiert.

Alles dieses ist mitgeteilt in dem Werke „Die königlich preussische Landes-Triangulation, Haupt-Dreiecke, II. Teil, erste Abteilung“, Berlin 1873, S. 1—37 mit Tafel II. und III. Auszug hieraus s. *Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen“, 1882, S. 86.

Auch in anderer Hinsicht wurden die Vergleichen gegen früher abgeändert, so dass nicht mehr bloss *eine* der 4 Stangen, nämlich die erste l_1 , mit dem Normalmass verglichen wurde, sondern alle 4 Stangen l_1, l_2, l_3, l_4 jede für sich.

Dabei wurde zuerst die Formel zu Grunde gelegt nach (32) § 12. S. 85 (wobei wir jedoch wieder L statt L' schreiben):

$$l = L - (k - 1,4) m \quad (2)$$

Dabei ist l die Stangenlänge, k das innere Keilmass, m der relative Ausdehnungs-Coefficient und L das Absolutglied, d. h. die Länge l , welche zu $k = 1,4$ gehört.

Als erste Verbesserung der Formel (2) wurde von General *Schreiber* ein quadratisches Glied hinzugefügt, und gesetzt:

$$l = L - (k - 1,4) m - (k - 1,4)^2 \varrho \quad (3)$$

Eine wichtigere Änderung wurde ferner gemacht durch Zufügung eines Gliedes αh , welches die Temperatur-Änderung berücksichtigt. Um dieses begreiflich zu machen, erinnern wir zuerst an das, was schon vorher bei (1) S. 103 über die Wärme-Verhältnisse in bimetallischen Stäben gesagt wurde. Die Eisen- und Zinkstangen folgen der allgemeinen Temperatur-Änderung nur langsam nach, und noch mehr: Die Eisenstange und die Zinkstange folgen den Temperatur-Änderungen nicht *gleich*, sondern die schwächere Zinkstange eilt bei dem *Besselschen* Apparat der Eisenstange immer voraus. Diese Erscheinung findet ihren Ausdruck in dem Glied αh der dritten *Schreiberschen* Formel:

$$l = L - (k - 1,4) m - (k - 1,4)^2 \varrho + \alpha h \quad (4)$$

Dabei bedeutet α die *einstündige* Änderung des Temperatur-Keilmasses k , und h ist ein durch Versuche bestimmter Coefficient, in runder Zahl $h = 0,05$. Um die Wirkung des letzten Gliedes (Folge-Korrektion) beurtheilen zu können, berechnen wir eine kleine Übersichts-Tabelle:

Zeit	Keilmasse		Temperaturen	Folge-Korrektion	
	k	α	in R°	$h \alpha = 0,05 \alpha$	
0 ^h	1,30		18,13°		(5)
1 ^h		+ 0,10	— 2,19°	+ 0,005' = + 0,011 ^{mm}	
1 ^h	1,40		15,94		
1 ^h		+ 0,10	— 2,20°	+ 0,005' = + 0,011 ^{mm}	
2 ^h	1,50		13,74		

Wenn also die Temperatur im allgemeinen um rund 2° in 1 Stunde abnimmt, so zeigt das Keilmass k die Stange um rund 0,01^{mm} zu klein, weshalb die Korrektion $\alpha h = + 0,01^{\text{mm}}$ zugesetzt werden muss. Nimmt die Temperatur im allgemeinen zu, so erscheint die Stange vermöge des Keilmasses k zu lang. Alles dieses lässt sich vollständig durch das schon erwähnte Voraneilen des Zinks (oder Zurückbleiben des Eisens) erklären, denn dieses giebt bei Temperatur-Zunahme eine Verkleinerung von k , also in $l = L - (k - 1,4) m$ eine Vergrößerung von l .

Endlich ist noch eine vierte Formel durch Zufügung eines quadratischen Folge-Gliedes gebildet worden:

$$l = L - (k - 1,4) m - (k - 1,4)^2 \varrho + \alpha h + \alpha^2 k \quad (6)$$

Durch diese neuen Formeln, namentlich (4), sind nicht bloss die auf dem Comparator gemachten Stangen-Vergleichen in bessere Übereinstimmung gebracht, sondern auch die bei den Basismessungen selbst auftretenden Differenzen der metronomischen Rechnung zugänglich gemacht.

Trotzdem haben die Stangen-Vergleichungen noch erhebliche Schwankungen und Unsicherheiten gezeigt, z. B. bei 4 Gruppen von Vergleichungen der Stangen I II III IV mit dem Normalmass gab sich folgendes, in Pariser Linien:

Gruppe	Stange I	II	III	IV	Mittel
1.	1728,1393	1728,1698	1728,1800	1728,1842	1728,1683
2.	1396	1700	1733	1753	1646
3.	1491	1803	1877	1835	1751
4.	1457	1772	1845	1801	1719

Während in den einzelnen Gruppen viel bessere Übereinstimmung war, zeigten die Gruppen-Mittel diese bis zu 0,01 Par. Linien = 0,026^{mm} gehenden Abweichungen.

Diese Erscheinung, welche auch in anderen Fällen beobachtet ist, giebt die Warnung, dass mittlere Fehler, welche aus einzelnen Gruppen von Messungen im wesentlichen unter gleichen Umständen erlangt wurden, nicht ohne weiteres als reelle Genauigkeits-Masse anzusehen sind, und es scheint, dass die sehr kleinen mittleren Fehler der *Besselschen* Vergleichungen von 1834, welche wir auf S. 83 erwähnt haben, aus solchen Gründen zu klein ausgefallen sind.

General *Schreiber* hat die vorstehenden Angaben in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1882, S. 1—17 veröffentlicht, und dazu noch folgendes bemerkt:

„Es ist nicht gelungen, die Ursachen der enormen Schwankungen (bei den verschiedenen Vergleichungen) dergestalt festzustellen, dass sie in Zukunft vermieden werden können. Man wird vielmehr Unsicherheiten bis zu etwa einer hundertel Linie oder 0,02 Millimeter, auch bei ferneren mit den *Besselschen* Messstangen auszuführenden Vergleichungen und Basismessungen gewärtigen müssen.“

Massvergleichungen für den Repsold'schen Stahl-Zink-Apparat von Comstock.

Ähnliche Verhältnisse wie General *Schreiber* mit den *Besselschen* Zink-Eisen-Stangen fand auch General *Comstock* in Washington mit Zink-Stahl-Stangen. Aus dem „Report upon the primary triangulation of the United States Lake Survey by *Comstock* etc. Washington 1882“, S. 223—230, entnehmen wir hierüber folgendes:

Die Zink-Stahl-Stange, deren mechanische Einrichtung wir schon in § 14. S. 99 bis 102 beschrieben haben, wurde in gleichen Umständen wie bei der Basismessung selbst, d. h. in einer Röhre eingeschlossen, im freien Felde, unter Zelt-Schutz, in folgender Weise besonders untersucht:

Eine Messing-Stange diente in einer Verpackung von schmelzendem Eis zur Vergleichung, indem diese durch Eis auf 0° erhaltene Stange und die Zink-Stahl-Stange in ihrer jeweiligen Temperatur, abwechselnd unter dasselbe Mikroskopen-Paar zur Ablesung gebracht wurden.

Dabei wurde an der Zink-Stahl-Stange die jeweilige Differenz $Z - S$ mikroskopisch *beobachtet*, ausserdem konnte aber auch ein Wert $Z - S$ *berechnet* werden aus der gleichzeitigen Vergleichung mit der in Eis verpackten Messingstange und aus der früher vielfach und genau bestimmten Differenz $z - s$ der einzelnen Ausdehnungs-Coëfficienten für Zink und Stahl.

Die Differenzen zwischen berechneten $Z - S$ und beobachteten $Z - S$ zeigten einen regelmässigen Tagesverlauf, dessen Hauptwerte nachstehende Tabelle zeigt. Dabei ist gesetzt:

$(Z - S)$ Rechnung — $(Z - S)$ Beobachtung = Δ

$$\frac{e}{z - e} \Delta = 0,6522 \Delta = \delta$$

Folgendes ist eine Reihe von Mittelwerten solcher Beobachtungen:

8 Tage zwischen 23. August und 3. September 1881 (Report S. 228—230)

Tageszeit		Temperatur	Δ	δ
Morgen	8 ^h	20,6° C	— 5,9 ^μ	— 3,8 ^μ
	10	22,8	— 2,4	— 1,6
Mittag	12	25,4	+ 4,7	+ 3,1
	2	26,6	+ 14,5	+ 9,4
	4	26,3	+ 14,6	+ 9,5
Abend	6	25,2	+ 6,5	+ 4,2
	8	23,9	— 1,6	— 1,0
	10	22,5	— 10,0	— 6,5
Nacht	12	21,4	— 16,7	— 10,9
	2	20,7	— 15,1	— 9,8
	4	20,3	— 12,1	— 7,9
Morgen	6	19,9	— 15,1	— 9,8

Die hier mit δ bezeichneten Werte entsprechen dem *Schreiberschen* Gliede $h\alpha$ (s. o. (4) und (6) S. 105), jedoch mit anderen Vorzeichen, was darin seinen Grund hat, dass die Massen-Verhältnisse von Zink und Eisen bei *Repsold* (Fig. 6. S. 99) ganz andere sind als bei *Bessel* (Fig. 2. S. 77).

Auf Grund von solchen Versuchen, wie die in vorstehender Tabelle dargestellten, wurden für die amerikanischen Basismessungen von Chicago kleine Korrekturen δ in in Rechnung gebracht, in ähnlicher Weise wie durch αh und $\alpha^2 k$ in den *Schreiberschen* Formeln für die Göttinger und Meppener Messungen.

§ 16. Verschiedene Projekte zur Basismessung.

Die Konstruktion von Basismess-Apparaten bietet dem Erfindungsgeist ein weites Feld, und obgleich nicht anzunehmen ist, dass wirklich leistungsfähige Apparate anders als im engsten Anschluss an die Berufs-Praxis entstehen werden, können wir doch einige solche mehr oder weniger ernsthaft zu nehmende Projekte betrachten.

Das Messrad.

Einen kühnen Gedanken hat in der Anfangszeit der „Europäischen Gradmessung“ 1868, *Steinheil* in München ausgesprochen, nämlich, mit einem *Messrad* gewöhnliche geradlinige Eisenbahn-Linien zu befahren, und dadurch Basismessungen in grosser Menge ohne viele Mühe oder Kosten zu erlangen. —

Nach *Steinheils* Vorschlägen wurden von *Voit* in München einige Versuche im kleinen angestellt, über welche *Steinheil* in den „astr. Nachr.“ 72. Band (1868) Nr. 1728, S. 369—378 berichtet.

In dem Münchener Glaspalast wurde ein Doppelgeleise von circa 20^m Länge von gewöhnlichen Vignole-Schienen, wie bei der bayerischen Staatsbahn (mit Laschenverbindungen und kleinen Zwischenräumen zwischen je 2 Schienen) angelegt.

Das Messrad war von Holz mit einem kupfernen Reif von 0,922^m Durchmesser,

und wurde aus freier Hand geleitet, es machte daher unvermeidliche Schwankungen, dennoch stimmten die Wiederholungen unter einander schon auf etwa 0,01%.

Später wurde für das Rad ein Gestelle konstruiert, welches die Rad-Ebene genau in der Vertikal-Ebene der Schienen erhalten soll. Damit wurden 50 Befahrungen einer Eisenbahnstrecke von 17,383^m (6 Radumfänge) gemacht, wobei sich der mittlere Fehler der einmaligen Befahrung = $\pm 0,30^{mm}$ ergab oder $\pm 2,3^{mm}$ für 1^{km}, wenn man annimmt, dass es sich nur um unregelmässige Fehler handelt.

Der Basis-Mess-Wagen.

In dem Werke von *Zachariae* „Die geodätischen Hauptpunkte“, deutsch von *Lamp*, Berlin 1878, S. 94, wird folgendes Projekt von *Bruhns* in Leipzig berichtet:

In der Basislinie werden, mit Zwischenräumen von ungefähr 4^m, eiserne Pflöcke eingerammt, deren Oberfläche mit einem Punkt oder einem Kreuz versehen ist. Der Messapparat besteht aus einem 4^m langen Massstab und zwei an den Enden angebrachten vertikalen Mikroskopen, mit denen man die Massstablänge auf die Pflöckköpfe durch Mikrometer-Messung vergleichend übertragen kann. Dieser Apparat liegt auf einem *Wagen*, wird durch ein Dach und Seitenwände gegen Sonnenschein u. s. w. geschützt, und fährt somit in Absätzen von 4^m über die ganze Basis hin.

Röhren-Massstäbe mit Wasserfüllung.

In der „Zeitschr. f. Verm.“ 1881, S. 235, hat *Reitz* den Vorschlag gemacht, *geogene Messingröhren* als Basismessungs-Massstäbe zu verwenden; die Länge soll 4—5 Meter, der äussere Durchmesser 2^{cm} und die Wandstärke nur 1^{mm} sein, solche Röhren sollen sehr hart und widerstandsfähig sein. Durch eine Füllung mit Wasser (oder irgend einer anderen Flüssigkeit, vgl. S. 64) hat man das Mittel, die Temperatur der Röhren durch eingetauchtes Quecksilber-Thermometer zu bestimmen, indem angenommen wird, dass das Wasser bei seiner guten Wärmeleitungs-Fähigkeit die Temperatur des sehr dünnen Rohres selbst besitzt, mit dem es sich auf seiner ganzen inneren Fläche in Berührung befindet.

Messungen mit Stahlbändern und Metalldrähten (Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1885, S. 362—365).

In Stockholm hat *Jäderin*, 1885, Längenmessungen mit Stahlbändern und mit Drähten aus Stahl und Messing gemacht, welche nach Angabe des Urhebers sehr genau und etwa zu Basisbestimmungen zweiten Ranges geeignet sein sollen. Die Drähte werden über Stativ ausgestreckt, dabei durch Gewichte in konstanter Spannung gehalten, so dass die durch die Spannung erzeugte Verlängerung, und die Verkürzung durch Einschlagen, sich gerade aufheben. Die Längenbestimmung geschieht mittelbar durch Vergleichung der Drahtmessung mit einer anderweitigen Stangenmessung.

Die Geschwindigkeit ist bedeutend, die grösste Leistung war 550^m in 1 Stunde und 2368^m in einem 9stündigen Arbeitstage.

Das Schütz-Mikroskop.

Während Nonien und Schrauben-Mikroskope längst zur Basismessung angewendet wurden, ist ein Hilfsmittel, welches in mehrfacher Hinsicht nach unserer Ansicht sich hier vortrefflich eignet, noch nicht benützt worden, nämlich das Schütz-Mikroskop, das wir früher in Band II, S. 151—152 und S. 593 beschrieben haben.

Wir machen zunächst eine allgemeine Überlegung:

Um einen mittleren unregelmässigen Messungsfehler von rund $\pm 1^{\text{mm}}$ auf 1 Kilometer, d. h. den thatsächlich bei guten Messungen vorkommenden Betrag zu erklären, braucht man keine sehr feinen optischen und mechanischen Hilfsmittel anzunehmen, denn bei der üblichen Stangenlänge von 4^{m} kommen 250 Lagen auf 1 Kilometer, und wenn μ der mittlere Fehler einer Lage ist, so hat man $\mu \sqrt{250} = 1^{\text{mm}}$, woraus folgt $\mu = 0,063^{\text{mm}}$; dieses ist ein Betrag, den man sogar durch Schätzung von freiem Auge an einer Millimeter-Teilung erzielen könnte, (etwa entsprechend einem Winkel von $2'$ an einer Kreisteilung von 100^{mm} Halbmesser).

Da man aber natürlich die Genauigkeit im einzelnen weiter treibt, wurde man bald zu Nonien, Mikroskopen u. s. w. geführt. Als weiteres gutes Hilfsmittel zur Bestimmung des Zwischenraums oder des Übergreifens an der Grenze zweier Messstangen betrachten wir das *Schätz-Mikroskop*. Dasselbe hat unbedingt die für solche Zwecke nötige Genauigkeit, und giebt eine Ablesung auf *einen Blick*, was zur Zeitsparung bei Basismessungen sehr wichtig ist.

Die Anwendung eines Schätz-Mikroskops zur Messung des Anschlusses zwischen zwei aufeinander folgenden Stangen I und II ist in Fig. 1. angedeutet.

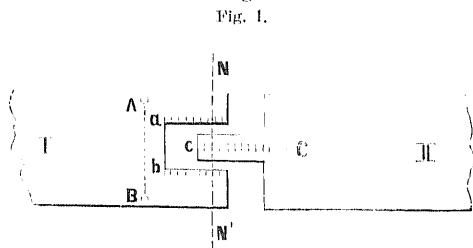


Fig. 1.

Die Stange I endigt gabelförmig und umfasst mit zwei Teilungen a und b die Teilung c , welche sich auf einem zungenartigen Fortsatze der Stange II befindet. Ein Schätz-Mikroskop wird mit drei Fussspitzen auf die Punkte A , B und C gestellt, von denen A und B unbedingt fest sind (etwa konische Löcher), während C dem Spielraum des Anschlusses entsprechend veränderlich ist. Man kann vielleicht auch das Schätz-Mikroskop mit einer Kipp-Axe AB aufstellen. Das Schätz-Mikroskop, welches somit auf den drei Punkten A , B und C aufsitzt, hat eine horizontale Axe in der Richtung $I\ II$ und Kippbewegung in der Querrichtung NN' , so dass die 3 Teilungen a , b und c rasch nach einander abgelesen werden können.

Trennung der Längenmessung von den Hilfs-Operationen.

Die Einrichtungen, welche zu einem Basis-Apparate gehören, und die Operationen mit denselben, sind wesentlich zweierlei Art, *erstens* solche, welche zur Temperatur-Ausdehnung und Intervall-Bestimmung, d. h. zur eigentlichen Längenmessung dienen, und *zweitens* die verschiedenen mechanischen Hilfsmittel für das Auflegen der Stangen, Geradrichtung und Neigungsmessung u. s. w.

Die eigentliche Längenmessung muss ihrer Natur nach eine *kontinuierliche* Operation sein, sogar mit einer nahezu gleichförmigen Geschwindigkeit, während das bei den Hilfs-Operationen nicht nötig ist.

Wir glauben deshalb, dass die eigentliche Längenmessung, d. h. das Legen der Messstangen und das Bestimmen der Zwischenräume, oder Übergreifungen ihrer Enden, zeitlich und räumlich *getrennt* werden sollte von den vorbereitenden Hilfs-Verrichtungen der Gerad-Richtung, Neigungs-Bestimmung u. s. w.

Dies könnte z. B. dadurch geschehen, dass man stets etwa 1 Kilometer voraus

die Basis durch eingerammte Pfähle (etwa von 4 zu 4 Meter) absteckt, geradrichtet und nivelliert. Die Pfähle wären nötigenfalls zum Einrammen unten mit eisernen Schuhen und jedenfalls oben zum Auflegen der Messstangen mit scharfgeformten Metall-Kappen zu versehen, welche zum Geradrichten (von 100 zu 100^m nach einer Schnur) Spielraum und Richte-Schrauben haben (dieses giebt für 1^{km} Länge 250 Pfähle, d. h. etwa 2,5^{cbm} Holz und etwa 100^{kg} Metall-Kappen).

Es mag hier auch nochmal daran erinnert werden, wie wir schon auf S. 71 mitgeteilt haben, dass *Benzenberg* zu seinen Basismessungen eine Messungsbrücke von 1000 Fuss = 314 Meter Länge legte, so dass die Längenmessung stets auf genügende Länge von den Hilfs-Operationen unabhängig war.

Auch *Schwerd* liess bei seiner kleinen Speyerer Basis (Sp. B. S. 23) Pfähle, welche 0,58^m lang, 0,1^m dick und oben mit einem Brettchen zur Aufnahme der Stangen versehen waren, 0,3^m tief, den ganzen Vorrat der Messung voraus, in den Boden schlagen.

§ 17. Länge und Einteilung der Grundlinien.

Die Basis eines Dreiecksnetzes ist eine genau gemessene Seite des Netzes.

Will man beim Übergang von der Basis zu andern Dreiecksseiten spitze Winkel oder ähnliche Fehlerquellen vermeiden, so bleibt nichts übrig, als der Basis nahezu die Länge einer Haupt-Dreiecksseite zu geben, und deswegen finden wir bald nach dem ersten Aufschwung der Triangulierungen, das Bestreben, die Grundlinien *so lang als möglich* zu machen.

Allerdings der Begründer *Snellius* hat nur ganz kleine Grundlinien von zuerst 328^m, 348^m, später etwa 2000^m, wie wir schon in der Einleitung, S. 4–5, angegeben haben; dagegen die französischen Messungen im 18. Jahrhundert hatten fast nie unter 10^{km} lange Grundlinien, nämlich:

1736 Gradmessung in Peru (La Condamine)

Basis von Yaroqui	12 226 ^m
Basis von Tarqui	10 250 ^m

1736 Gradmessung in Lappland (Maupertuis)

Basis von Tornea	14 436 ^m
----------------------------	---------------------

1792 Gradmessung von *Delambre* und *Méchain* (vgl. S. 73):

Basis von Melun	11 842 ^m
Basis von Perpignan	11 706 ^m

Auch in Deutschland mass man am Anfang dieses Jahrhunderts sehr lange Linien, z. B.:

1801 Bayerische Basis München-Aufkirchen	21 654 ^m
1820 Württembergische Basis Solitude-Ludwigsburg	13 032 ^m
1819 Rheinbayerische Basis Speyer-Oggersheim	15 460 ^m

Die letztgenannte Basis war mittelbare Veranlassung zum Verlassen der langen Grundlinien:

Professor *Schwerd* am Lyceum in Speyer war mit der vor seinen Augen vorgenommenen Messung von Steuerrat *Lämmle* nicht einverstanden, und behauptete, eine 20 mal kleinere Basis leiste denselben Dienst. Zum Beweis mass er mit seinen Lyceums-Schülern im Jahr 1820 eine kleine nur 860^m lange Grundlinie, und leitete die grosse Speyerer Linie mit guter Übereinstimmung daraus ab. (Fortsetzung s. S. 112.)

Übersicht der Längen und der Einteilungen für die 13 Grundlinien, welche bis jetzt mit dem Besselschen Apparat gemessen wurden.

1. Basismessung bei **Königsberg**, 1834, von *Bessel* und *Trenk* **A** **Mednicken**
 441^m 1381^m
 -1822^m
2. Basismessung bei **Kopenhagen**, 1838. 2701^m lang, im ganzen nur einmal gemessen, nur drei kleine Teilstrecken von zusammen 692^m Länge sind zweifach gemessen.
3. Basismessung bei **Upsala** in Schweden.
4. Basismessung bei **Berlin**, 1846, von *Baeyer*.
 4 ungleiche Strecken. **A** **B** **C**
 -2336^m
5. Basismessung bei **Bonn**, 1847, von *Baeyer*.
 6 ungleiche Strecken. **A** **D** **B** **C**
 -2134^m
6. Basismessung bei **Lommel** in Belgien, 1852, 2301^m lang, 5 Strecken je zweifach gemessen.
7. Basismessung bei **Ostende**, 1854, 2489^m lang, 4 Strecken 622^m, je zweifach gemessen.
8. Basismessung bei **Strehlen** in *Schlesien*, 1854, von *Baeyer*, 3 ungleiche Strecken. **Knieschwitz** **2** **1** **Hernsdorf**
 -2763^m
9. Basismessung bei **Braak** in Holstein, 1871, von **Nordpunkt** **I** **II** **III** **IV** **V** **VI** **Südpunkt**
 -5875^m
10. Basismessung bei **Grossenhain** im Königreich Sachsen, 1872, von *Nagel* und *Bruhns*. Sächsische Triangulierung, 12 Strecken.
 10. Grossenhain in Sachsen, 1872.
Raschütz **Grossenhain** **Quersa**
 -8909^m
11. Basismessung bei **Oberhergheim** im Elsass, 1877, von *v. Morozowicz*, trig. Abtheilung der preuss. Landes-Aufnahme; in der Gegend der früheren französischen Basis von Ensisheim, 22 Strecken: $376^m + 20 \text{ mal } 312^m + 364^m = 6980^m$.
 11. Oberhergheim im Elsass, 1877.
Nordpunkt **Südpunkt**
 -6982^m
12. Basismessung bei **Göttingen**, 1880, von *Schreiber*, trig. Abt. d. pr. Landes-Aufnahme, 33 Strecken von je 156^m. **Nordpunkt** **33 Strecken** **Südpunkt**
 -5193^m
13. Basismessung von **Meppen**, 1883, von *Schreiber*, trig. Abt. d. pr. Landes-Aufnahme, 45 Strecken von je 156^m. **Westpunkt** **45 Strecken** **Ostpunkt**
 -7033^m

Schwerd veröffentlichte seine Arbeit in dem Werk: „Die kleine Speyerer Basis, oder Beweis, dass man mit einem geringen Aufwand an Zeit, Mühe und Kosten durch eine kleine genau gemessene Linie die Grundlage einer grossen Triangulation bestimmen kann. Speyer 1822.“

Von da an kamen kurze Grundlinien ziemlich allgemein in Gebrauch, namentlich *Bessel* nahm zu seiner berühmten Gradmessung in Ostpreussen 1834 nur eine 1822^m lange Basis; doch ist das die untere Grenze, später ging man wieder weiter, und die neuesten deutschen Grundlinien sind 5—7 Kilometer lang.

Die Längen und Einteilungen der 13 Grundlinien, welche mit dem *Besselschen* Apparate vermessen sind, sind auf S. 111 übersichtlich zusammengestellt.

Zahl der Wiederholungen.

Die Zusammenstellung auf S. 111 bezieht sich (mit unwesentlichen Ausnahmen) auf *Doppel*-Messungen, d. h. jede Strecke wurde *hin* und *her* gemessen.

Auch die älteren französischen Basismessungen des 17. und 18. Jahrhunderts sind meist doppelt gemacht, eine derselben, die Nachmessung der *Picardschen* Basis von Juvisy durch *Cassini* sogar 5mal. Dagegen die französischen Messungen mit den *Bordaschen* Platin-Kupfer-Stangen von 1798—1828, welche wir schon auf S. 73 erwähnt haben, sind nur *einmal* gemessen.

Auch die langen süddeutschen Grundlinien am Anfang dieses Jahrhunderts in Bayern und Württemberg sind unbegreiflicherweise nur *einmal* gemessen, so dass über die unregelmässigen Messungsfehler jeder objektive Nachweis fehlt; z. B. sagt *Bohnenberger* über seine einmalige Messung der 13 Kilometer langen Solituder Linie nur, dass man „deren Länge bei aller angewendeten Kunst und Sorgfalt nicht bis auf kleine Theilchen eines Zolles verbürgen kann“.

Die *Schwerdsche* und alle nachfolgenden Grundlinien sind wieder in der Regel doppelt gemessen; als Ausnahme ist zu erwähnen, dass die badische Basis von Heitersheim, 2125^m lang, im Jahr 1846 sogar 8mal gemessen wurde.

Wie man aus Doppelmessungen oder allgemeiner aus Messungs-Wiederholungen im ganzen oder in Strecken den mittleren unregelmässigen Messungsfehler bestimmen kann, werden wir später in § 25. behandeln.

Gesamt-Übersicht der Basismessungen.

Eine Zusammenstellung aller zu der internationalen Erdmessung angemeldeten Basismessungen ist von *Perrier* gemacht worden. Dieselbe findet sich veröffentlicht in den Generalberichten der internationalen Erdmessung und zwar für 1877, S. 40 bis 55; für 1880, Annexe VI; für 1883, Annexe III; für 1887, Beilage IV.

Wir haben hieraus folgenden Auszug gebildet, wo n die Anzahl der Grundlinien, und $[B]$ deren Gesammtlänge für das einzelne Land, also $\frac{[B]}{n}$ die mittlere Länge einer Grundlinie ist.

Num.	Land	Anzahl <i>n</i>	Summe [<i>B</i>]	Mittel $\frac{[B]}{n}$
1.	Bayern	3	51,0 ^{km}	17,0 ^{km}
2.	Belgien	2	4,8	2,4
3.	Dänemark	1	2,7	2,7
4.	Frankreich mit Algerien	10	117,1	11,7
5.	Italien	9	42,8	4,7
6.	Holland	1	6,0	6,0
7.	Hessen-Darmstadt . .	1	7,7	7,7
7.	Schweden u. Norwegen	7	27,1	3,9
8.	Österreich-Ungarn . .	19	80,5	4,2
9.	Preussen	11	45,1	4,1
10.	Portugal	1	10,5	10,5
11.	Russland	19	113,3	6,0
12.	Spanien	9	32,8	3,6
13.	Schweiz	6	27,0	4,5
13.	Nord-Amerika	5	49,0	9,8
	Summe	104	617,4	
	Gesamt-Mittel		617,4 104	= 5,9 ^{km}

Diese Tabelle ist nicht vollständig; es fehlen von den deutschen Linien die Württembergische und die Badische, namentlich aber fehlen die Britischen Messungen in England selbst und in den Kolonien. Andererseits sind zwei preussische Linien (Strehlen und Berlin) infolge von Nachmessung doppelt aufgeführt.

In England sind nach S. 422 des Werkes: „Ordnance trigonometrical survey u. s. w.“ von 1791—1849, 7 Grundlinien von zusammen 219 579 engl. Fuss oder rund 66,9^{km} Länge gemessen worden (Mittel = 9,6^{km}); fügt man dieses zu der vorstehenden Zusammenstellung, und rechnet für die britischen Kolonien noch einen runden Betrag, so kann man die gesamten Basislängen der Erde zu rund 700 Kilometer schätzen, oder 7%₀ des Erdquadranten.

Ferner entnehmen wir aus dieser Statistik, dass die mittlere Länge einer Grundlinie rund = 6 Kilometer ist.

§ 18. Basisnetze.

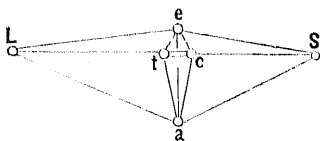
Die Basis einer Triangulierung ist meist erheblich *kleiner* als die Dreiecksseiten im allgemeinen, und es entsteht daher die Aufgabe, eine grosse Seite aus einer kleinen trigonometrisch abzuleiten. Ungünstige Dreiecks-Verbindungen sind hier nicht zu vermeiden; denn entweder macht man den Übergang von der kleinen Basis zu einer grossen Hauptdreiecksseite durch wenige Dreiecke, und man muss dabei spitze Schnitte anwenden; oder man nimmt eine grosse Zahl von Dreiecken, man hat dann aber eine grosse Zahl von Fehlerquellen.

Wir werden nun zuerst mehrere Basisnetze bekannter Triangulierungen be-

trachten, und sehen, wie zu verschiedenen Zeiten verschiedene Landmesser sich bemüht haben, teils durch zweckmässige Anordnung der Dreiecke, teils durch lange Grundlinien selbst, die in der Natur der Sache liegenden Schwierigkeiten zu überwinden.

1) Das Basisnetz von Snellius (Fig. 1.).

Fig. 1. *Snellius*, 1615.
Massstab 1 : 100 000.
 $tc = 328 \text{ m}$, $LS = 4114 \text{ m}$.



Wie wir schon in der Einleitung S. 4 mitgeteilt haben, verdanken wir dem Niederländer *Willebrord Snellius* in Leiden 1715 die erste Triangulierung in dem heutigen Sinne; und in überraschender Weise hat das erste *Snelliussche* Basisnetz (Fig. 1.) diejenige Form, welche heute noch als die beste gilt. Allerdings die Genauigkeit absolut genommen war bei *Snellius* noch gering, die

Basis tc wurde mit hölzernen Messlatten, und die Winkel mit einem geteilten Quadranten von 2,2 rhein. Fuss ohne Fernrohr auf etwa 1' gemessen.

In Fig. 1. sind L und S die Türme von Leiden und dem südlich von Leiden gelegenen Dorfe Soeterwoude, die wirklich gemessene Grundlinie ist nur $tc = 87,05$ rheinl. Ruten $= 327,85^m$ lang, daran schliessen sich zwei hochgestellte Dreiecke tcc und tca , und an die abgeleitete Linie $ea = 1229^m$ schliessen sich wieder zwei hochgestellte Dreiecke eal und eas , woraus $LS = 4114^m$ berechnet wird.

Für jedes der 4 eigentlichen Messungs-Dreiecke teilt *Snellius* nur je zwei Winkel als gemessen mit, und zwar jeweils die Winkel an der Basis, was nach der ganzen Art seiner Darstellung in solchen Fällen, in welchen er die Probestimmungen nicht mitteilen will, nicht ausschliesst, dass auch die dritten Winkel gemessen und ausgeglichen wurden; indessen scheint doch *Snellius* das Hauptgesetz, dass die *spitzen* Winkel (z. B. der Winkel a in dem Dreieck tac) wesentlich die Genauigkeit bestimmen, noch nicht gekannt zu haben.

2) Basisnetze von Schwerd, 1820.

Der Vater der neueren Basisnetz-Theorie ist Professor *Schwerd* in Speyer (vgl. S. 110 und 112). Dieser hat im Jahre 1820 das richtige getroffen; er fand nämlich durch theoretische Betrachtungen und Vergleichen:

erstens, dass das *rhombische Netz* $ABND$ Fig. 2a. (S. 115) das günstigste ist (was schon *Snellius* hatte) und

zweitens, dass die *spitzen* Winkel bei N und D , welche der Basis gegenüber liegen, hauptsächlich bestimmend für die Genauigkeit sind, und deswegen mit besonderer Schärfe gemessen werden müssen.

Die eigentlichen kleinen Basisnetze, welche *Schwerd* gemessen und berechnet hat, sind in den nebenstehenden Figuren (S. 115) dargestellt.

Schwerd hat ausser seinem „Hauptnetz“ Fig. 2a. noch zwei „Prüfungsnetze“ Fig. 2b. und Fig. 2c. angewendet, und zwar hat das Hauptnetz mit den Prüfungsnetzen nicht einen einzigen Winkel gemein, während die beiden „Prüfungsnetze“ teilweise dieselben Winkel enthalten. Die eigentliche Basis AB selbst ist nur 860^m lang. Die Entfernung HD leitete *Schwerd* hieraus dreifach trigonometrisch ab mit folgenden Ergebnissen (die kleine Speyerer Basis, Seite 68):

- 1) Hauptnetz gab $HD = 4959,084^m$
- 2) Erstes Prüfungsnetz gab $4959,068^m$
- 3) Zweites Prüfungsnetz gab $4959,098^m$

Fig. 2.

Basisnetze von *Schwerd*, 1820.

Maßstab 1 : 100 000.

 $AB = 860\ m$, $HD = 4959\ m$.

Fig. 2a. Hauptnetz.

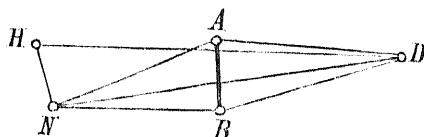


Fig. 2b. Erstes Prüfungsnetz.

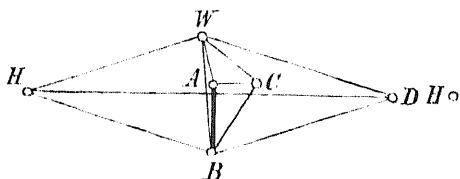
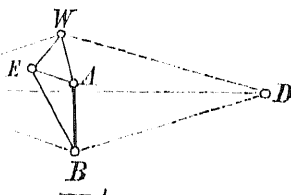


Fig. 2c. Zweites Prüfungsnetz.



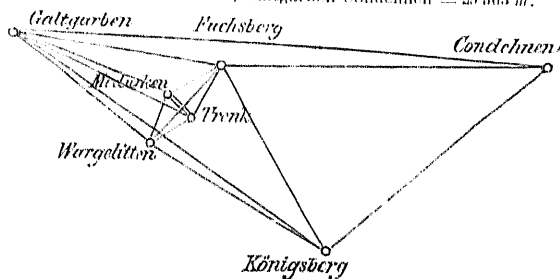
Die weitere Verbindung der Linie HD mit der amtlichen bayerischen Basis Speyer-Oggersheim haben wir schon in unserem I. Bande, S. 207—212 behandelt, wobei mit D_{Sp} der Punkt *Dom in Speyer* bezeichnet ist, welcher abgesehen von einer Exzentrizität auf dem Turme, dem Punkte D in Fig. 2a., 2b. und 2c. entspricht.

3) Basisnetz der Gradmessung in Ostpreussen.

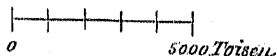
Fig. 3.

Gradmessung in Ostpreussen, 1834.

Maßstab 1 : 400 000.

Trenk-Mednicken $1822\ m$, Galtgarben-Condnehen $= 29\ 563\ m$.

1 : 400 000.

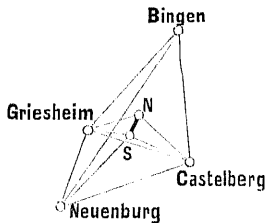


Die vorerwähnten Überlegungen von *Schwerd* haben auch auf die Anordnung der *Besselschen* Basismessung bei Königsberg Einfluss gehabt; *Bessel* erwähnt auf S. 38 der Gradmessung in Ostpreussen das „sehr lesenswerte Buch von *Schwerd*“, und machte seine Königsberger Grundlinie nur 1822^m lang, wie aus vorstehender Zeichnung (Fig. 3. S. 115) zu ersehen ist.

Die zwei Rhomben Wargelitten-Fuchsberg und Galtgarben-Königsberg entsprechen dem *Schwerdschen* Gedanken, allein die Verstärkung der Messungs-Genauigkeit in den spitzen Winkeln hat *Bessel*, wie es scheint im Vertrauen auf die Gesamt-Ausgleichung, nicht durchgeführt.

Den Anschluss an das Gesamtnetz der Gradmessung in Ostpreussen zeigt die Netzfigur, welche wir schon auf S. 14 der Einleitung gegeben haben.

Fig. 4.
Badische Basis, 1846.
Massstab 1:600 000.
NS = 2125 m, Neuenb.-Bingen
= 17 027 m.



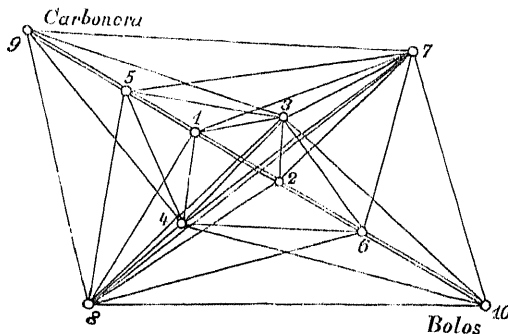
4) Badische Basis bei Heitersheim, 1846.

Auch bei der kurzen badischen Basis, welche 1846 bei Heitersheim (zwischen Freiburg und Basel) gegenüber der französischen Basis von Ensheim (Oberhergheim) von *Klose* und *Rheiner* gemessen wurde, zeigt sich *Schwerds* Grundgedanke. Die Winkelmessungen hiezu haben wir bereits in Band II, S. 183 als Repetitions-Messungsbeispiele mitgeteilt. Die spitzen Winkel sind verstärkt gemessen.

5) Spanische Basismessung von Ibanez, 1858.

General *Ibanez* liess 1858 für seine spanische Triangulierung eine lange Linie messen, bei Madridejos (etwa 100 Kilometer südlich von Madrid). Die Gesamtlänge von 14 663^m wurde in 5 Teile geteilt, welche alle unter sich trigonometrisch verbunden wurden.

Fig. 5.
Spanische Basis bei Madridejos, 1858.
Massstab 1:200 000.
Carbonera-Bolos = 14 663 m.



Die Anschauungen, von welchen General *Ibanez* hiebei geleitet wurde, sind durch folgenden Auszug einer Mitteilung in der Madrider Akademie-Sitzung vom 30. Nov. 1863 charakterisiert („Astr. Nachr.“ 61. Band, 1864, Nr. 1462, S. 339–346):. Die zwischen einigen französischen und deutschen Geodäten streitige Frage, ob kleine

Grundlinien genügen, wurde dadurch zu beantworten gesucht, dass die lange Grundlinie in 5 Teile geteilt wurde, welche unter sich durch ein Netz von 10 Punkten mit 120 Dreiecken und 45 Verbindungs-Linien trigonometrisch verbunden wurden. Die trigonometrische Rechnung, welche sich auf das Mittelstück stützte, gab für die vier äusseren Stücke Werte, welche von den unmittelbar gemessenen Längen nur sehr wenig abwichen, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

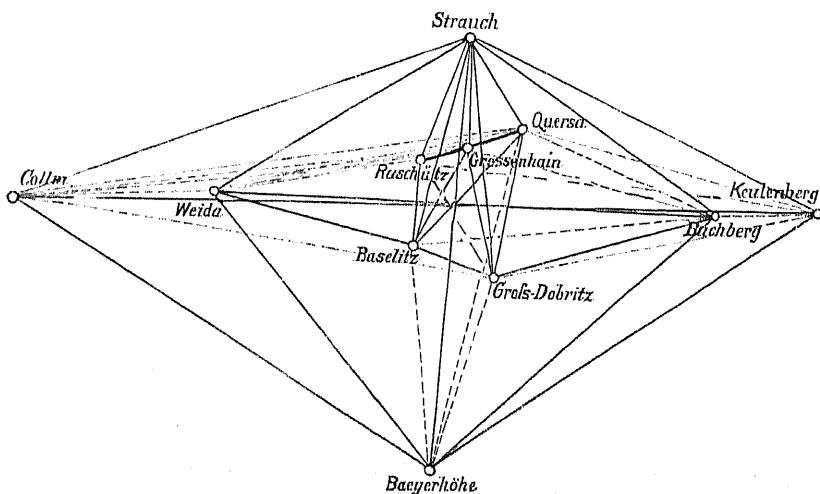
	Messung	Triangulierung	Differenzen
1te Sektion	3077,459 ^m	3077,462 ^m	— 0,003 ^m = — 1 ^{mm} für 1 ^{km}
2te „	2216,397	2216,399	— 0,002 = — 1 „ „
3te „	2766,604	(2766,604)	. . .
4te „	2723,425	2723,422	+ 0,003 = + 1 „ „
5te „	3879,000	3879,002	— 0,002 = — 0,5 „ „
Basis	14662,885 ^m	14662,889 ^m	— 0,004 ^m = — 0,3 ^{mm} für 1 ^{km}

Wenn, wie von den spanischen Geodäten beabsichtigt wurde, diese 4 Differenzen — 3^{mm}, — 2^{mm}, + 3^{mm}, — 2^{mm} zur Entscheidung der Frage langer oder kurzer Grundlinien dienen sollen, so ist damit die Frage zu Gunsten der kurzen Linien für diesen Fall entschieden.

Weiteres über diese spanische Vermessung giebt der Gen.-Ber. der „Eur. Gr. für 1869, S. 62—65 und für 1876, S. 125—128“, sowie das Werk: „Memorias del instituto geografico y estadistico“, ferner (nach einem Citat des Gen.-Ber. für 1869, S. 63:) „Base centrale de la triangulation géodésique de l'Espagne par les Colonels Ibanez et Saavedra, 1865“.

6) Sächsische Basis bei Grossenhain, 1872.

Fig. 6.
Sächsische Basis bei Grossenhain.
Massstab 1 : 600 000.
Raschütz-Quersa = 8009 m.



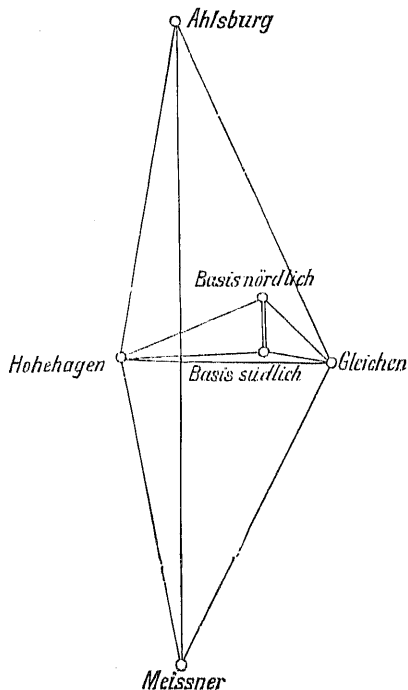
Für die Gradmessung und Landes-Triangulierung im Königreiche Sachsen wurde im Jahre 1872 eine lange Grundlinie mit dem *Besselschen* Apparat unter Leitung von *Nagel* und *Bruhns* gemessen, deren Basisnetz in Fig. 6. (S. 117) gezeichnet ist.

Näheres hierüber giebt das amtliche Werk: „Astr. geodät. Arbeiten für die Europ. Gradm. im Königreich Sachsen, I. Abteil. die Grossenhainer Grundlinie, von *Bruhns* und *Nagel*, Berlin 1882“, und Auszug hieraus im „Civilingenieur XXVIII, 1882, Heft 1“, und Bericht von *Helmert* in der „Zeitschr. f. Verm. 1883“, S. 596–604.

Aus diesem *Helmertschen* Bericht ist auch unsere Fig. 6. (S. 117) entlehnt.

7) Göttinger Basis, 1880.

Fig. 7.
Göttinger Basis, 1880.
Massstab 1 : 670 000.
Basis $NS = 5193$ m., Ahlsburg-Meissner = 57 507 m.



Die Göttinger Basis ist die zwölfte der mit dem *Besselschen* Apparat gemessenen Grundlinien; die Messung geschah 1880 unter Leitung von General *Schreiber*, welcher den Mess-Apparat und dessen Anwendung zu diesem Zwecke verbessert hatte, und auch in der trigonometrischen Anlage des Basisnetzes von früherem abwich.

Das Göttinger Basisnetz Figur 7. zeichnet sich durch klassische Einfachheit aus, es entspricht dem von General *Schreiber* dabei ausgesprochenen Grundsatz, „dass die Güte der Messungen nicht in einer systemlosen Häufung von Kontrollen, sondern in einer scharfen Messung solcher Elemente zu suchen ist, welche die Genauigkeit der Schluss-Ergebnisse in erster Linie bestimmen“ („Zeitschr. für Verm. 1880“, S. 397).

In diesem Sinne wurde das Göttinger Basisnetz Veranlassung für General *Schreiber*, die Anordnung der Winkel-Beobachtungen nach dem Grundsatz günstigster Gewichts-Verteilung allgemeiner zu untersuchen (s. *Schreiber*: Die Anordnung der Winkel-Beobachtungen im Göttinger Basisnetz, „Zeitschr. f. Verm. 1882“,

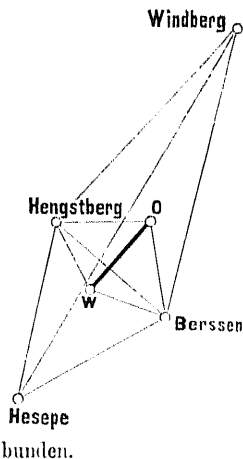
61). Wir werden später in § 23. wieder darauf zurückkommen.

8) Basis bei Meppen, 1883.

ener Basis, 1883 unter Leitung von General *Schreiber* gemessen, ent-Beziehungen ihrer Vorgängerin von Göttingen.

netz besteht nur aus 4 eigentlichen Übertragungs-Dreiecken.

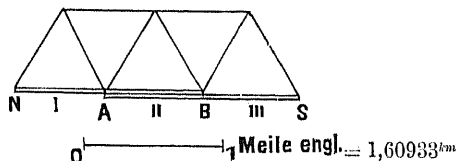
Fig. 8.
Basis bei Meppen, 1883.
Massstab 1 : 600 000.
WO = 7039 m, Hesepe-Windberg
= 34 561 m.



Antliches ist hierüber noch nicht veröffentlicht, eine vorläufige Mitteilung giebt die „Zeitschr. für Verm. 1883“, S. 577—584.

9) Basis am Kap der guten Hoffnung, 1886.

Fig. 9.
Basis am Kap der guten Hoffnung, 1886.
Massstab 1 : 86 000.
AB = 1007 m, NS = 3291 m.



Das in Fig. 9. dargestellte Basisnetz hat eine von allen unseren vorhergehenden Fig. 1—8. abweichende Form. Die 3 Abschnitte sind für sich gemessen und durch ein Gitternetz von 5 Dreiecken unter sich trigonometrisch verbunden.

Denkt man sich das Mittelstück AB allein gemessen, so lässt sich die Gesamtlänge NS trigonometrisch berechnen und zwar stimmte dieses im vorliegenden Falle auf $+0,0002 - 0,0027 = -0,0025$ engl. Fuss = $0,8^{mm}$.

Die Frage der theoretischen Fehler-Fortpflanzung in einem solchen Netze werden wir später besonders behandeln (§ 20.); wir werden finden, dass das Gitternetz Fig. 9. theoretisch ungünstiger ist, als das Rhombennetz, allein das Gitternetz mit nur kurzen Seiten hat praktische Vorzüge.

(Unsere Fig. 9. ist aus einem Berichte in der „Zeitschr. f. Verm. 1887“, S. 59 entnommen.)

§ 19. Mittlere Fehler verschiedener Dreiecksseiten.

Wenn in Fig. 1. die Grundlinie b und die drei Winkel (1), (2), (3) gemessen sind, so kann man, nach Ausgleichung der drei Winkel auf 180° , die Seite B berechnen:

$$B = b \frac{\sin(2)}{\sin(1)} \quad (1)$$

und wir wollen für diese Funktion den mittleren Fehler bestimmen.

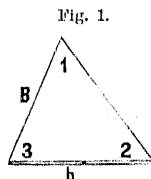
Es kommen hierbei die Formeln unseres I. Bandes § 43. S. 104 bis 106 in Betracht, und wir haben auch schon den mittleren Fehler einer Dreiecksseite im I. Band § 111. S. 324 ermittelt, doch mögen die Hauptzüge der Entwicklung hier nochmals vorgenommen werden:

Die Bedingungs-Gleichung ist:

$$+(1) + (2) + (3) - 180^\circ = 0$$

also die Coëfficienten der Bedingungs-Gleichung:

$$a_1 = +1 \quad a_2 = +1 \quad a_3 = +1 \quad (2)$$



Versteht man unter f_1, f_2, f_3 die partiellen Differentialquotienten der Funktion B nach Gleichung (1), so hat man zunächst:

$$f_1 = \frac{\partial B}{\partial (1)} = -\frac{b \sin (2)}{\sin^2 (1)} \cos (1) = -\frac{b \sin (2)}{\sin (1)} \cotg (1) = -B \cotg (1)$$

Wir wollen zur Abkürzung schreiben:

$$\cotg (1) = c_1 \quad \cotg (2) = c_2 \quad \cotg (3) = c_3 \quad (3)$$

Dann wird:

$$f_1 = -B c_1 \quad f_2 = +B c_2 \quad f_3 = 0 \quad (4)$$

Die Gewichte der drei gemessenen Winkel seien:

$$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad (5)$$

Dann ist das Gewicht P der Dreiecksseite B nach der Ausgleichung, indem hier die Basis b als fehlerfrei betrachtet wird, zunächst in allgemeiner Formel gegeben durch:

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{f f}{p} \right] - \frac{\left[\frac{a f}{p} \right] \left[\frac{a a}{p} \right]}{\left[\frac{a a}{p} \right]} \quad (6)$$

Die Einsetzung der einzelnen Teile aus (2), (4) und (5) giebt:

$$\frac{1}{P} = B^2 \left(\frac{c_1^2}{p_1} + \frac{c_2^2}{p_2} \right) - \left[\frac{1}{p} \right] \left(\frac{c_1}{p_1} - \frac{c_2}{p_2} \right)^2 \quad (7)$$

Dieses kann auch auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{1}{P} = B^2 \frac{p_1 c_2^2 + p_2 c_1^2 + p_3 (c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \quad (8)$$

Setzt man den mittleren Gewichtseinheits-Fehler $= \pm \mu$, so hat man auch den mittleren Fehler der Seite B , den wir mit $m(B)$ bezeichnen wollen:

$$m(B) = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{1}{P}} = \frac{\mu}{\varrho} B \sqrt{\frac{p_1 c_2^2 + p_2 c_1^2 + p_3 (c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}} \quad (9)^{+}$$

Wir wollen auch noch den mittleren Fehler der Längen-Einheit von B einführen, und hiefür das Zeichen $\mu(B)$ setzen, also:

$$\frac{m(B)}{B} = \mu(B) = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{p_1 c_2^2 + p_2 c_1^2 + p_3 (c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}} \quad (10)^{+}$$

Nach diesen verschiedenen Formen kann die Genauigkeit der trigonometrischen Übertragung von b auf B beurteilt werden.

Aus der Formel (7) ist zu erschen, dass mit $c_1 = c_2$, oder mit Winkel (1) = Winkel (2), der zweite Teil ganz fortfällt, und dass dann p_3 gar nicht mehr in der Formel vorkommt; wenn also das Dreieck mit (1) = (2) gleichschenkelig ist, also $B = b$, so ist der Winkel (3) bei der Messung *gleichgültig*. Dieses zuerst eigentümlich klingende

*) Es soll für diese und die folgenden Betrachtungen das Zeichen m wie ein Funktionszeichen gebraucht werden, allgemein $m(x)$ = mittlerer Fehler von x , und $\mu(x)$ soll einen mittleren sogenannten *relativen* Fehler bedeuten, nämlich $\mu(x) = \frac{m(x)}{x}$, während μ an und für sich den mittleren Gewichtseinheits-Fehler, d. h. den mittleren Winkelfehler in Sekunden bezeichnet.

Ergebnis haben wir schon früher im I. Bande, S. 324 erwähnt; und wenn man *nur* die Seite B von Fig. 1. (S. 119) bestimmen wollte und B nahezu $= b$ ist, dann brauchte man in der That den Winkel (3) gar nicht oder nur oberflächlich zu messen; da man aber gewöhnlich auch die *andere* Seite, welche (3) gegenüber liegt, haben will, so darf auch der Winkel (3) nicht vernachlässigt werden.

Wenn das Dreieck bei (3) rechtwinklig ist, so wird $c_3 = 0$, B ist dann Kathete, deren mittlerer Fehler nach (10) zu berechnen ist, wobei nun $c_2 = 1 : c_1$ ist.

Gleiche Gewichte.

Aus (8) oder (10) wollen wir auch noch den besonderen Fall herleiten, dass alle Gewichte einander *gleich*, also $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ gesetzt werden; dann ist:

$$\mu(B) = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3}} (c_1^2 + c_2^2 + c_1 c_2) \quad (11)$$

und für das *gleichseitige* Dreieck mit $c_1 = c_2 = c_3 = \cotg 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ giebt dieses:

$$\mu(B) = 1,4142 \frac{\mu}{\varrho} \cotg 60^\circ \text{ oder } = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,000\,003\,96 \mu \quad (12)$$

Nimmt man $\mu = 1''$, so hat man rund $\mu(B) = 0,000\,004$, oder der Übertragungs-Fehler beträgt in diesem Falle 4 Milliontel der Länge, oder 4 Millimeter auf 1 Kilometer.

Sehr ungleiche Gewichte.

Die Formel (8) enthält auch die besonderen Fälle, dass abwechselnd p_1 oder p_2 oder $p_3 = \text{Null}$ werden; die hiefür gültigen Beziehungen haben wir bereits in Band I, S. 325 ermittelt.

Nach diesem betrachten wir aber noch den Fall, dass man die Gewichte p_1 oder p_2 verstärkt oder vermindert, je nachdem die zugehörigen Winkel (1) und (2) mehr oder weniger *spitz* werden. Namentlich ein spitzer Winkel (1) gegenüber der Basis b in Fig. 1. (S. 119) wirkt bekanntlich sehr schädlich, und das zeigt sich in den Formeln dadurch, dass $\cotg(1) = c_1$ sehr gross wird, wenn (1) klein ist. Nun zeigt aber die Formel (7), dass man dem grossen Werte c_1 dadurch entgegen wirken kann, dass man auch das Gewicht p_1 gross macht, d. h. den Winkel (1) verstärkt misst. Ebenso ist es mit c_2 und p_2 .

Wir haben damit bereits den Hauptsatz über Gewichts-Verteilung, dass man einen spitzen Winkel, der einer Basis gegenüber liegt, besonders genau messen soll.

Kette von Dreiecken.

In der Dreieckskette Fig. 2. (S. 122) ist b die Basis, daraus wird zuerst B_1 abgeleitet, dann B_2 , B_3 u. s. w. Jedenfalls entsteht jede Seite aus der vorhergehenden durch Multiplikation mit einer Sinus-Funktion, welche allgemein mit p bezeichnet sei, so dass man hat:

$$B_1 = p_1 b \quad B_2 = p_2 B_1 \quad B_3 = p_3 B_2 \quad (13)$$

Sind alle Dreiecke ähnlich, so sind auch alle $p_1, p_2, p_3 \dots$ einander gleich, doch soll diese Annahme vorerst noch nicht gemacht werden.

Indem wir mit $m(B)$ den mittleren Fehler von B , mit $m(p)$ den mittleren Fehler des Multiplikators p , u. s. w. bezeichnen, haben wir aus (13):

$$m(B_1) = m(p_1) b, \quad m(B_2) = m(p_2) B_1, \quad m(B_3) = m(p_3) B_2$$

Fig. 2.

Führt man die trigonometrische Rechnung durch alle Dreiecke hindurch, so hat man:

$$B_3 = b p_1 p_2 p_3 \dots$$

oder logarithmisch:

$$\log B_3 = \log b + \log p_1 + \log p_2 + \log p_3 + \dots \quad (14)$$

Die Basis b sei fehlerfrei, also beim Differenzieren konstant, man erhält also durch Differenzieren von (14):

$$\frac{dB_3}{B_3} = \frac{dp_1}{p_1} + \frac{dp_2}{p_2} + \frac{dp_3}{p_3} + \dots$$

Geht man von den Differentialen zu mittleren Fehlern über, so erhält man

$$\left(\frac{m(B_3)}{B_3} \right)^2 = \left(\frac{m(p_1)}{p_1} \right)^2 + \left(\frac{m(p_2)}{p_2} \right)^2 + \left(\frac{m(p_3)}{p_3} \right)^2 + \dots \quad (15)$$

Wenn alle Dreiecke, um die es sich hier handelt, einander ähnlich sind, und in durchaus gleicher Gewichts-Anordnung gemessen werden, so sind die Faktoren p und die Fehlerfunktionen $m(p_1)$, $m(p_2)$ u. s. w. alle einander gleich; und wenn man weiter annimmt, es handle sich um n Dreiecke, so giebt (15):

$$\frac{m(B_n)}{B_n} = \frac{m(p)}{p} \sqrt{n} \quad (16)$$

$$\text{oder} \quad \mu(B_n) = \mu(p) \sqrt{n} \quad (16a)$$

Der trigonometrische Übertragungs-Fehler $\mu(p)$ ist im einzelnen Falle nach (10) zu berechnen und in (16) einzusetzen. Nimmt man den sehr einfachen Fall gleichseitiger Dreiecke mit lauter gleichen Gewichten, so ist $\mu(p)$ gleich den Werten $\mu(B)$ in (12) zu nehmen, also:

$$\mu(B_n) = \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{n} = 0,000\,004 \mu \sqrt{n} \quad (17)$$

Dieses ist der relative mittlere Seitenfehler der letzten Seite einer Kette von n gleichseitigen Dreiecken.

Höhe eines Dreiecks.

Wir bestimmen den mittleren Fehler der Höhe h eines Dreiecks nach Fig. 3. mit der Funktion:

$$h = \frac{b}{\sin(1)} \sin(2) \sin(3) \quad (18)$$

Diese Funktion wird ebenso behandelt wie früher (1) S. 119. Die verschiedenen Coefficienten sind, mit der Abkürzung $\cotg(1) = c_1$ u. s. w.:

$$\begin{array}{lll} a_1 = +1 & a_2 = +1 & a_3 = +1 \\ f_1 = -c_1 h & f_2 = +c_2 h & f_3 = +c_3 h \end{array}$$

Die Formel (6) S. 120 giebt damit:

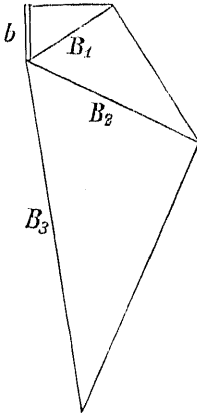
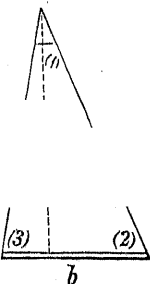


Fig. 3.



$$\frac{1}{P} = h^2 \left(\frac{c_1^2}{p_1} + \frac{c_2^2}{p_2} + \frac{c_3^2}{p_3} \right) - \left[\frac{1}{P} \right] \left(\frac{c_1}{p_1} - \frac{c_2}{p_2} - \frac{c_3}{p_3} \right)^2 \quad (19)$$

Dieses kann man auch auf folgende Form bringen:

$$\frac{1}{P} = h^2 \frac{p_1 (c_2 - c_3)^2 + p_2 (c_1 + c_3)^2 + p_3 (c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \quad (20)$$

Der mittlere Übertragungs-Fehler ist hiernach:

$$\frac{m(h)}{h} = \mu(h) = \frac{\mu}{Q} \sqrt{\frac{p_1 (c_2 - c_3)^2 + p_2 (c_1 + c_3)^2 + p_3 (c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}} \quad (21)$$

Wenn man hier die Bedeutungen $c_1 = \cotg(1)$ u. s. w. wieder einführt, so nimmt der Zähler von (20) und (21) folgende Form an:

$$p_1 \frac{\sin^2(2) - \sin^2(3)}{\sin^2(2) \sin^2(3)} + p_2 \frac{\sin^2(2)}{\sin^2(1) \sin^2(3)} + p_3 \frac{\sin^2(3)}{\sin^2(1) \sin^2(2)} \quad (21a)$$

Wenn man hier (2) = (3) setzt, also das Dreieck gleichschenkelig annimmt, so fällt das erste Glied fort, die Gleichschenkligkeit wirkt also günstig. Wir wollen diese Annahme in (21) einführen, also $c_3 = c_2$ setzen, zugleich auch soll $p_3 = p_2$ gesetzt werden, dieses giebt aus (21) und (21a):

$$\mu(h) = \frac{\mu}{Q} \sqrt{\frac{2}{(2p_1 + p_2) \sin^2(1)}} \quad (22)$$

Von dieser Formel kann man auch unmittelbar auf den Rhombus Fig. 5. S. 124 übergehen, doch wollen wir vorher noch eine allgemeinere Aufgabe einschalten.

Diagonale eines Vierecks.

In ähnlicher Weise wie für eine Dreiecksseite kann man auch das Gewicht für eine Diagonale B in Fig. 4. bestimmen, wenn auf einer Basis b nach zwei Seiten hin Dreiecke (1) (2) (3) und (1') (2') (3') aufgebaut sind.

In jedem dieser beiden Dreiecke hat man eine Bedingungs-Gleichung, also zusammen:

$$a) \quad + (1) + (2) + (3) - 180^\circ = 0$$

$$b) \quad + (1') + (2') + (3') - 180^\circ = 0$$

Die Diagonale B wird als Funktion gemessener Winkel dargestellt durch die Gleichung:

$$B^2 = a^2 + a'^2 - 2 a a' \cos(3 + 3') \quad (23)$$

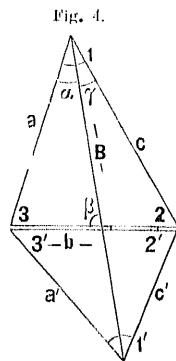
$$\text{wobei} \quad a = \frac{b}{\sin(1)} \sin(2) \quad , \quad a' = \frac{b}{\sin(1')} \sin(2')$$

Wenn man die Funktion B nach (1), (2) und (3) differenziert, und wenn man die geometrischen Beziehungen beachtet:

$$a - a' \cos(3 + 3') = B \cos \alpha, \quad \text{und} \quad a' \sin(3 + 3') = B \sin \alpha$$

so findet man:

$$\begin{aligned} f_1 &= -a \cos \alpha \cotg(1), & f_2 &= +a \cos \alpha \cotg(2), & f_3 &= +a \sin \alpha \\ f_1' &= -a' \cos \alpha' \cotg(1'), & f_2' &= +a' \cos \alpha' \cotg(2'), & f_3' &= +a' \sin \alpha \end{aligned}$$



Wenn man damit ebenso verfährt, wie bei der vorigen Aufgabe (18) (20), so findet man zuerst, dass sich die Gewichtsreciproke von I in zwei Teile zerlegt, entsprechend den zwei Dreiecken, nämlich:

$$\frac{1}{P} = I + II \quad (21)$$

Wir beschäftigen uns zunächst nur mit dem ersten Teil I, die Ausrechnung ist nicht schwierig, jedoch etwas langwierig, das Ergebnis ist:

$$I = a^2 p_1 (\sin \alpha - \cos \alpha \cotg(2))^2 + p_2 (\sin \alpha + \cos \alpha \cotg(1))^2 + p_3 \cos^2 \alpha (\cotg(1) + \cotg(2))^2$$

$$p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3$$

Den Zähler hievon kann man auf diese Form bringen:

$$p_1 \left(\frac{a \cos(\alpha + (2))}{\sin(2)} \right)^2 + p_2 \left(\frac{a \cos((1) - \alpha)}{\sin(1)} \right)^2 + p_3 \frac{(a \cos \alpha \sin((1) + (2)))^2}{\sin(1) \sin(2)}$$

$$\text{oder } p_1 \left(\frac{b}{\sin(1)} \cos((3) - (2) + \beta) \right)^2 + p_2 \left(\frac{a}{\sin(1)} \cos \gamma \right)^2 + p_3 \left(\frac{c}{\sin(1)} \cos \alpha \right)^2$$

Dieses geht in den entsprechenden Teil von (21) und (22) über, wenn man $\beta = 90^\circ$ setzt, denn dann wird $\cos((3) - (2) + \beta) = \sin((3) - (2))$ und $h = \frac{b}{\sin(1)} \sin(2) \sin(3)$ oder $h = a \sin(3) = c \sin(2)$. Dieser Übergang, der in sich richtig sein muss, dient als Entwicklungs-Probe.

Um nun zusammen zu fassen, bilden wir das mittlere Fehlerquadrat der Diagonale B von Fig. 4. S. 124:

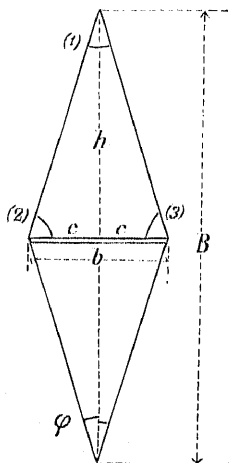
$$(m(B))^2 = \left(\frac{\mu}{\varrho} \right)^2 \left\{ \frac{p_1 b^2 \cos^2((3) - (2) + \beta) + p_2 a^2 \cos^2 \gamma + p_3 c^2 \cos^2 \alpha}{\sin^2(1) (p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)} + \frac{p_1' b'^2 \dots}{\sin^2(1') (p_1' p_2' \dots)} \right\} \quad (25)$$

Dabei soll der zweite teilweise nur angedeutete Teil in der Klammer dasselbe für das untere Dreieck von Fig. 4. bedeuten, was der erste Teil für das obere Dreieck.

Will man nicht den mittleren Fehler $m(B)$ selbst haben, sondern das Fehler-Verhältnis $m(B):B$, welches wir sonst mit $\mu(B)$ bezeichnet haben, so braucht man nur in (25) alle Masse b , a u. s. w. in Teilen von B auszudrücken, dann liefert die

Formel (25) das gewünschte $\mu(B)$.

Fig. 5.



Man kann nach der Formel (25) für jedes Basis-Rhomboid die Fehler-Übertragung von der kurzen Diagonale zur langen Diagonale beurteilen, wenn man ausser der Form des Vierecks auch den mittleren Winkelfehler μ und die sämtlichen Gewichte p kennt.

Man bemerkt sofort, dass diese Gewichte sehr ungleiche Einflüsse auf das Schluss-Ergebnis ausüben, am wichtigsten ist das Gewicht p_1 bzw. p_1' , denn in der Formel (25) trägt eine Verstärkung des Gewichtes p_1 wesentlich zur Vergrößerung des Nenners bei, und im Zähler kommt p_1 nur in Verbindung mit $\cos((3) - (2) + \beta)$ vor, was mit $\beta = 90^\circ$ und $(2) = (3)$, also in dem wichtigsten Falle, verschwindet.

Wir wollen diesen Fall, $\beta = 90^\circ$ und $p_3 = p_2$, nun behandeln, und zugleich annehmen, dass das untere Dreieck in Fig. 4. S. 123 dem oberen Dreieck symmetrisch sei, dass man also den Rhombus Fig. 5. habe. Damit giebt (25):

$$(m(B))^2 = \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 \left\{ 2 \frac{2h^2}{\sin^2(1) (2p_1 + p_2)} \right\}$$

$$\frac{m(B)}{2h} = \frac{m(B)}{B} = \mu(B) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{\sin(1)} \sqrt{\frac{1}{(2p_1 + p_2)}} \quad (26)$$

Diese Formel kann man auch einfacher aus (22) S. 123 herleiten, denn es ist $m(B) = m(h) \sqrt{2}$ und $\mu(B) = \frac{\mu(h)}{\sqrt{2}}$.

Günstigste Gewichts-Verteilung.

Nun wollen wir die frühere Frage wieder aufnehmen, welche *Verteilung* der Gewichte p_1 und p_2 am günstigsten ist? Es handelt sich dabei darum, den Ausdruck (26) möglichst klein zu machen bei konstanter Summe $p_1 + p_2 + p_3 = p_1 + 2p_2 = [p]$, (indem die Messungs-Arbeit für jeden Winkel dem Gewicht proportional gesetzt wird). Da die Gewichte in (26) nur im Nenner vorkommen, muss man darnach trachten, die Funktion $f = 2p_1 + p_2$ möglichst gross zu machen, bei konstantem $p_1 + 2p_2 = [p]$. Eliminiert man zu diesem Zwecke p_1 , indem man $p_1 = [p] - 2p_2$ in f einsetzt, so wird:

$$f = 2[p] - 4p_2 + p_2 = 2[p] - 3p_2$$

und dieses wird am grössten, wenn $p_2 = 0$ gesetzt wird, dadurch muss aber $p_1 = [p]$ werden, und man hat aus (26):

$$\mu(B) \min = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{\sin(1)} \sqrt{\frac{1}{2[p]}} \quad (27)$$

Dieses Ergebnis, dass nur der *eine* Winkel (1) an der Spitze, die beiden Basiswinkel (2) und (3) aber gar nicht zu messen sind, mag zuerst sonderbar erscheinen; man muss es aber richtig auffassen: dasselbe gilt, *wenn* das Dreieck gleichschenkelig ist; man muss also doch mindestens so viel von den Basiswinkeln messen, dass man weiss, ob die Gleichschenkligkeit vorhanden ist. Man kann also sagen: Wenn man durch vorläufige Messungen gefunden hat, dass ein Dreieck von der Form Fig. 3, S. 122 sehr nahe gleichschenkelig ist, dann kann man, wenn man nur auf die Höhe ausgeht, alle weitere Winkelmess-Arbeit auf den spitzen Winkel (1) konzentrieren.

Wir wollen nun in (26) statt des Winkels (1) das Vergrößerungs-Verhältnis $B:b = v$ einführen, oder auch, indem wir nach Fig. 5. die Hälften nehmen, $h:c = v$ setzen, wobei $\sin(1) = 2 \sin \varphi \cos \varphi$, und:

$$\sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{c^2 + h^2}} \quad \cos \varphi = \frac{h}{\sqrt{c^2 + h^2}}$$

Wenn man damit $\sin(1)$ in v ausdrückt und in (26) einsetzt, so bekommt man für den Rhombus Fig. 5.:

$$\frac{1}{\sin(1)} = \frac{1 + v^2}{2v} \quad (28)$$

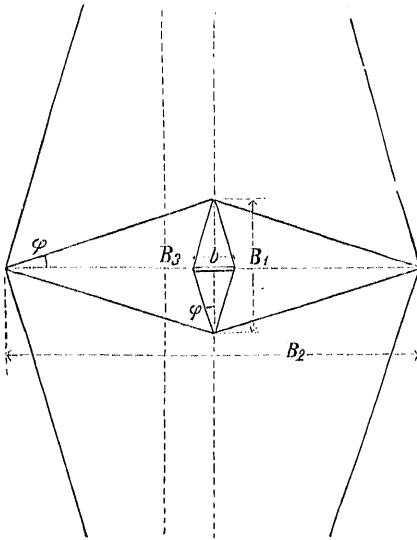
$$\mu(B) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1 + v^2}{2v} \sqrt{\frac{1}{2p_1 + p_2}} \quad (29)$$

und das Minimum, wie bei (27):

$$\mu(B) \min = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1 + v^2}{2v} \sqrt{\frac{1}{2[p]}} \quad (30)$$

Das rhombische Multiplikations-Netz.

Fig. 6.



Nach Andeutung von Fig. 6. kann man die rhombische Vergrößerung wiederholt anwenden. Wenn die Rhomben alle ähnlich und ähnlich gemessen sind, so hat man nach (26):

$$\mu(B_1) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{\sin(1)} \sqrt{\frac{1}{2p_1 + p_2}}$$

$$\mu(B_2) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{\sin(1)} \sqrt{\frac{1}{2p_1 + p_2}} \text{ u. s. w.}$$

Dieses giebt eine ähnliche Fehlerfortpflanzung, wie wir schon bei Fig. 2. S. 122 untersucht haben, und man hat daher für r malige Rhomben-Wiederholung:

$$\begin{aligned} \frac{m(B_r)}{B_r} &= \mu(B_r) \\ &= \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{\sin(1)} \sqrt{\frac{1}{2p_1 + p_2}} \sqrt[r]{r} \quad (31) \end{aligned}$$

Blieben wir zunächst bei zwei-

maliger Wiederholung stehen, so haben wir mit $r = 2$:

$$\mu(B_r) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{\sin(1)} \sqrt{\frac{2}{2p_1 + p_2}}$$

Wenn nun wieder $B_2 : b = v$ werden soll, so muss $B_2 : B_1 : B_1 : b = \sqrt{v}$ sein, und eine ähnliche Rechnung wie bei (28) giebt: $\frac{1}{\sin(1)} = \frac{1+v}{2\sqrt{v}}$,

folglich

$$\mu(B_2) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1+v}{2\sqrt{v}} \sqrt{\frac{2}{2p_1 + p_2}} \quad (32)$$

Dieses gilt für beliebige p_1 und $p_3 = p_2$; dagegen im günstigsten Falle mit $p_1 = p_1 + p_2 + p_3 = [p]$ hat man:

$$\mu(B_2) \min = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1+v}{2\sqrt{v}} \sqrt{\frac{1}{[p]}} \quad (33)$$

Nun kann man die Ausdrücke (30) und (32) zweckmässig vergleichen, es sei kurz (μ) der Fehler-Ausdruck nach (30) für einen Rhombus, und $(\mu)''$ für zwei Rhomben, und das Vergrößerungs-Verhältnis v sei in beiden Fällen dasselbe. Dann hat man das Verhältnis $(\mu'') : (\mu)$ oder $\mu(B_2) : \mu(B) = q$ wie folgt:

$$q = \frac{1+v}{\sqrt{2v}} : \frac{1+v^2}{2v} \quad , \quad q = \frac{1+v}{1+v^2} \sqrt{2v}$$

Dieses Verhältnis ist immer grösser als 1 und giebt z. B.

wenn $v = 5$, $q = 0,730$, wenn $v = 10$, $q = 0,487$.

Der Doppelrhombus ist also immer günstiger als der einfache Rhombus.

$$F = s_1 + s_2 + s_3$$

$$F = \frac{b}{\sin(1)} \sin(2) + \frac{b}{\sin(1)} \frac{\sin(3) \sin(5)}{\sin(4) \sin(7)} \sin(8) + \frac{b}{\sin(1)} \frac{\sin(3) \sin(5) \sin(9) \sin(11)}{\sin(4) \sin(7) \sin(10) \sin(13)} \sin(14) \quad (5)$$

Die Differential-Quotienten sind:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial F}{\partial(1)} = -s_1 \cot g(1) - s_2 \cot g(1) - s_3 \cot g(1) \\ f_2 &= \frac{\partial F}{\partial(2)} = +s_1 \cot g(2) \\ f_3 &= \frac{\partial F}{\partial(3)} = -s_2 \cot g(3) + s_3 \cot g(3) \\ f_4 &= \frac{\partial F}{\partial(4)} = -s_2 \cot g(4) - s_3 \cot g(4) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

In dieser Weise bekommt man 15 Werte f , welche wir nun, mit Einführung von $(1) = (2) = (3) = \dots = 60^\circ$ und $\cot g 60^\circ = c$, sowie $s_1 = s_2 = s_3 = \dots = s$ so zusammenstellen:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= -3sc & f_7 &= -2sc & f_{13} &= -1sc \\ f_2 &= +1sc & f_8 &= -1sc & f_{14} &= +1sc \\ f_3 &= +2sc & f_9 &= -1sc & f_{15} &= 0 \\ f_4 &= -2sc & f_{10} &= -1sc \\ f_5 &= +2sc & f_{11} &= -1sc \\ f_6 &= 0 & f_{12} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Nun sieht man zuerst aus der Verbindung mit (1), dass

$$[af] = f_1 + f_2 + f_3 = 0, \quad [bf] = f_4 + f_5 + f_6 = 0, \quad [cf] = 0 \text{ u. s. w.}$$

Damit wird die Gewichts-Formel (3) sehr einfach, nämlich:

$$\frac{1}{P} = [ff] = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + \dots \quad (8)$$

Setzt man hier die Werte f nach (7) ein, so findet man:

$$\frac{1}{P} = (9 + 1 + 4 + 4 + 4 + 0 \dots) s^2 c^2 = 32 s^2 c^2 = 32 s^2 \cot g^2 60^\circ \quad (9)$$

Indessen gilt das zunächst nur für den Fall *dreier* Seiten $s_1 + s_2 + s_3$.

Wichtiger wird es sein, das allgemeine Gesetz der Gewichts-Formel (9) für irgend welche Seitenzahl zu bestimmen, etwa für n Seiten nach der Formel:

$$F_n = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \dots s_n \quad (10)$$

Denkt man sich hierzu die Reihe (5) fortgesetzt, so sieht man leicht, dass die Winkel (2), (8) und (14) nur in jedem Gliede einmal vorkommen, der Winkel (1) kommt in allen n Gliedern vor, und ähnliche Gesetze zeigen sich auch im übrigen, so dass man folgendes findet:

Winkel (1) giebt $(-sc - sc - sc \dots)^2 \dots = (nsc)^2 = n^2 (sc)^2$

" (2), (8), (14) ... geben $(sc)^2 + (sc)^2 + (sc)^2 + \dots = n (sc)^2$

Die Gruppe $\frac{(3)(5)}{(4)(7)}$ giebt $\dots + \dots = 4(n-1)^2 (sc)^2$

Die Gruppe $\frac{(9)(11)}{(10)(13)}$ giebt $\dots + \dots = 4(n-2)^2 (sc)^2$

Die nächste Gruppe giebt $\dots = 4(n-3)^2 (sc)^2$

Die letzte derartige Gruppe giebt $\dots = 4(1)^2 (sc)^2$

Im Ganzen hat man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_n} &= \left(n^2 + n + 4((n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 2^2 + 1^2) \right) (sc)^2 \\ &= -3n^2 + n + 4(n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 2^2 + 1^2) (sc)^2 \end{aligned}$$

Nun ist aber die Summe der *n*-ersten Quadrate bekanntlich:

$$n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

und damit wird:

$$\frac{1}{P_n} = \left(-3n^2 + n + 4 \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \right) s^2 c^2 = \frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{3} s^2 c^2$$

Dabei ist $c = \cotg 60^\circ = 0,577$, $c^2 = \frac{1}{3}$, und wenn man nun den mittleren

Fehler eines gemessenen Winkels mit μ einführt, so ist der mittlere Fehler der Seiten-summe $s_1 + s_2 + s_3 \dots s_n$, mit Anwendung der Bezeichnungsart der Anmerkung S. 120:

$$m(n s) = \frac{\mu}{\varrho} s \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{3}} \quad (11)$$

Meist will man nicht den Fehler selbst haben, sondern das Verhältnis des Fehlers zu $s_1 + s_2 + \dots + s_n$ oder den sogenannten relativen Fehler, dieser ist:

$$\frac{m(n s)}{n s} = \mu(n s) = \frac{\mu}{\varrho} \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{3n}} \quad (12)$$

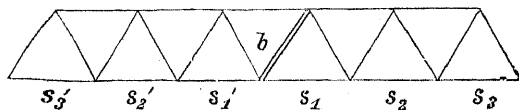
Nachdem wir so den Fall der Dreieckskette Fig. 1. S. 127 in aller Ausführlichkeit behandelt haben, wollen wir noch einige andere ähnliche Fälle betrachten, jedoch nur die Schluss-Ergebnisse hier mitteilen, da die Entwicklung nach dem vorstehenden keine Schwierigkeit bieten kann.

In Fig. 2. soll es sich um die Summe $s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n$ handeln; der mittlere Fehler dieser Summe wird gefunden:

$$m(n s) = \frac{\mu}{\varrho} s \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{4n^3 + 3n^2 + 5n}{3}} \quad (13)$$

Nun kann man die zwei Fälle von Fig. 1. S. 127 und Fig. 2. zusammen nehmen.

Fig. 3.



Wenn man hiernach in Fig. 3. die Summe der auf einerlei Seite der Kette liegenden Seiten betrachtet:

$$s_1 + s_2 + s_3 + \dots s_n + s_1' + s_2' + s_3' + \dots s_n'$$

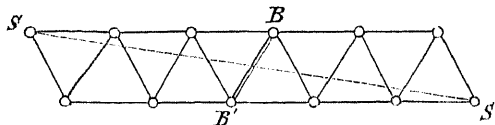
so findet man dafür den mittleren Fehler durch Zusammensetzung von (11) und (13), nämlich:

$$m(n s + n' s) = \frac{\mu}{\varrho} s \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{(4 n^3 - 3 n^2 + 5 n) + (4 n'^3 + 3 n'^2 + 5 n')}{3}} \quad (14)$$

Nimmt man hier $n' = n$ und $n + n' = v$, so wird:

$$m(v s) = \frac{\mu}{\varrho} s \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{8 n^3 + 10 n}{3}} \text{ oder } = \frac{\mu}{\varrho} s \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{v^3 - 5 v}{3}} \quad (15)$$

Fig. 4.



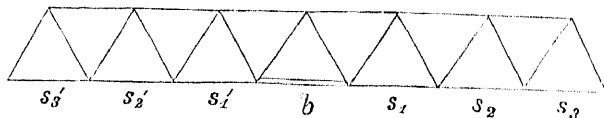
Eine andere Zusammenfassung von Fig. 1. und Fig. 2. zeigt Fig. 4., wobei es sich um die Diagonale SS' handelt, welche näherungsweise etwa $= SB + B'S'$ gesetzt werden kann. Hierfür ist mit

zweifacher Anwendung von (11), mit $2 n = v$:

$$\begin{aligned} m(v s) &= \frac{\mu}{\varrho} s \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{8 n^3 - 6 n^2 + 10 n}{3}} \\ &= \frac{\mu}{\varrho} s \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{2 v^3 - 3 v^2 + 10 v}{6}} \end{aligned} \quad (16)$$

Einen weiteren Fall nehmen wir mit Fig. 5. vor. Die Basis b liegt in der Kettenrichtung selbst. Für die Summe nach der einen Seite $s_1 + s_2 + s_3 + \dots s_n$ findet man:

Fig. 5.



$$m(n s) = \frac{\mu}{\varrho} \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{4 n^3 + 9 n^2 + 5 n}{3}} \quad (17)$$

Für die Gesamtsumme $s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_1' + s_2' + s_3' + \dots$ genügt es nicht, diese Formel (17) zweifach anzuwenden, denn der Winkel, welcher der Basis b gegenüber liegt, hat auf beide Seiten Einfluss. Die selbständige Entwicklung für die Summe $s_1 + s_2 + s_3 + \dots s_n + s_1' + s_2' + s_3' + \dots s_n'$ giebt:

$$m(b + n s + n' s) = \frac{\mu}{\varrho} \cotg 60^\circ \sqrt{(n + n')^2 + \frac{4 n^3 + 6 n^2 + 5 n}{3} + \frac{4 n'^3 + 6 n'^2 + 5 n'}{3}} \quad (18)$$

Setzt man hier $n' = n$, so wird:

$$m((2 n + 1) s) = \frac{\mu}{\varrho} s \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{8 n^3 + 24 n^2 + 10 n}{3}} \quad (19)$$

Die ganze abgeleitete Länge ist hier $= (2n + 1)s$, weil das Mittelstück s als fehlerfreie Basis mitgerechnet wird; wir wollen deswegen nun setzen $2n + 1 = v$, und damit kann man das vorstehende auf folgende Form bringen:

$$m(vs) = \frac{\mu}{\varrho} s \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{v^3 + 3v^2 - 4v}{3}} \quad (20)$$

Vergleichen wir nun die Fehlerformeln (15), (16) und (20) für die drei Hauptfälle, so ergibt sich, dass der dritte Fall (20) mit Fig. 5. etwas ungünstiger ist, als die beiden ersten Fälle, und daraus folgt, dass es besser ist, die Basis b *quer* zur Kette zu legen, wie in Fig. 3. und 4., als nach der Längsrichtung, Fig. 5.

Wenn aber die Kette sehr *lang* ist, d. h. n oder v sehr gross, so kann man alle Formeln näherungsweise als gleich betrachten, indem man n und n^2 gegen n^3 vernachlässigt. Man sieht dann auch, dass die Formeln mit v allgemein die Hälfte der entsprechenden Formeln für n geben, dass es also jedenfalls günstiger ist, die Basis in die Mitte als an das Ende der Kette zu legen, indem z. B. die Verdoppelung der Kettenlänge von der Mitte aus nur das $\sqrt{2}$ fache des Fehlers, dagegen von einem Ende aus das $\sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$ fache giebt.

Mit der angegebenen Näherung haben wir aus (11):

$$m(ns) = \frac{\mu}{\varrho} s \cotg 60^\circ \sqrt[4]{\frac{n^3}{3}} \quad (21)$$

Oft will man nicht den Fehler m selbst haben, sondern das Verhältnis des Fehlers zu der fraglichen Länge $s_1 + s_2 + \dots s_n$ oder den sogenannten relativen Fehler. Derselbe ist für (21):

$$\mu(ns) = \frac{m(ns)}{ns} = \frac{\mu}{\varrho} \cotg 60^\circ \sqrt[4]{\frac{n^3}{3}} \quad (22)$$

Oder da $\cotg 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, haben wir:

$$\mu(ns) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{2}{3} \sqrt[4]{n}$$

Setzt man rund $\mu = \pm 1''$, so giebt dieses:

$$\mu(ns) = 0,000\,003\,23 \sqrt[4]{n}$$

Dieses ist der relative Fehler für n fache Ketten-Ausdehnung von der Basis an einem Ende der Kette. Ist dagegen die Basis in der Mitte, und dehnt sich die Kette nach beiden Seiten je um das $\frac{v}{2}$ fache der Basis, also im ganzen wieder um das v fache aus, so bekommt man:

$$\mu(vs) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{3} \sqrt[4]{v} \text{ oder } = 0,000\,001\,62 \sqrt[4]{v}$$

Vergleichung der Rhomben-Diagonale mit der Gitterlinie.

Von allen Vergleichen, welche zwischen den Formeln dieses § unter sich und mit denen des vorhergehenden § 19. angestellt werden können, wollen wir hier nur die wichtigste herausheben, entsprechend Fig. 6. (S. 132), wo eine Rhomben-Diagonale B und eine Gitterlinie B , beide $= 5b$, dargestellt sind.

Für die mittleren Fehler haben wir nach (29) § 19., S. 125, und nach (20) § 20., S. 131:

$$\text{Rhombus: } \mu(B) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1+v^2}{2v} \sqrt{\frac{1}{2p_1+p_2}}$$

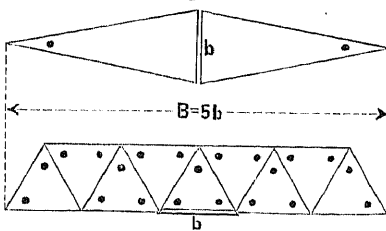
$$\text{Gitter: } \mu(B) = \frac{\mu}{\varrho} \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{v^2+3v-4}{3v}}$$

Nimmt man im ersten Falle $p_1 = p_2 = 1$, also $2p_1 + p_2 = 3$ und in beiden Fällen $\mu = \text{rund } \pm 1''$ und $v = 5$, so erhält man:

$$\text{Rhombus } \mu(B) = 0,000\,007\,27 \text{ rund} = 7 \text{ Milliontel}$$

$$\text{Gitter } \mu(B) = 0,000\,004\,34 \text{ „} = 4 \text{ Milliontel}$$

Fig. 6.



9 Dreiecke mit 27 Winkeln, oder wenn man die unwichtigen Winkel ausscheidet, immer noch 21 Winkel.

Trotz dieses starken theoretischen Missverhältnisses könnte doch auch das Gitternetz, wegen der *kurzen* Seiten, unter Umständen praktische Verwendung als Basisnetz finden. (vgl. S. 119.)

Azimuth-Übertragung.

Die Azimuth-Übertragung längs einer Dreieckskette besteht einfach in der *Summierung* aller längs eines Polygons auftretender Dreieckswinkel, z. B. in Fig. 1. (S. 127) besteht die Azimuth-Übertragung längs $s_1 + s_2 + s_3$ in der Summierung (3) + (1) + (6) + (9) + (7) + ...

Wenn jedoch die Azimuth-Übertragung längs der Haupterstreckung einer Dreieckskette besonders wichtig ist, so soll man schon die Anordnung der Messungen darnach einrichten, also nicht bloss die einzelnen je 60° betragenden Winkel in den Ketten von Fig. 1. bis 5. S. 127—130 messen, sondern die je nahezu 180° betragenden Winkel der in der Haupterstreckung liegenden Seiten.

Besser noch ist es, für die Zwecke der Azimuth-Übertragung die Dreiecksseiten besonders anzuordnen, wie z. B. *Bessel* bei der Gradmessung in Ostpreussen gethan hat. Dieses ist aus der Fig. 5. S. 14 unserer Einleitung zu erschen, indem auf der nordwestlichen Gesanterstreckung Tinz-Galtgarben-Nidden-Memel nur zwei Zwischenpunkte Galtgarben und Nidden sind, während auf der südöstlichen Grenze 7 Zwischenpunkte zur Azimuth-Übertragung nötig wären.

§ 21. Anordnung der Triangulierungs-Ketten und der Triangulierungs-Netze.

Nachdem wir schon früher in § 2. S. 17 u. ff. die Aufsuchung und Auswahl der Triangulierungs-Punkte in dem Sinne behandelt haben, welche Punkte man vermöge der gegenseitigen Sichten u. s. w. benützen *kann*, wollen wir nun die mehr theoretische Frage aufwerfen, welche Punkte und welche Verbindungs-Sichten man nehmen *will*.

Nach der ersten Einführung der Methode der kleinsten Quadrate in die Triangulierungen ist bald die Anschauung entstanden, dass man nun darauf ausgehen müsse, äusserst *viele* Messungen und Kontrollen in *eine* Ausgleichung zusammen zu bringen, und es gab eine Zeit, in welcher es als höchste Triangulierungs-Leistung gepriesen wurde, 100 und mehr Bedingungs-Gleichungen zusammen zu fassen und ebenso viele Normalgleichungen numerisch aufzulösen. In dieser Beziehung haben sich die Anschauungen wieder teilweise geändert.

Wir beschränken uns hier auf Mitteilung der Grundsätze, welche bei den neuesten Triangulierungen der preussischen Landes-Aufnahme unter General *Schreiber* zur Anwendung kommen; und wir benützen dazu das sehr anschauliche und charakteristische Beispiel der Ketten und des Netzes in der Provinz Hannover, welche in unserer Fig. 1. S. 134 dargestellt sind.

Wir haben auf dem hier dargestellten Gebiete *drei* Grundlinien:

- | | |
|----|---|
| 1) | Grundlinie bei Braak in Holstein im Jahre 1871 gemessen, 5875 ^m lang |
| 2) | " " Göttingen " " 1880 " 5193 ^m " |
| 3) | " " Meppen " " 1883 " 7039 ^m " |

Die geradlinigen Entfernungen dieser Grundlinien von einander sind rund im Mittel 230^{km} und zu der trigonometrischen Verbindung sind drei zusammenschliessende *Ketten* angeordnet, nämlich die „Hannoversche Kette“ im Westen, sowie Teile der „Elbkette“ und der „Hannoversch-Sächsischen Kette“ im Osten.

Diese *Ketten* wurden zuerst in sich ausgeglichen, und liefern dann den festen Rahmen für das dazwischenliegende „*Netz*“, welches den Namen „Weser-Netz“ führt.

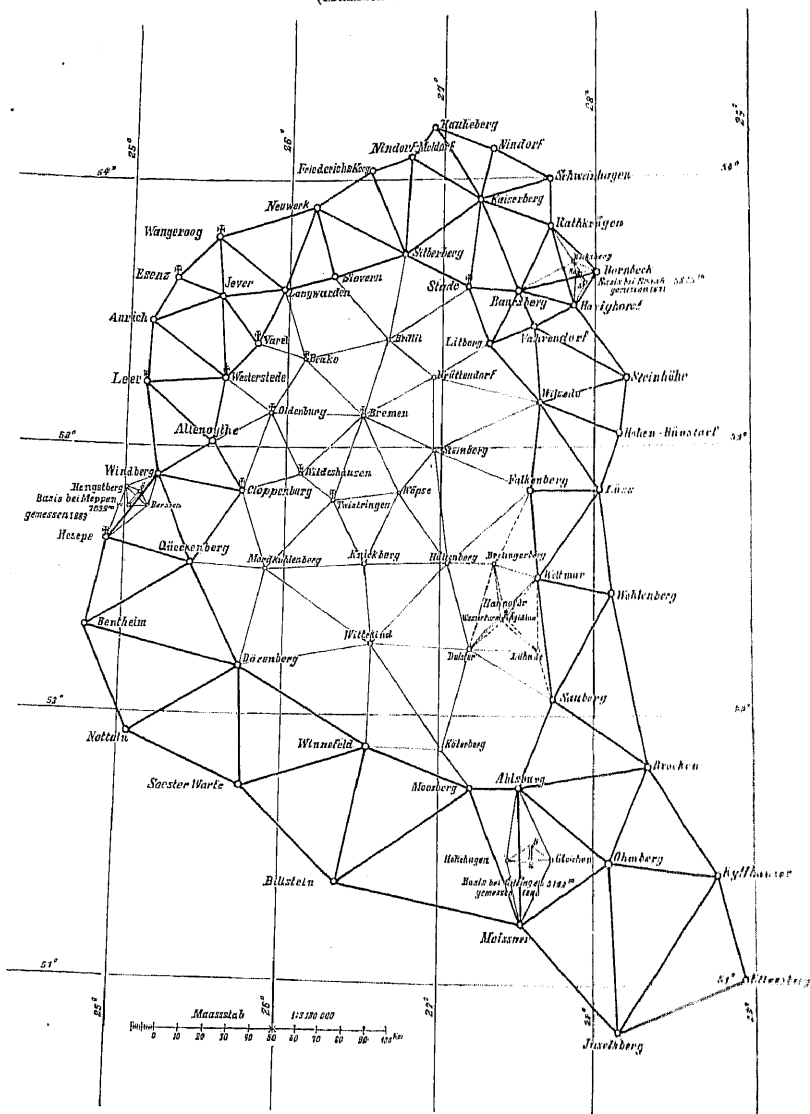
Ehe wir mit der Beschreibung dieser besonderen Verhältnisse fortfahren, müssen wir hier über die Anlage der preussischen Ketten und Netze im allgemeinen das Nötige berichten.

Es geschieht dieses am besten durch Vorführung der *geschichtlichen Entwicklung*, welche diese Anlage und die zugehörigen Ausgleichungen genommen haben, nach einer Mitteilung von Major *Haupt* in den „astron. Nachrichten“ 107. Band, Nr. 2549—2550, (Sept. 1883):

Als in den 60er Jahren dieses Jahrhunderts bei der preussischen Landes-Triangulierung Ketten, welche einen von Dreiecken freien Landesteil umspannten, wieder in sich zusammen schlossen, stellte sich der Übelstand heraus, dass trotz der Aufstellung aller vorhandenen und notwendigen Winkel- und Seiten-Gleichungen, identische Punkte, von verschiedenen Seiten her berechnet, *nicht* dieselbe Länge und Breite erhielten, und dass der von Dreiecken freie innere Raum, das Polygon, *nicht* die seinem Inhalt entsprechende Winkelsumme erhielt, denn es fehlten die drei sogenannten Polygon-Gleichungen.

Fig. 1.

Triangulierung der trigonometrischen Abteilung der Landes-Aufnahme,
in der Provinz Hannover.
(Maßstab 1:3 130 000.)



Der erste, welcher eine Methode zur Aufstellung dieser Polygon-Gleichungen gab, war der Premier-Lieutenant v. *Prondzynski* („Astr. Nachr.“ Nr. 1690, 71. Band, 1868, S. 145–154 und Nr. 1782, 75. Band, 1869, S. 81–90). Er zog Richtungs-Korrekturen der jüngsten Kette durch die ganzen Längen-, Breiten- und Azimut-Rechnungen hindurch, und bildete so drei neue Gleichungen.

Demnächst gab Professor *Börsch* eine andere, aber im allgemeinen nicht einfachere Methode an („Astr. Nachr.“ Nr. 1697 und 1704, 71. Band (1868), S. 266—268 und S. 379—380), welche darauf gegründet ist, den inneren freien Raum zwischen den verschiedenen Ketten mit zu rechnenden Dreiecken zu überspannen und so die fehlenden Gleichungen aufzustellen.

Hier ist auch *Zachariae*: „Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Coordinaten“ (deutsch von *Lamp*, Berlin 1878) S. 156, zu zitieren, wo für „Kranz-Systeme“ die nötigen Gleichungen durch Einführung fingierter Messungen und Wiederelimination derselben gewonnen werden.

Diese Methoden wurden bei der preussischen Landes-Triangulation nicht benützt; das in Wirklichkeit von dieser Behörde angewandte Verfahren wurde von dem damaligen Hauptmann *Schreiber* (jetzigen General und Chef der Landes-Aufnahme) angegeben, dasselbe liefert zwei Gleichungen durch die Projektion der inneren Polygonkranz-Begrenzung auf ein beliebig angenommenes rechtwinkliges, sphäroidisches Coordinaten-System.

Diese *Schreibersche* Methode des Polygonkranz-Anschlusses durch rechtwinklige Coordinaten ist mitgeteilt in dem Werke: „Die königlich preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke. Erster Teil, Berlin 1870, S. 421 und Hauptdreiecke II. Teil, Berlin 1874, S. 605“.

Wir haben einen Bericht hierüber mit einem Beispiele gegeben in „*Jordan-Steppes*, deutsches Vermessungswesen“, 1885, S. 81—85 und S. 103, und bemerken hiezu, dass die ersten *Schreiberschen* Formeln von 1870 („Hauptdreiecke I, S. 421“) sich rein *sphärisch* mit einem mittleren Krümmungs-Halbmesser entwickeln lassen, und so mit den bekannten *Soldnerschen* Coordinaten-Formeln zusammenfallen, während die zweiten *Schreiber*-schen Formeln von 1874 („Hauptdreiecke II, S. 605“) noch höhere Glieder hinzufügen, entsprechend der *Gauss'schen* Abhandlung: „Disquisitiones generales circa superficies curvas“.

Das *mathematische* Problem war damit gelöst, es blieb aber der Übelstand, dass immer die jüngste Kette alle diejenigen Missstimmigkeiten, welche sich in den vorhergehenden, zwanglos in freies Feld verlaufenden und oft von verschiedenen Grundlinien ausgehenden Ketten angehäuften hatten, einzig und allein durch *ihre* Winkel-Korrekturen ausgleichen musste, und dass der innere zunächst frei gebliebene Raum bei seiner späteren Überspannung mit sekundären Dreiecken sämtliche Fehler dieses nicht stimmenden Schlusses mit übernehmen musste.

Dieses rührt davon her, dass man wegen des nötigen Fortschrittes der Messungen niederen Ranges, zum Anschluss der Kataster-Aufnahmen und der topographischen Aufnahmen, nicht warten kann, bis das Ganze fertig ist, sondern alle 2 bis 3 Jahre das Gemessene berechnen und dem bereits fest stehenden anpassen muss.

Nach diesem drucken wir noch den Hauptinhalt eines von General *Schreiber* veröffentlichten „Berichtes der trigonometrischen Abteilung der königlich preussischen Landes-Aufnahme“ ab, aus den „Verhandlungen der 1887er Konferenz d. perm. Kommission der internat. Erdmessung, Berlin 1888, Annex X^b, S. 6—10“:

Das Wesernetz (Fig. 1. S. 134) enthält 66, in drei verschiedene Rangklassen sich scheidende Punkte, nämlich:

- 1) 18 Anschlusspunkte, die zugleich den das Netz rings umschliessenden Hauptdreiecksketten angehören und durch deren Ausgleichung endgültig bestimmt sind;
- 2) 15 Netzpunkte;
- 3) 33 Zwischenpunkte erster Ordnung.

Wenn man dagegen die Seite S aus dem *einen* grossen Dreieck ABD bestimmt, so bekommt man nach (12) § 19. S. 121:

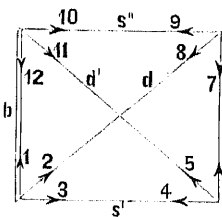
$$\mu(S) = 1,4142 \frac{\mu}{\varrho} \cotg 60^\circ = 0,000\,003\,96\,\mu \quad (4)$$

Die Bestimmung (4) der Seite S aus dem *einen* grossen Dreiecke ist also hier fast gleich günstig wie die Bestimmung (3) aus den 4 kleinen Dreiecken, trotzdem, dass mit den 4 kleinen Dreiecken der günstige Zwischenpunkt C mit benützt wurde, der in dem *einen* grossen Dreieck gar nicht vorkommt.

Bedenkt man noch, dass in den 4 Einzeldreiecken zusammen 4 mal so viel Winkel zu messen sind, als in dem *einen* Gesamtdreieck, oder dass man bei gleicher Winkelmessungs-Summe (Arbeit) die Seite S aus *einem* grossen Dreiecke nahezu doppelt so genau bekommt, als aus den vier kleinen Dreiecken, so erscheint das *eine* grosse Dreieck im Vorteil.

II. Diagonalen-Kontrolle.

Fig. 2.



In Fig. 2. haben wir ein Quadrat mit zwei Diagonalen gezeichnet, wobei die Seite b als Grundlinie gilt, aus welcher die anderen Seiten s' , s und s'' trigonometrisch abgeleitet werden sollen.

Die ganze Figur ist bestimmt, auch wenn nur *eine* Diagonale eingemessen ist, und wir wollen untersuchen, welche Genauigkeits-Änderung stattfindet, je nachdem eine oder beide Diagonalen d und d' gemessen sind.

Die Messungen seien nach Richtungen gemacht, so dass für das volle Netz mit beiden Diagonalen 12 Richtungen gleichgewichtig vorliegen; wenn dagegen die Diagonale d' nicht vorhanden ist, fallen die beiden Richtungen (5) und (11) fort.

Im Ganzen hat das Netz 4 Bedingungs-Gleichungen, nämlich eine Seiten-Gleichung und drei Winkelsummen-Gleichungen, diese 4 Gleichungen sind:

$$a) \frac{\sin(2, 3) \sin(4, 5) \sin(7, 9) \sin(10, 12)}{\sin(1, 3) \sin(4, 6) \sin(8, 9) \sin(10, 11)} = 1 \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} b) & (10, 12) + (1, 2) + (8, 9) = 180^\circ \\ c) & (1, 3) + (4, 5) + (11, 12) = 180^\circ \\ d) & (2, 3) + (4, 6) + (7, 8) = 180^\circ \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Wenn es sich um die Bestimmung des Gewichtes der Seite s handelt, so kommt hiezu noch:

$$f) \frac{s}{b} = \frac{\sin(2, 3) \sin(10, 12)}{\sin(4, 6) \sin(8, 9)}$$

Um die Gleichungen a) und f) linear zu machen, braucht man bekanntlich die Cotangenten der Winkel als Coefficienten, und da in unserem Falle nur Winkel von 45° oder 90° vorkommen, für welche man z. B. hat:

$$\cotg(2, 3) = \cotg 45^\circ = 1, \quad \cotg(7, 9) = \cotg 90^\circ = 0,$$

so werden die linearen Gleichungen sehr einfach.

Auf diese Weise bekommt man aus a) eine Gleichung von folgender Form:

$$-v_2 + v_3 - v_4 + v_5 + v_8 - v_9 + v_{10} - v_{11} + \dots = 0 \quad (7)$$

Die Gleichung b) wird geben:

$$-v_1 + v_2 - v_8 + v_9 - v_{10} + v_{12} + \dots = 0 \quad (8)$$

Das ganze so zu bildende Coëfficienten-System ist in folgender Tabelle enthalten:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
a	.	-1	+1	-1	+1	.	.	+1	-1	+1	-1	.
b	-1	+1	-1	+1	-1	.	+1
c	-1	.	+1	-1	+1	-1	+1
d	.	-1	+1	-1	.	+1	-1	+1
f	.	-1	+1	+1	-1	.	.	.

$$\left. \vphantom{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ f \end{matrix}} \right\} \quad (9)$$

Dieses gibt $[a a] = (-1)^2 + (-1)^2 + \dots = +8$

$$[a b] = (-1)(+1) + \dots = -4$$

Das ganze derartige Coëfficienten-System ist:

<u>+8</u>	-4	+4	+4	+4
	<u>+6</u>	+2	-2	-3
		<u>+6</u>	+2	+1
			<u>+6</u>	+3
				<u>+4</u>

$$\left. \vphantom{\begin{matrix} +8 \\ +6 \\ +6 \\ +6 \\ +4 \end{matrix}} \right\} \quad (10)$$

Durch allmähliche Elimination erhält man:

<u>+4</u>	+4	0	-1
	<u>+4</u>	0	-1
		<u>+4</u>	+1
			<u>+2</u>

$$\left. \vphantom{\begin{matrix} +4 \\ +4 \\ +4 \\ +2 \end{matrix}} \right\} \quad (10_a)$$

0	0	0
	<u>+4</u>	+1
		<u>+1,75</u>

$$\left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ +4 \\ +1,75 \end{matrix}} \right\} \quad (10_b)$$

$$\underline{+1,50} = \frac{1}{p} \text{ für die Seite } s, \text{ mit zwei Diagonalen.}$$

Wenn nun μ der mittlere Fehler einer gemessenen Richtung ist, so ist der mittlere Fehler des Verhältnisses $s:b$, oder der sogenannte relative Fehler der trigonometrischen Übertragung von b nach s folgendes:

$$\mu(s) = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{1,50} \quad (11)$$

Nach diesem nehmen wir an, dass die Diagonale d' nicht gemessen sei, dann fällt die Seiten-Gleichung a) und die zweite Dreiecks-Gleichung c) fort, im übrigen bleibt die Rechnung wie vorher und giebt:

	1	2	3	4	6	7	8	9	10	12
a	-1	+1	-1	+1	-1	+1
b	.	-1	+1	-1	+1	-1	+1	.	.	.
f	.	-1	+1	.	.	.	+1	-1	.	.

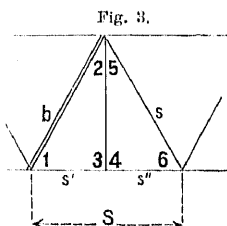
$$\begin{array}{r}
 +6 \quad -2 \quad -3 \\
 \quad +6 \quad +3 \\
 \quad \quad +4 \\
 +5,333 \quad +2,000 \\
 \quad \quad +2,500 \\
 +1,750 = \frac{1}{P} \text{ für } s, \text{ mit einer Diagonale } d.
 \end{array}$$

Nachdem wir diesen Fall in aller Ausführlichkeit vorgerechnet haben, mag es genügen, für die beiden anderen Fälle s' und s'' die Ergebnisse mitzuteilen, wie in folgender Zusammenstellung geschieht:

Berechnete Seite	mit einer Diagonale d	mit zwei Diagonalen d und d'	
s	$\frac{1}{P} = 1,75$	$\frac{1}{P} = 1,50$	$\sqrt{\frac{1,75}{1,50}} = 1,080$
s'	$\frac{1}{P'} = 4,00$	$\frac{1}{P'} = 3,75$	$\sqrt{\frac{4,00}{3,75}} = 1,033$
s''	$\frac{1}{P''} = 3,75$	$\frac{1}{P''} = 3,75$	

Wie man hieraus sieht, ist der Genauigkeits-Gewinn durch Hinzunehmen der zweiten Diagonale nicht bedeutend. Bei s'' ändert die zweite Diagonale d' überhaupt nichts, wie auch aus Fig. 2. S. 140 unmittelbar zu erschen ist.

In der letzten Spalte vorstehender Zusammenstellung sind die Fehler-Verhältnisse 1,080 und 1,033 für beide Fälle angegeben, es ist also der Genauigkeits-Gewinn durch die zweite Diagonale nur bzw. 8% und 3%.



III. Ein weiterer Fragefall ist in Fig. 3. dargestellt.

Wenn die Grundlinie b fest gegeben ist, so kann man die Seiten s und $s' + s'' = S$ entweder aus einem Dreieck mit den Winkeln (1), (2 + 5), (6) oder aus zwei Dreiecken (1) (2) (3) und (4) (5) (6) bestimmen; es fragt sich, was das günstigere ist.

Da wir die Behandlung solcher Aufgaben nun genügend erläutert haben, schreiben wir sofort die Ergebnisse mit der Abkürzung $\cot g(1) = c_1$ u. s. w. (mit den Fehler-Bezeichnungen nach der Anmerkung zu S. 120). Die Gewichte der Winkel seien alle = 1.

Für die Seite s hat man aus einem Dreieck nach (11) § 19. S. 121:

$$\mu(s)_1 = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3}} (c_1^2 + c_6^2 + c_1 c_6) \quad (12)$$

Dagegen aus beiden Dreiecken:

$$\mu(s)_2 = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3}} (c_1^2 + c_3^2 + c_1 c_3 + c_4^2 + c_6^2 + c_4 c_6) \quad (13)$$

Für die andere Seite S hat man aus *einem* Dreieck:

$$\mu(S) = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3} (c_{25}^2 + c_6^2 + c_{25} c_6)} \quad (14)$$

und aus *beiden* Dreiecken (wobei aber die Bedingung, dass $s' + s''$ eine Gerade sei, nicht mit enthalten ist):

$$\mu(s' + s'') = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3} \left(s'^2 c_2^2 + s''^2 (c_1^2 + c_5^2 + c_6^2 + c_5 c_6) + S^2 c_3^2 - s' s'' c_1 c_2 + s' S c_2 c_3 + s'' S c_1 c_3 \right)} \quad (15)$$

Macht man das grosse Dreieck gleichseitig und die Querlinie rechtwinklig, also $c_1 = c_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $c_2 = c_5 = \sqrt{3}$ und $c_3 = c_4 = 0$, so erhält man folgende Vergleichung:

aus <i>einem</i> Dreieck	aus <i>zwei</i> Dreiecken
$\mu(s)_1 = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3}}$	$\mu(s)_2 = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \right)}$
$\mu(s)_1 : \mu(s)_2 = 1 : 0,8165$	

(16)

aus <i>einem</i> Dreieck	aus <i>zwei</i> Dreiecken
$\mu(S) = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3}}$	$\mu(s' + s'') = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{5}{3} \right)}$
$\mu(S) : \mu(s' + s'') = 1 : 1,291$	

(17)

Es wird also zwar die Seite s günstiger aus zwei Dreiecken, dagegen S günstiger aus *einem* Dreieck bestimmt.

Hiernach kann man zu Fig. 3. sagen:

Die Einschaltung des Punktes bei 3. 4 in die Reihe der gleichseitigen Dreiecke wirkt ungünstig auf die Bestimmung der Längen-Erstreckung S der Kette, aber günstig auf die Basis-Übertragung von b nach s .

IV. In Fig. 4. zeigt die Fehler-Berechnung, dass aus der Basis $AB = b$ die Seite $BE = S$ günstiger aus *drei* gleichseitigen Dreiecken bestimmt wird, als aus *einem* Dreieck ABE , denn die Fehler-Berechnung giebt:

1) aus drei Dreiecken

$$S = b \frac{BC + CE}{\sin(1)} + b \frac{\sin(3) \sin(5) \sin(8)}{\sin(1) \sin(4) \sin(7)}$$

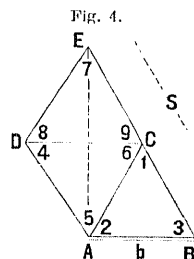
hierfür wird, wenn alle Winkel $= 60^\circ$ sind:

$$\mu(S) = 0,913 \frac{\mu}{\varrho} \quad (18)$$

2) $S = BE$ als Hypotenuse des *einen* rechtwinkligen Dreiecks BAE mit $B = 60^\circ$, $A = 90^\circ$ und $E = 30^\circ$ berechnet, giebt:

$$\mu(S) = 1,414 \frac{\mu}{\varrho} \quad (19)$$

Dieser Fehler ist also nahe das 1,5fache des zuerst berechneten Fehlers der Bestimmung aus drei Dreiecken.



V. Wir wollen hier noch eine andere kleine Genauigkeits-Untersuchung anschliessen, von welcher später in § 27. Gebrauch gemacht werden wird. Es soll der mittlere Fehler einer Richtung bestimmt werden, nur mit Rücksicht auf die Summen-Proben in dem Viereck, also *ohne* die Seiten-Gleichung. Man hat dann nach Fig. 2. S. 140 die schon unter (6), (8) und (9) enthaltenen Bedingungs-Gleichungen:

$$\begin{aligned} -v_1 + v_2 & \quad \quad \quad -v_8 + v_9 - v_{10} & \quad + v_{12} + w_1 = 0 \\ -v_1 & \quad + v_3 - v_4 + v_5 & \quad \quad \quad -v_{11} + v_{12} + w_2 = 0 \\ & -v_2 + v_3 - v_4 & \quad + v_6 - v_7 + v_8 & \quad \quad + w_3 = 0 \end{aligned}$$

Hiezu gehören die Normalgleichungen (deren Coëfficienten in (10) schon mit enthalten sind):

$$\begin{aligned} +6k_1 + 2k_2 - 2k_3 + w_1 &= 0 \\ +2k_1 + 6k_2 + 2k_3 + w_2 &= 0 \\ -2k_1 + 2k_2 + 6k_3 + w_3 &= 0 \end{aligned}$$

Die Auflösung giebt:

$$k_1 = \frac{-2w_1 + w_2 - w_3}{8}, \quad k_2 = \frac{w_1 - 2w_2 + w_3}{8}, \quad k_3 = \frac{-w_1 + w_2 - 2w_3}{8}$$

Nun ist $[v v] = -[w k]$ und die Ausrechnung hiernach giebt:

$$-8[w k] = 2w_1^2 + 2w_2^2 + 2w_3^2 - 2w_1w_2 + 2w_1w_3 - 2w_2w_3 \quad (20)$$

Das kann man aber noch übersichtlicher gestalten durch Einführung eines *vierten* Summen-Widerspruches w_4 , nämlich:

$$w_1 - w_2 + w_3 = w_4$$

Damit kann man (20) auf die Form bringen:

$$-8[w k] = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2$$

und den mittleren Gewichtseinheits-Fehler m' erhält man, da 3 unabhängige Bedingungs-Gleichungen benützt wurden:

$$m'^2 = \frac{[v v]}{3} = \frac{-[w k]}{3} = \frac{1}{3} \frac{[w^2]}{8} \quad (21)$$

wo nun unter $[w^2]$ die Summe *aller vier* in dem Vierecke möglicher Dreiecks-Summenproben bedeutet. Der Wert m' nach (21) ist ein mittlerer Richtungs-Fehler, der entsprechende mittlere Winkelfehler ist:

$$m = m' \sqrt{2} = \sqrt{\frac{[w^2]}{12}} \quad (22)$$

§ 23. Der Schreibersche Satz über günstigste Gewichts-Verteilung.

Verschiedene Einzel-Ergebnisse unserer bisherigen Genauigkeits-Untersuchungen von § 19., § 20. und § 22. sind besondere Fälle eines allgemeineren Satzes, welchen zuerst General *Schreiber* bei Gelegenheit des Göttinger Basismetzes ausgesprochen hat („Zeitschr. f. Verm.“ 1882, S. 141). Der Satz lautet im wesentlichen:

Wenn in einem Dreiecksnetz mit Bedingungs-Gleichungen *eine* Seite S mit möglichst grossem Gewicht P bei konstanter Summe $[p]$ der Winkelmessungs-Gewichte $p_1, p_2 \dots$ bestimmt werden soll, so ist unter den hierzu möglichen Verteilungen der Gewichte $p_1, p_2 \dots$ jedenfalls eine Verteilung, in welcher nur so viele Gewichte p wirklich vorkommen, als die Zahl der zur Bestimmung von S unumgänglich nötigen Winkel (oder Richtungen u. s. w.) beträgt, während die übrigen Gewichte p alle =

Null zu setzen sind. (Dasselbe gilt nicht bloss von einer Dreiecksseite S , sondern von irgend einer Funktion ausgeglichener Beobachtungen.)

Das Wesen dieses Satzes findet man auch in einem früheren von demselben Urheber stammenden Ausspruche: „Dass die Güte der Messungen nicht in einer systemlosen Häufung von Kontrollen, sondern in einer scharfen Messung solcher Elemente zu suchen ist, welche die Genauigkeit der Schlussergebnisse in erster Linie bedingen.“ (s. „Zeitschr. f. Verm.“ 1880, S. 397, und unseren früheren § 18., S. 118.)

Der fragliche Satz ist von einschneidender Bedeutung für die Anlage trigonometrischer und ähnlicher Messungen.

Wir geben im Folgenden eine teilweise von anderer Anschauung als die *Schreibersche* Original-Abhandlung ausgehende Darstellung und entsprechenden Beweis des Satzes.

Zur *Vorbereitung* wollen wir zuerst den einfachen Fall des arithmetischen Mittels mit ungleichen Gewichten behandeln.

Man habe n unabhängige Messungen $l_1, l_2 \dots l_n$ mit den Gewichten $p_1, p_2 \dots p_n$. Die Messungen $l_1, l_2 \dots l_n$ stehen mit einer Unbekannten x in folgenden Beziehungen:

$$x - a_1 l_1 = 0 \quad x - a_2 l_2 = 0 \quad \dots \quad x - a_n l_n = 0,$$

dann hat man zur Bestimmung von x folgende Gleichung:

$$x = \frac{[p a l]}{[p a a]} \quad (1)$$

und das Gewicht von x ist:

$$P = [p a a] = p_1 a_1^2 + p_2 a_2^2 + \dots + p_n a_n^2.$$

Fragt man nach dem Maximum von P in Hinsicht auf die Gewichte p und auf die Gewichts-Verteilung bei konstanter Summe $[p]$, so sieht man ohne weiteres ein, dass P am grössten wird, wenn man von allen Coefficienten $a_1, a_2 \dots a_n$ den *grössten* auswählt, ihm das Gewicht $[p]$ zuteilt und alle anderen $p = \text{Null}$ setzt. Ist z. B. der erste Wert a_1 der grösste, so wird hiernach:

$$P = [p] a_1^2 \quad (2)$$

Man wird also *nur* diejenige Messung l machen, welche in günstigster Weise zur Bestimmung von x führt, und alle anderen l gar nicht messen.

Dieses gilt natürlich nicht für den Fall, dass man zur Vermeidung einseitiger Fehler doch die anderen l auch misst. Von solchen praktischen Neberrücksichten soll hier und bei der folgenden Aufgabe überall nicht die Rede sein.

Zu der Ausgleichung mit Bedingungs-Gleichungen übergehend, stellen wir die bekannten Formeln hierfür zunächst zusammen, im Anschluss an unsere früheren Formeln, Band I, § 43,

Beobachtungen: $l_1 \quad l_2 \quad l_3 \dots l_n$

mit Gewichten: $p_1 \quad p_2 \quad p_3 \dots p_n$

Verbesserungen: $v_1 \quad v_2 \quad v_3 \dots v_n$

Bedingungs-gleichungen:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots + a_n v_n + w_1 = 0$$

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \dots + b_n v_n + w_2 = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$g_1 v_1 + g_2 v_2 + g_3 v_3 + \dots + g_n v_n + w_q = 0$$

Zu weiterer Klarlegung der Verhältnisse wollen wir ein einfaches *Beispiel* nehmen:

In nebenstehender Figur 1. handelt es sich um die Bestimmung der Höhe h eines Dreiecks, in welchem die Basis b und alle drei Winkel (1) (2) (3) gemessen sind. Es besteht eine Bedingungen-Gleichung:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + w &= 0 \\ \text{also: } a_1 &= 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Die Funktion F ist:

$$F = h = \frac{b}{\sin(1)} \sin(2) \sin(3) \quad (10)$$

Dieses giebt, wenn alles Konstante bei Seite gelassen wird:

$$f_1 = -\cotg(1) \quad f_2 = +\cotg(2) \quad f_3 = +\cotg(3),$$

wofür wir in Abkürzung schreiben wollen:

$$f_1 = -c_1 \quad f_2 = +c_2 \quad f_3 = +c_3.$$

Die allgemeinen Gleichungen (4) und (5) geben hiernit:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} 1 \\ p \end{array} \right] r + \left(-\frac{c_1}{p_1} + \frac{c_2}{p_2} + \frac{c_3}{p_3} \right) &= 0 \\ r &= \frac{\frac{c_1}{p_1} - \frac{c_2}{p_2} - \frac{c_3}{p_3}}{\left[\begin{array}{c} 1 \\ p \end{array} \right]} \end{aligned} \quad (11)$$

$$F'_1 = -c_1 + r \quad F'_2 = c_2 + r \quad F'_3 = c_3 + r \quad (12)$$

Man kann auch die Formel (6) vollständig bilden, sie giebt in diesem Falle:

$$F^2 = \frac{c_1^2}{p_1} + \frac{c_2^2}{p_2} + \frac{c_3^2}{p_3} - \frac{1}{\left[\begin{array}{c} 1 \\ p \end{array} \right]} \left(\frac{c_1}{p_1} - \frac{c_2}{p_2} - \frac{c_3}{p_3} \right)^2 \quad (13)$$

Das kann man auch auf folgende Form bringen:

$$\frac{1}{F^2} = \frac{p_1(c_3 - c_2)^2 + p_2(c_1 + c_3)^2 + p_3(c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \quad (14)$$

(Dieses sind dieselben Formeln, wie früher (19) und (20) § 19. S. 123.)

Das Maximum der Funktion (14) mit der Nebenbedingung $[p] = \text{konstant}$, kann durch fortgesetztes Probieren gefunden werden.

Wir nehmen hiezu folgende Zahlenwerte an:

$$\left. \begin{aligned} (1) &= 34^\circ & \cotg 34^\circ &= c_1 = 1,483 \\ (2) &= 68^\circ & \cotg 68^\circ &= c_2 = 0,404 \\ (3) &= 78^\circ & \cotg 78^\circ &= c_3 = 0,213 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

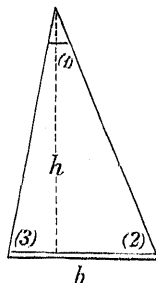
In Betreff der Gewichte wollen wir zuerst annehmen $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, $[p] = 3$, und damit geben die vorstehenden Formeln folgendes:

$$r = 0,289 \quad F'_1 = -1,194 \quad F'_2 = +0,693 \quad F'_3 = +0,502$$

$$\frac{1}{F} = 2,1578. \quad \text{Absolute Summe } [\pm F] = 2,389.$$

Nach diesem haben wir eine *neue* Gewichts-Annahme gemacht, nämlich die

Fig. 1.



$p_1 p_2 p_3$ proportional $F_1 F_2 F_3$ und wieder auf die frühere Summe $[p] = 3$ gestimmt, d. h. neue Annahme:

$$p_1 = 1,50, \quad p_2 = 0,87, \quad p_3 = 0,63, \quad [p] = 3,00.$$

In dieser Weise haben wir die Rechnung 6mal wiederholt, wie aus der nachfolgenden Tabelle mit den Nummern 1. 2. 3. . . 7. zu ersehen ist; die in der Tabelle vorhergehenden Nummern 0. und 0,5. sind nachher mit neuen willkürlichen Gewichts-Annahmen noch hinzuberechnet worden.

Verschiedene Gewichts-Verteilungen für die Funktion

$$h = \frac{b}{\sin(1)} \sin(2) \sin(3) \quad (16)$$

Num	p_1	p_2	p_3	$[p]$	r	F_1	F_2	F_3	$\left[\frac{F_1 F_2 F_3}{p} \right]$
0.	0,0	1,5	1,5	3,0	1,483	0,000	1,887	1,696	5,292
0,5.	0,5	1,0	1,5	3,0	0,660	-0,823	1,064	0,873	2,995
1.	1,00	1,00	1,00	3,00	0,289	-1,194	+0,693	+0,502	2,158
2.	1,50	0,87	0,63	3,00	0,059	-1,424	+0,463	+0,272	1,715
3.	1,979	0,643	0,378	3,000	-0,0940	-1,577	+0,310	+0,119	1,413
4.	2,358	0,464	0,178	3,000	-0,1756	-1,659	+0,228	+0,037	1,287
5.	2,586	0,356	0,058	3,000	-0,2072	-1,690	+0,197	+0,006	1,214
6.	2,679	0,312	0,009	3,000	-0,2128	-1,696	+0,191	+0,000	1,191
7.	2,696	0,304	0,000	3,000	-0,2130	-1,696	+0,191	+0,000	1,187

Die Reihe 1. bis 7. zeigt ganz schöne Konvergenz, und führt schliesslich zu der günstigsten Gewichts-Verteilung:

$$p_1 = 2,696 \quad p_2 = 0,304 \quad p_3 = 0,000 \quad (17)$$

d. h. man soll in diesem Falle den dritten Winkel (3) gar nicht messen. Nachdem man dieses in unserem Falle erkannt hat, kann man p_1 und p_2 unmittelbar bestimmen, denn mit $p_3 = 0$ giebt die Formel (14):

$$\frac{1}{P} = \frac{p_1 (c_2 - c_3)^2 + p_2 (c_1 + c_3)^2}{p_1 p_2} = \frac{(c_2 - c_3)^2}{p_2} + \frac{(c_1 + c_3)^2}{p_1}$$

und das giebt nach der oben bei (7) begonnenen und nachher bei (21) bis (24) weiter zu verfolgenden Theorie:

$$p_1 = c_1 + c_3 \quad p_2 = c_2 - c_3 \quad p_3 = 0 \quad (18)$$

oder entsprechende Proportionalität. In unserem Falle ist $c_1 = 1,483$, $c_2 = 0,404$, $c_3 = 0,213$. $c_1 + c_3 = 1,696$, $c_2 - c_3 = 0,191$, und da die Summe $[p] = 3$ sein soll, hat man nun:

$$\begin{array}{ll} c_1 + c_3 = 1,696 & p_1 = 2,6964 \\ c_2 - c_3 = 0,191 & p_2 = 0,3036 \\ & 0,000 \quad p_3 = 0,0000 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Summe} & 1,887 \quad 3,0000 \end{array} \quad (19)$$

Dieses stimmt hiernach gut mit den Ergebnissen (17), welche durch fortgesetztes Probieren gefunden wurden.

Die Formeln (18) kann man allgemein für solche hochgestellte Basisdreiecke benutzen. Setzt man auch noch die Winkel (2) und (3) einander gleich, so kommt man auf den Fall, den wir schon in (27) S. 125 behandelt haben.

Im Übrigen geben die Funktionen F_1, F_2, F_3 unserer Rechenversuchsreihe (16) zu erkennen, dass sie zwar durchaus im allgemeinen nicht unabhängig von den p sind, dass sie aber *in der Nähe der günstigsten Gewichts-Verteilung* allerdings sich sehr wenig ändern, die Kurven der F , welche man als Ordinaten zu den Abscissen p aufträgt, berühren die Abscissen-Richtung. Man kann daher schreiben:

$$\left. \frac{dF_1}{dp_1} \right]_m = 0 \quad \left. \frac{dF_2}{dp_2} \right]_m = 0 \quad \left. \frac{dF_3}{dp_3} \right]_m = 0 \text{ u. s. w.} \quad (20)$$

wo das Zeichen $\left]_m\right.$ andeuten soll, dass es sich um Fälle mit günstigster Gesamtgewichts-Verteilung handelt.

Nach Erledigung des Zahlen-Beispiels betrachten wir wieder den allgemeinen Fall der Funktion (6), welche ein Maximum werden soll. Indem wir zur Abkürzung nur 3 Glieder schreiben, haben wir nach (6):

$$y = \frac{1}{P} = \frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} + \frac{F_3^2}{p_3} + \dots \quad (21)$$

Da hierbei die F Funktionen der p sind, bilden wir das totale Differential:

$$\begin{aligned} dy = & \left(\frac{2F_1}{p_1} \frac{dF_1}{dp_1} + \frac{2F_2}{p_2} \frac{dF_2}{dp_1} + \frac{2F_3}{p_3} \frac{dF_3}{dp_1} \right) dp_1 - \frac{F_1^2}{p_1^2} dp_1 \\ & + \left(\frac{2F_1}{p_1} \frac{dF_1}{dp_2} + \frac{2F_2}{p_2} \frac{dF_2}{dp_2} + \frac{2F_3}{p_3} \frac{dF_3}{dp_2} \right) dp_2 - \frac{F_2^2}{p_2^2} dp_2 \\ & + \left(\frac{2F_1}{p_1} \frac{dF_1}{dp_3} + \frac{2F_2}{p_2} \frac{dF_2}{dp_3} + \frac{2F_3}{p_3} \frac{dF_3}{dp_3} \right) dp_3 - \frac{F_3^2}{p_3^2} dp_3 \end{aligned}$$

Dieses totale Differential soll allgemein = Null werden mit der Nebenbedingung $p_1 + p_2 + p_3 = [p]$ konstant, woraus auch folgt:

$$dp_1 + dp_2 + dp_3 = 0 \quad (22)$$

Nimmt man zunächst an, es bestehe Proportionalität zwischen den F und den p , etwa:

$$\frac{F_1}{p_1} = \frac{F_2}{p_2} = \frac{F_3}{p_3} = k \quad (23)$$

so geht obiges Differential dy über in:

$$\begin{aligned} dy = & 2k \left(\frac{dF_1}{dp_1} + \frac{dF_2}{dp_1} + \frac{dF_3}{dp_1} \right) \\ & + 2k \left(\frac{dF_1}{dp_2} + \frac{dF_2}{dp_2} + \frac{dF_3}{dp_2} \right) \\ & + 2k \left(\frac{dF_1}{dp_3} + \frac{dF_2}{dp_3} + \frac{dF_3}{dp_3} \right) \\ & - k^2 (dp_1 + dp_2 + dp_3) \end{aligned} \quad (24)$$

Hier verschwindet das letzte Glied wegen der Nebenbedingung (22); und wenn auch die übrigen Teile von dy allgemein verschwinden sollen, so ist, bei der Unbestimmtheit der Funktionen F nötig, dass *alle* in dy vorkommenden Differential-

Quotienten $\frac{dF_1}{dp_1}, \frac{dF_1}{dp_2}$ u. s. w. = Null werden, wie wir schon oben bei (20) angedeutet haben.

Nachdem die Richtigkeit der Proportionalität (22) eingesehen ist, hat man im Falle der günstigsten Verteilung, nach (21):

$$y = k^2 (p_1 + p_2 + p_3 + \dots) = k^2 [p] \quad (25)$$

dabei ist k^2 ein Faktor, der sich aus der Gewichts-Verteilung und aus dem Netz-Zusammenhang ergibt, und wenn die Aufgabe *mehrere* reelle Minima von y bietet (was nicht zum Voraus beurteilt werden kann), so sind die zugehörigen Coefficienten k^2 verschiedene, und das Minimum Minorum wird auszuwählen sein nach der Bedingung, dass k^2 am kleinsten sei. Aus (21) und (22) kann man auch bilden:

$$y = k (F_1 + F_2 + F_3 + \dots) = k [F] \quad (26)$$

dabei ist aber $[F]$ als Summe der *absoluten* Werte F aufzufassen.

Diese F_1, F_2, \dots sind Funktionen *aller* Gewichte p , und sie sind unabhängig von der Form, in welcher die Funktion F selbst nach (3) aufgestellt wird. Diese Funktion (3) kann wegen der Existenz der Bedingungs-Gleichungen in sehr mannigfaltiger Weise gebildet werden, und dabei können die einzelnen f verschwinden oder wieder auftreten; dagegen die F_1, F_2, \dots nach (5), sind von der jeweiligen Auswahl der f unabhängig, obgleich jedes F_1, F_2, \dots als Anfangsglied je ein f_1, f_2, \dots hat. Deswegen sind auch die Gleichungen (5), welche nur einzelne Formen der F_1, F_2, \dots darstellen, zum Erkennen der allgemeinen Eigenschaften dieser F_1, F_2, \dots wenig geeignet. Eine wichtige allgemeine Eigenschaft, welche sich aus der sachlichen Bedeutung der F_1, F_2, \dots ergibt, ist nun die, dass irgend ein F_i verschwindet, wenn das zugehörige $p_i = \text{Null}$ wird (und dass es sehr gross wird, wenn das zugehörige p_i einen grossen, die anderen p überwiegenden, Wert annimmt).

Wenn (21) dem Minimum entspricht, so kann hierin wohl der Fall inbegriffen sein, dass ein einzelnes $p_i = \text{Null}$ ist, es ist dann auch das zugehörige $F_i = \text{Null}$, ohne dass die Proportionalität $F_i = k p_i$ gestört würde, und so kann es mit mehreren p der Fall sein.

Nun wollen wir wieder zu der Annahme zurückkehren, das Minimum und die Proportionalität der p und F sei noch nicht erreicht, und zwei Elemente mögen geben:

$$\frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} \quad (27)$$

Setzt man $p_2 = 0$, und lässt zur Erhaltung der Gesamtsumme p_1 in $p_1 + p_2$ übergehen, so möge entstehen:

$$\frac{F_1'^2}{p_1 + p_2} + \frac{F_2'^2}{0} = \frac{F_1'^2}{p_1 + p_2} \quad (28)$$

Die letzte Gleichung ist richtig, weil, wie wir oben gesehen haben, jede Annahme $p_i = 0$ auch $F_i = 0$ zur Folge hat. Wenn nun der Fall (26) nicht sehr weit von der Proportionalität entfernt ist, und p_2 erheblich *kleiner* ist als p_1 , so wird F_1' nicht wesentlich grösser als F_1 sein, dagegen ist der Nenner p_1 auf $p_1 + p_2$ gewachsen, und das zweite Glied von (27) fortgefallen, folglich wird der Übergang von (26) auf (28) eine *Abnahme* des Ganzen bedeuten, und es erweist sich vorteilhaft, *kleine* Gewichte ganz verschwinden zu lassen, und sie anderen vorher schon *grösseren* Gewichten zuzulegen.

Allgemeiner kann man sagen: In der Nähe der günstigsten Gewichts-Verteilung sind die Änderungen ΔF nur Grössen zweiter Ordnung im Vergleich mit den Änderungen Δp der Gewichte p selbst, und deswegen hängt die Funktion y in erster Linie von den Nennern p der einzelnen Glieder ab, und man kann nach diesen Nennern leicht die Gesamtwirkung der Änderungen Δp beurteilen.

Wenn man also mit irgend einer Gewichts-Verteilung, etwa nach verschiedenen Versuchen, dahin gelangt ist, dass die F und p bereits nahezu proportional sind, so kann man annehmen, dass man dem Minimum der Funktion (21) oder dem Maximum von F bei konstanter Summe $[p]$ nicht mehr ferne ist. Dann sind aber die Differential-Quotienten der F nach dem p bereits der Null nahe, und deswegen wird ein einzelnes kleines p zweckmässig = Null gesetzt, weil dadurch das betreffende Glied $\frac{F^2}{p}$ verschwindet, ohne dass, wegen der erwähnten kleinen Differential-Quotienten, die übrigen F erheblich wachsen, wozu noch der kleine Vorteil kommt, dass durch das Nullsetzen eines p bei konstanter Summe $[p]$ in den übrigen Gliedern $\frac{F^2}{p}$ die Nenner etwas wachsen.

So kann man fortfahren, die grossen p auf Kosten der kleinen p zu verstärken, bis nur noch so viele Glieder vorhanden sind, als zur einfachen Bestimmung der Funktion F überall nötig sind.

Was die wirkliche Ausrechnung einer Gewichts-Verteilung betrifft, so wird man wohl immer am besten nach Anleitung unseres kleinen Beispiels (9) (17) so verfahren, dass man versuchsweise eine Gewichts-Verteilung annimmt, die F ausrechnet und mit neuen Gewichten proportional den erstmals erhaltenen F die Rechnung wiederholt; konvergieren einzelne Glieder deutlich gegen Null, so wird man alsbald die betreffenden p völlig = Null setzen u. s. w.

Wenn eine solche Aufgabe an und für sich sachlich betrachtet eine wesentlich ungleiche günstige Gewichts-Verteilung vermuten lässt, so wird auch die successive Näherungs-Rechnung mit den F und p rasch konvergieren, auch werden dann wohl schon vor Beginn aller Rechnung Fingerzeige vorhanden sein, in welchem Sinne etwa Gewichts-Verstärkungen oder Gewichts-Verringerungen bis zur Null, am Platze sein mögen.

Wenn dagegen die Versuchs-Rechnungen *nicht* konvergieren, so wird man es mit einem Falle zu thun haben, in welchem ungleiche Gewichts-Verteilung überhaupt nicht am Platze ist.

Anmerkung. Die Eingangs von uns zitierte Abhandlung von General *Schreiber* („Zeitschr. f. Verm.“ 1882, S. 129—161) geht von der Anschauung aus, dass die F Funktionen der r sind und dass dem Maximum des Gewichtes P ein Minimum der absoluten Summe $[\pm F]$ entspricht. Wenn hiernach die einzelnen F bestimmt sind, werden die p proportional dieser F genommen.

In einer Bemerkung von Herrn General *Schreiber*, „Zeitschr. f. Verm.“ 1880, S. 57—59, wird gesagt, dass die F Funktionen der r sind, es wird dann aber hinzugesetzt, dass die F *nicht* Funktionen der p , also von den p *unabhängig* seien.

Wir haben hierauf zu bemerken, dass die Abhängigkeit der F von den p allerdings bei der Betrachtung der absoluten Summe $[\pm F]$ gleichgültig ist, dass aber die *Proportionalität* der F und der p ohne Beziehungen zwischen F und p nicht bewiesen werden kann, wie oben bei (8) S. 146 gezeigt ist.

§ 24. Seiten-Refraktion.

Bei den Unregelmässigkeiten der Wärme-Verteilung in der Atmosphäre, entsprechend der ungleichen Wärme-Ausstrahlung der Erdoberfläche (Wasser und Land, Wälder und Sand u. s. w.) ist es an sich wahrscheinlich, dass die Lichtstrahlen in der Atmosphäre nicht nur nach der Höhe abgelenkt werden, sondern auch *seitlich* kleine Refraktionen erleiden.

Wenn z. B. ein Heliotropenlicht im Fernrohr nicht als ein Punkt, sondern als ein Lichtfleck von 60'' Durchmesser erscheint, so haben jedenfalls die seitlichen Lichttheile seitliche Brechungen von $\pm 30''$ erfahren, und ob das Intensitäts-Zentrum des Lichtflecks, auf welches die Fadenmitte eingestellt wird, allein sich in einer vertikalen Ebene fortgepflanzt hat, kann man nicht sicher wissen.

Wichtiger als solche Überlegungen sind *Beobachtungen*, zu denen wir nun übergehen.

I. *Struve* hat schon im Jahre 1829 im 7. Bande der „astron. Nachr.“ S. 391 bis 395, Seiten-Refraktionen vermutet aus dem Umstand, dass der Widerspruch w der Winkelsummen $\alpha + \beta + \gamma$ gegen $180^\circ + \text{sphär. Excess}$, bei Dreiecken mit kurzen Seiten im allgemeinen günstiger ausfiel, als bei langen Seiten. *Struve* ordnete die 31 Dreiecke seiner Gradmessung in den Ostsee-Provinzen Russlands nach der Grösse des Umfangs $S = a + b + c$, wo a , b und c die drei Seiten sind, und fand folgende Werte $w = \alpha + \beta + \gamma - (180^\circ + \epsilon)$:

Struves Beobachtungen von 1829.

Nr.	S	w	Nr.	S	w	Nr.	S	w
1.	20 ^{km}	+ 0,50''	11.	63 ^{km}	+ 1,09''	21.	98 ^{km}	- 0,16''
2.	22	- 1,36	12.	66	- 0,55	22.	98	- 1,15
3.	33	- 0,50	13.	80	- 0,55	23.	100	+ 1,82
4.	43	+ 0,46	14.	80	+ 0,18	24.	100	- 0,13
5.	43	+ 0,45	15.	84	- 0,19	25.	102	+ 0,03
6.	49	+ 0,22	16.	88	- 0,26	26.	111	- 0,28
7.	51	- 0,33	17.	89	+ 2,18	27.	113	- 1,43
8.	57	- 0,46	18.	94	- 0,51	28.	115	+ 1,40
9.	58	- 0,15	19.	95	- 1,03	29.	122	- 0,14
10.	59	- 0,61	20.	97	- 1,15	30.	129	+ 1,03
						31.	129	+ 2,81

(1)

Diese Zahlen w zeigen allerdings eine gewisse Zunahme bei wachsendem Umfang S . Um diese Zunahme durch Seiten-Refraktion zu erklären, machte *Struve* zuerst die Annahme, dass diese Refraktion *proportional der Quadratwurzel der Sichtweite s* wirke. Wenn die seitliche Ablenkung stetig wie die Höhenablenkung wirkte, so müsste man wie bei letzterer einen Ablenkungs-Winkel proportional s selbst annehmen; da aber eine solche stetige Ablenkung längs der ganzen Sichtweite s jedenfalls nicht besteht, sondern vielmehr zahlreiche kleinere sich theils häufende, theils auch wieder auflöbende Ablenkungen wahrscheinlich sind, so ist diese *Struvesche* Annahme, proportional mit \sqrt{s} , an sich ganz am Platz. Aber ein Rechnungs-Versuch mit dieser Annahme gab einen inneren Widerspruch, weshalb ein Versuch in anderer Form gemacht wurde, so dass der mittlere Fehler m eines Winkels mit den Schenkel-Längen a und b so dargestellt wird:

$$m^2 = c^2 + k^2 (a^2 + b^2) \quad (2)$$

also:

$$w^2 = 3 c^2 + 2 k^2 (a^2 + b^2 + c^2) \quad (3)$$

Aus den in dieser Form geführten *Struveschen* Berechnungen haben wir die Formel gebildet:

$$m = \sqrt{0,152^2 + (0,0128 S)^2} = \sqrt{\mu^2 + \sigma^2} \quad (4)$$

Dabei ist m der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung, $\mu = 0,152''$ der mittlere reine Theodolit-Messungsfehler und $\sigma = 0,0128 S$ der Einfluss der Seiten-Refraktion.

Zur Übersicht ist hiernach berechnet:

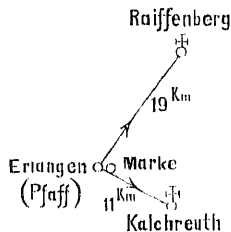
S	μ	σ	m
0^{km}	$\pm 0,15''$	$\pm 0,00''$	$\pm 0,15''$
20	0,15	0,26	0,30
40	0,15	0,51	0,53
60	0,15	0,77	0,78
80	0,15	1,02	1,03
100	0,15	1,28	1,29

Dr. Pfaff's Jahresreihe der Seiten-Refraktion.

Dr. *Pfaff*, Professor der Mineralogie in Erlangen, hat eine ganze durchlaufende Jahresreihe von Beobachtungen horizontaler Winkel in Hinsicht auf seitliche Strahlen-Brechung angestellt. Mittheilungen hierüber sind gemacht von *v. Bauernfeind* in den Sitzungs-Berichten der „math. phys. Kl. d. k. bayer. Akademie d. Wiss. zu München“, 1872, S. 147—162 und im Auszug in der Publ. d. königl. preuss. geod. Instituts: „der Einfluss der Lateral-Refraktion u. s. w.“ von *Fischer*, Berlin 1882.

Die Lage des Beobachtungs-Punktes und der drei Zielpunkte ist in Fig. 1. angegeben. Raiffenberg und Kalchreuth sind die Haupt-Zielpunkte in 19^{km} und 11^{km} Entfernung, und dazu ist noch eine nahe gelegene Marke in nur 283^m Entfernung genommen.

Fig. 1.



Für diese drei Zielpunkte sind in der Zeit von November 1870 bis Oktober 1871 je 93 Messungen mit einem $20''$ -Repetitions-Theodolit von *Ertel* gemacht; allerdings sehr ungleich verteilt, mit Lücken im Januar bis April, welche aber doch eine jährliche Periode wahrnehmen lassen. (Die Messungen wurden später nicht fortgesetzt, *Pfaff* starb etwa 1885.)

Pfaff's Beobachtungen 1870—1871.

Zeit	Raiffenberg $18\ 949^m$	Marke 283^m	Kalchreuth $111\ 23^m$
November 1870	$38^\circ\ 8'\ 33''$	$120^\circ\ 0'\ 0''$	$128^\circ\ 55'\ 26''$
Dezember "	36	0	25
Januar 1871	37	0	24
Februar "	(Max.) 38	0	24
März "	36	0	23
April "	34	0	(Min.) 23
Mai "	30	0	23
Juni "	28	0	25
Juli "	(Min.) 27	0	26
August "	29	0	27
September "	32	0	(Max.) 27
Oktober "	36	0	27
Mittel	$38^\circ\ 8'\ 33''$	$120^\circ\ 0'\ 0''$	$128^\circ\ 55'\ 25''$

Wir haben die *Pfaff*schen Messungen von 1870—1871 graphisch ausgeglichen (unabhängig von den Mittelbildungen der Original-Mitteilung) und daraus vorstehende Zusammenstellung (S. 153) gebildet, in welcher angenommen ist, dass die nahe, nur 283^m entfernte Marke *unverrückt* geblieben sei, und das Azimut 120° habe.

Der Umstand, dass die beiden *fernen* Punkte *verschiedene* Jahres-Kurven geben, scheint darauf hinzudeuten, dass die Änderungen wirklich in der Atmosphäre begründet und nicht etwa durch Änderungen des Beobachtungs-Punktes und der nahe gelegenen Marke zu erklären sind. —

Geheimerat v. Bauernfeinds Beobachtungen über Seiten-Refraktion.

Aus dem Werke „Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion von *Carl Max v. Bauernfeind*, erste Mitteilung, München 1880“, S. 48--65, entnehmen wir mit Bezugnahme auf Fig. 2. und 3. folgendes:

Fig. 2.
Gesichtsfeld des Fernrohrs
in Döbra.

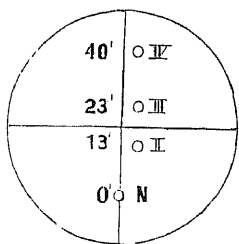
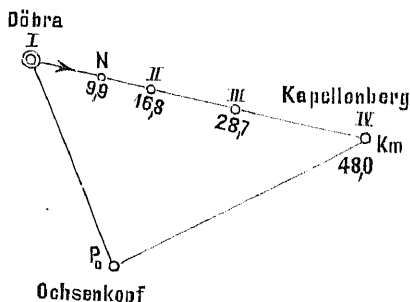


Fig. 3.
Lageplan (1:1 000 000.)



Auf dem Punkte Döbra befand sich ein *Irtelscher* Höhenkreis mit Fernrohr, fest aufgestellt, mit welchem 4 Zielpunkte *N, II, III, IV* (Fig. 3.) in nahezu gerader Linie beobachtet wurden. Diese 4 Zielpunkte erschienen gemeinsam im Gesichtsfeld des Fernrohrs, so dass die Horizontal-Winkel, stets auf den Nullpunkt *N* bezogen, durch ein Okular-Mikrometer sehr genau gemessen werden konnten. Das Gesichtsfeld des Fernrohrs mit den 4 Zielpunkten ist in Fig. 2. angedeutet, *ohne* Umkehrung, so dass der Punkt *N*, welcher der tiefste ist, unten erscheint.

Die Entfernungen und Höhen der Punkte waren:

Punkt	Entfernung	Höhen
Döbra	<i>I</i> 0 ^m	795 ^m über <i>N. N.</i> 0 ^m
	<i>N</i> 9 921 ^m
	<i>II</i> 16 766 ^m	619 — 176 ^m
	<i>III</i> 28 701 ^m	604 — 191 ^m
Kapellenberg	<i>IV</i> 47 958 ^m	765 — 30 ^m

In dieser Weise wurden die Horizontalwinkel in durchlaufenden Tagesreihen, Tags mit Heliotropen, Nachts mit Lampenlicht, gemessen, im ganzen an 12 Tagen zwischen Juni und September 1877, sowie zwischen August und September 1878.

Das Ergebnis war für Seiten-Refraktion ein negatives, indem (nach Elimination einer Mikrometer-Verdrehung) keine ausserhalb der Messungs-Genauigkeit liegenden seitlichen Abweichungen sich fanden.

Doch ist dadurch nicht ausgeschlossen, dass zu anderen Zeiten als an jenen 12 Tagen sich Abweichungen zeigen würden, wie z. B. die vorerwähnten *Pfaff'schen* Beobachtungen eine *Jahresperiode* zeigten. Auch geht die einzige *lange* Sicht Döbra-Kapellenberg durchaus 100^m—200^m über dem Erdboden hin, weshalb wir von diesem Falle nicht weiter schliessen dürfen auf andere ungünstigere Fälle, z. B. in der nord-deutschen Ebene, wo die Sichten im günstigsten Falle 20^m über dem Boden sind

Fischer's Vergleichung der preussischen Triangulierungen.

Professor *Fischer* im geodätischen Institut hat im Jahre 1882 veröffentlicht: „Publikation des königl. preuss. geodätischen Instituts. Der Einfluss der Lateral-Refraktion auf das Messen von Horizontalwinkeln. Berlin 1882“ (Bericht hierüber s. „Zeitschr. f. Verm. 1884“, S. 79—81). Es wurden von den preussischen Triangulierungs-Ausgleichungen, Gradmessung in Ostpreussen, Küsten-Vermessung u. s. w. bis zum rheinischen und hessischen Dreiecksnetz die sämtlichen Netz-Verbesserungen in der Form von *Richtungs-Verbesserungen* (mit Hilfe der *Besselschen* Nullpunkts-Korrekturen, vgl. Band I, § 81.) dargestellt, und, in der Zahl 1434, nach der Grösse der Sichtweiten *S* geordnet, wie folgende Zusammenstellung zeigt, in welcher *m* den Mittelwert der fraglichen Richtungs-Verbesserungen in der Gruppe mit der durchschnittlichen Sichtweite *S*, und *p* die jeweilige Zahl in einer Gruppe bedeutet.

Fischer's Vergleichungen.

<i>S</i>	<i>p</i>	<i>m</i>	<i>S</i>	<i>p</i>	<i>m</i>
5 ^{km}	102	0,243''	65 ^{km}	86	0,308''
15	198	0,238	75	54	0,322
25	328	0,234	85	18	0,361
35	330	0,254	95	12	0,522
45	196	0,278	105	6	0,347
55	100	0,281	115	4	0,238

1254

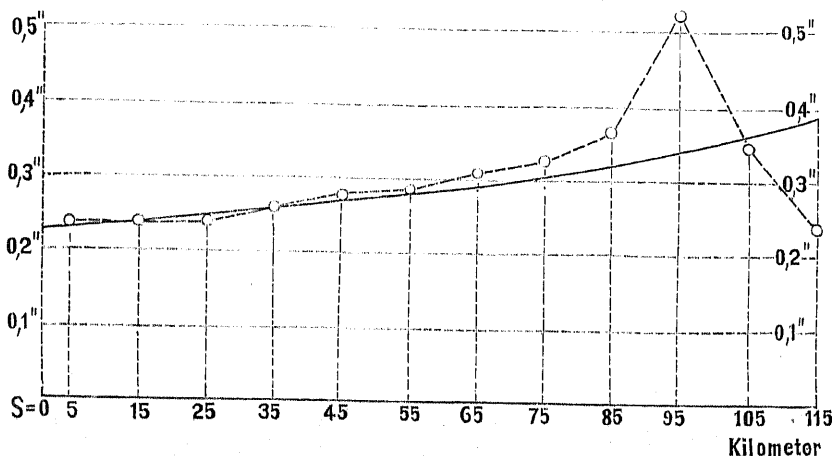
180

[*p*]=1434

Eine zusammenfassende Vergleichs-Berechnung ist von dem Urheber dieser wertvollen Sammlung nicht gegeben.

Wir haben zunächst diese Zahlen *m* und *S* in Fig. 4. graphisch dargestellt;

Fig. 4.
Richtungsfehler als Funktion der Entfernung.



man sieht daraus, da die Kurve jedenfalls nach oben konkav verläuft, dass eine Annahme, wie sie auch *Struve* zuerst versuchte, das Anwachsen von m in Beziehung zu \sqrt{s} zu setzen, nicht durchzuführen ist.

Wir haben daher drei andere Ausgleichungs-Versuche gemacht, wobei immer die Gruppenzahlen p als Gewichte im gewöhnlichen Sinne genommen wurden:

$$1) m = 0,208'' + 0,0016 S$$

$$2) m = 0,232'' + (0,0415 S)^2$$

$$3) m = \sqrt{0,237^2 + (0,00263 S)^2} = \sqrt{\mu^2 + \sigma^2}$$

In Bezug auf die Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler sind alle diese 3 Formen nahezu gleich; im übrigen hat die dritte Form am meisten für sich; dieselbe giebt folgendes:

S	p	μ	σ	m	m' <small>beobachtet</small>	$m - m' = v$
5^{km}	102	0,237''	0,013''	0,237''	0,243''	— 0,006''
15	198	0,237	0,039	0,240	0,238	+ 0,002
25	328	0,237	0,066	0,246	0,234	+ 0,012
35	330	0,237	0,092	0,254	0,254	0,000
45	196	0,237	0,118	0,265	0,278	— 0,013
55	100	0,237	0,145	0,278	0,281	— 0,003
65	86	0,237	0,171	0,292	0,308	— 0,016
75	54	0,237	0,197	0,308	0,322	— 0,014
85	18	0,237	0,224	0,326	0,361	— 0,035
95	12	0,237	0,250	0,344	0,522	— 0,178
105	6	0,237	0,276	0,364	0,347	+ 0,017
115	4	0,237	0,302	0,384	0,238	+ 0,146
1434						

Zu Fig. 4. ist über die drei letzten Werte für 95, 105 und 115^{km} , welche zusammen nur 22mal (oder 1,5 %) vorkommen, zu bemerken, dass dieses wohl nur *Zufalls*-Werte sind, welche das bis 85^{km} schön verlaufende Gesetz nicht stören.

Im übrigen kann man nun sagen, dass nach den 50jährigen Gesamt-Erfahrungen der preussischen Triangulierungen, weite Sichten im allgemeinen ungenauer sind als kurze. Ob der Grund hievon in eigentlicher sogen. Seiten-Refraktion liegt, oder nur darin, dass weite Sichten selten und nur undeutlich zu beobachten sind, ist für die darauf zu gründenden praktischen Folgerungen zunächst gleichgültig.

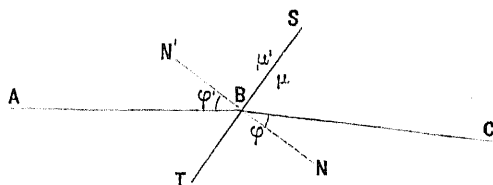
Wenn man noch überlegt, ob die grössere Netz-Unsicherheit bei langen Sichten daher rührt, dass diese Sichten selten zu erlangen waren, und deswegen mit *geringeren Anschnittszahlen* in die Ausgleichung eingingen, so müssten die älteren Richtungs-Messungen, bei welchen ein fester Plan der Messungs-Anordnung nicht vorhanden war, von den neueren Winkel-Messungen in allen Kombinationen, unterschieden werden; reduziert man aber auf gleichen Zeit- oder Arbeits-Aufwand, so kommen die langen Sichten jedenfalls in den Nachteil.

Theorie der Seiten-Refraktion.

Wir betrachten nach Andeutung von Fig. 5. S. 157 einen Lichtstrahl AB , welcher auf eine lichtbrechende Ebene TS trifft und dadurch nach BC gebrochen wird. Wenn hiebei φ' und φ die Winkel mit der Normalen $N'N$ sind, sowie μ'

und μ die absoluten Brechungs-Coëfficienten auf beiden Seiten der brechenden Ebene, so besteht bekanntlich die Gleichung:

Fig. 5.



$$\frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} = \frac{\mu'}{\mu} \quad (1)$$

Ferner besteht zwischen dem Brechungs-Coëfficienten μ eines Gases und seiner Dichte ϱ die physikalische Gleichung:

$$\mu^2 - 1 = c \varrho \quad (2)$$

wobei $\mu^2 - 1$ die lichtbrechende Kraft heisst, und c eine Konstante ist. Indem man diese letzte Gleichung (2) zweifach anwendet, hat man:

$$\begin{aligned} \frac{\mu'^2}{\mu^2} &= \frac{1 + c \varrho'}{1 + c \varrho} = 1 + c(\varrho' - \varrho) + \dots \\ \frac{\mu'}{\mu} &= 1 + \frac{c}{2} (\varrho' - \varrho) \end{aligned}$$

Dieses in Verbindung mit (1) giebt:

$$\frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} = 1 + \frac{c}{2} (\varrho' - \varrho), \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \varphi' - \sin \varphi}{\sin \varphi} = \frac{c}{2} (\varrho' - \varrho) \quad (3)$$

Nun geht man zur Differential-Betrachtung über, und setzt:

$$\sin \varphi' - \sin \varphi = (\varphi' - \varphi) \cos \varphi = d\varphi \cos \varphi \quad \text{und} \quad \varrho' - \varrho = d\varrho$$

Damit wird (3):

$$\frac{d\varphi \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{c}{2} d\varrho, \quad d\varphi = \frac{c}{2} \varrho \frac{d\varrho}{\varrho} \tan \varphi \quad (4)$$

Nun nennt man $\frac{c}{2} \varrho = \alpha$ die Refraktions-Konstante für die betreffende Luftdichte, und für irgend welchen Barometerstand B und Lufttemperatur t hat man:

$$\frac{c}{2} \varrho = \alpha = \alpha_0 \frac{B}{760} \frac{1}{1 + \epsilon t} \quad (5)$$

wo $\alpha_0 = 0,000\,29269$ oder $= 60,371''$ in Winkelmaass ist. (6)

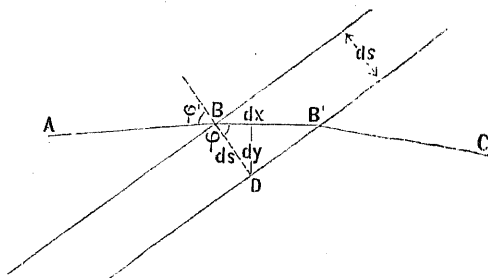
Man hat also nun:

$$d\varphi = \alpha \frac{d\varrho}{\varrho} \tan \varphi \quad (7)$$

Nun betrachten wir in Fig. 6. S. 158 das Durchschneiden einer Luftschichte zwischen zwei parallelen Ebenen, welche durch B und B' gehen.

Es sei ds die Querbreite der Schichte, dx sei die Länge BB' des Lichtweges durch die Schichte, und dy sei rechtwinklig zu dem Lichtwege gemessen, entsprechend dem Schichten-Abstand.

Fig. 6.



Dieses giebt nach Fig. 6.:

$$\sin \varphi = \frac{dy}{ds} \quad \cos \varphi = \frac{dx}{ds} \quad (8)$$

also nun nach (7):

$$\begin{aligned} d\varphi &= \alpha \frac{d\rho}{\rho} \frac{dy}{ds} \frac{dx}{ds} \quad \text{oder} \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\alpha}{\rho} \frac{d\rho}{ds} \frac{dy}{ds} \\ \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{\alpha}{\rho} \frac{d\rho}{ds} \sin \varphi \quad \text{oder} \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\alpha}{\rho} \frac{d\rho}{dy} \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad (9)$$

Hier ist $\frac{d\rho}{ds}$ die Änderung der Luftdichte in Bezug auf die Querrihtung der Schichten und $\frac{d\rho}{dy}$ giebt die Dichten-Änderung quer zur Lichtbahn.

Wenn $\varphi = 0$ ist, so wird der Ausdruck (9) jedenfalls selbst gleich Null, was auch ganz der Anschauung für einen Strahl, der rechtwinklig zur Schichtengrenze antritt, entspricht. Wenn dagegen $\varphi = 90^\circ$ ist, so entsteht eine gewisse theoretische Unsicherheit, welche sich durch Betrachtung der mit jeder Brechung verbundenen Reflexion heben lässt.

Für unsere Zwecke sehen wir davon ab und setzen in (9), mit Annahme eines Wertes dS , welcher in B rechtwinklig zu BB' sei:

$$\frac{d\rho}{ds} \sin \varphi \quad \text{oder} \quad \frac{d\rho}{dy} \sin^2 \varphi = \frac{d\rho}{dS} \quad (10)$$

$$\text{also:} \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\alpha}{\rho} \frac{d\rho}{dS} \quad (11)$$

Die Luftdichte ρ ist für einen Barometerstand B und eine Temperatur t ausgedrückt durch:

$$\rho = \rho_0 \frac{B}{B_0} \frac{1 + \epsilon t_0}{1 + \epsilon t} \quad (12)$$

wo ρ_0 , B_0 und t_0 Anfangs-Zustände sind. Dieses giebt:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dB}{B} - \frac{\epsilon}{1 + \epsilon t} dt \quad (13)$$

Dieses in (11) eingesetzt giebt, mit der Näherung $1 + \epsilon t = 1$:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\alpha}{B} \frac{dB}{dS} - \alpha \epsilon \frac{dt}{dS} \quad (14)$$

Hier kann gesetzt werden $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{R}$, wenn mit R der Krümmungshalbmesser

der Lichtbahn bezeichnet wird, und wenn die Länge der Lichtlinie $= x$ gesetzt wird, so hat man die Gesamtkrümmung $\Delta \varphi$:

$$\Delta \varphi = \frac{\alpha}{B} \frac{dB}{dS} x - \alpha \varepsilon \frac{dt}{dS} x \quad (15)$$

Um $\Delta \varphi$ in Sekunden zu erhalten, muss man nach (6), $\alpha = 60,371''$ setzen, und da weiter $\varepsilon = 0,003665$ ist und B rund $= 760^{mm}$ gesetzt werden kann, so giebt (15):

$$\Delta \varphi = 0,08 \frac{dB}{dS} x - 0,22 \frac{dt}{dS} x \text{ in Sekunden} \quad (16)$$

Um Zahlen einzuführen, betrachten wir zuerst den Quotienten $\frac{dB}{dS}$ in (16), welcher in der Meteorologie der „barometrische Gradient“ genannt wird. Man pflegt dieses Verhältnis auf die Entfernung von 1 Grad $= 15$ Meilen oder rund $= 111^{km}$ zu beziehen; d. h. wenn die Isobaren bei 1^{mm} Druckunterschied den Queraabstand $111^{km} = 111\,000^m$ haben, so ist nach den bisher angenommenen Massseinheiten zu setzen:

$$\frac{dB}{dS} = \frac{1}{111\,000}$$

Wenn noch die Lichtlinien-Länge $x = 10\,000^m$ angenommen wird, so macht das erste Glied von (16) nur $0,007''$.

Mehr wird das zweite Glied von (16) ausmachen, wenn lokale Ursachen die Wärmeleichheit in horizontalem Sinne stören. Nimmt man etwa $\frac{dt}{dS} = 1^\circ$ auf 1000^m und $x = 10\,000^m$, so giebt das zweite Glied von (16) den hohen Betrag von $2,2''$.

Die hier gemachten Annahmen sind im höchsten Grade unbestimmt; es kann wohl vorkommen, dass die Lufttemperatur in horizontalem Sinne sich noch viel mehr ändert als 1° auf $10\,000^m$, vielleicht sogar 1° auf 100^m , wenn z. B. Seen und Wälder mit trockenen Landstrichen abwechseln, allein solche Störungen werden nur auf kurze Entfernungen und keinesfalls auf die ganze Länge von geodätischen Sichten vorkommen.

Trotzdem kann man unserer vorstehenden theoretischen Betrachtung etwa die Bedeutung beilegen:

Die meteorologischen Ungleichheiten in horizontalem Sinne können seitliche Refractionen erzeugen von gleicher Grössen-Ordnung wie die Fehler der Winkel-Messungen erster Ordnung.

Anhang zu § 24. und Nachtrag zu Band II, § 128.

Die vorstehende Entwicklung der Seiten-Refraktion giebt Veranlassung, auch auf die früher in unserem II. Bande § 128. entwickelten Formeln für die Höhen-Refraktion zurückzukommen.

Wir haben inzwischen jene Formeln wesentlich kürzer entwickelt, und zugleich gefunden, dass in dem Gliede mit n ein Faktor $1 + \varepsilon t$ oder Nenner $1 - \varepsilon t$ vernachlässigt war, welcher neben den anderen Grössen gleicher Ordnung nicht zu vernachlässigen ist.

Wie inzwischen in der „Zeitschr. f. Verm. 1889“, S. 176—183 gezeigt wurde, muss der allgemeine Ausdruck für K , statt (44) und (51)—(52) S. 459—460, Band II, nun so heissen:

$$k = \frac{\alpha_0}{1 - 2 \alpha_0} \frac{B}{760} \frac{1}{(1 + \varepsilon T)^2} \frac{r}{M K} (1 - M K \varepsilon n)$$

oder in Zahlen:

$$k = 0,2325 \frac{B}{760} \frac{1}{(1 + \epsilon T)^2} (1 - 29,39 n)$$

Dabei ist B der Barometerstand, T die Lufttemperatur und n die Abnahme der Lufttemperatur für 1^m Höhe.

Im übrigen verweisen wir auf „Zeitschr. f. Verm. 1889“, S. 176–183 und S. 232–238.

§ 25. Genauigkeit der Basismessung.

Die Fehler der Basismessungen sind wesentlich zweierlei Art, erstens unregelmässige von der Handhabung der Apparate u. s. w. herrührende Fehler, welche proportional der Quadratwurzel der Länge wachsen, und zweitens regelmässige mit der gemessenen Länge selbst anwachsende Fehler, zu welchen vor allem die Mass-Unsicherheiten der gebrauchten Massstäbe selbst gehören.

Man wird im allgemeinen annehmen können, dass die regelmässigen Fehler im Gesamtergebnis überwiegen, indessen sind sie schwer zu bestimmen (und wahrscheinlich sind dieselben oft unterschätzt worden).

Leichter und sicherer zu bestimmen sind die unregelmässigen Fehler, mit welchen wir uns nun zuerst allein beschäftigen wollen. Man findet diese Fehler durch Messungs-Wiederholungen.

Besonders wichtig ist hiebei die Doppelmessung einer Linie in verschiedenen Teilstrecken:

Man habe hiefür folgendes:

$$\begin{array}{cccccccc} \text{Strecke } s_1 & \text{gebe die Differenz hin und her } & d_1 \\ & " & s_2 & " & " & " & " & d_2 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & " & s_n & " & " & " & " & d_n \end{array}$$

Diese Differenzen $d_1 d_2 \dots d_n$ auf die Strecken-Einheit (z. B. 1^m) reduziert geben:

$$\frac{d_1}{\sqrt{s_1}} \quad \frac{d_2}{\sqrt{s_2}} \quad \frac{d_3}{\sqrt{s_3}} \dots \quad \frac{d_n}{\sqrt{s_n}}$$

Daraus bildet man die mittlere Differenz:

$$D = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{d_1^2}{l_1} + \frac{d_2^2}{l_2} + \dots + \frac{d_n^2}{l_n} \right)} = \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d \cdot d}{s} \right]}$$

oder den mittleren Fehler einer Messung der Längen-Einheit (1^m):

$$m = \frac{D}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2n} \left[\frac{d \cdot d}{s} \right]} \quad (1)$$

Damit hat man auch den mittleren Fehler des Mittels aus zwei Messungen der Längen-Einheit:

$$m' = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d \cdot d}{s} \right]} \quad (2)$$

oder den mittleren Fehler des Mittels aus zwei Messungen einer Länge L :

$$M = m' \sqrt{L} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{n} \left[\frac{d \cdot d}{s} \right]} \quad (3)$$

Wir wollen die Hauptformel (1) auf das schon mehrfach von uns benützte klassische Beispiel der Gradmessung in Ostpreussen anwenden (vgl. Band I. S. 31).

Die Basis wurde in zwei Abschnitten je zweifach gemessen:

	Messung I	Messung II	Differenz I — II = d
s_1	441,1852 ^m	441,1839 ^m	+ 0,0013 ^m
s_2	1381,1571 ^m	1381,1632 ^m	— 0,0061 ^m
$s_1 + s_2$	1822,3423 ^m	1822,3471 ^m	— 0,0048 ^m

Zur weiteren Rechnung nehmen wir die Entfernungen s in Kilometern und die Differenzen d in Millimetern und haben dann:

	s	d	d^2	$\frac{d^2}{s}$
1.	0,441 ^{km}	+ 1,3 ^{mm}	1,69	3,83
2.	1,381 ^{km}	— 6,1 ^{mm}	37,21	26,94
				30,77

$$\text{also } m = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 30,77} = 2,77^{\text{mm}} \text{ für } 1^{\text{km}}. \quad (4)$$

Ebenso wird verfahren, wenn statt zwei Teilstrecken s_1 und s_2 deren beliebig viele vorhanden sind.

Wenn alle Teilstrecken $s_1 s_2 \dots$ nahezu *gleich* sind, so braucht man die Quotienten $d:s$ bzw. $d^2:s$ nicht einzeln auszurechnen.

Als Beispiel für *gleiche* Strecken, jedoch für *dreifache* Messung aller Teilstrecken, nehmen wir die schweizerische Basismessung von Aarberg mit dem spanischen Apparat (vgl. § 14. S. 98):

Strecke	Messung I	Messung II	Messung III	Mittel
s_1	400,0370 ^m	400,0364 ^m	400,0370 ^m	400,0368 ^m
s_2	400,0390	400,0383	400,0379	400,0384
s_3	400,0383	400,0382	400,0388	400,0384
s_4	400,0570	400,0580	400,0584	400,0578
s_5	400,0352	400,0356	400,0353	400,0354
s_6	399,9045	399,9044	399,9043	399,9044
Summe	2400,1110	2400,1109	2400,1117	2400,1112

Nun bildet man die sämtlichen 18 Differenzen v zwischen den Streckenmitteln und den Einzelmessungen, mit Quersummen $[v] = 0$ zur Probe, worauf die Quadrate v^2 sich ergeben:

	v	v^2	v	v^2	v	v^2	$[v]$
1.	— 0,2 ^{mm}	0,04	+ 0,4 ^{mm}	0,16	— 0,2 ^{mm}	0,04	0,0 ^m
2.	— 0,6	0,36	+ 0,1	0,01	+ 0,5	0,25	0,0
3.	+ 0,1	0,01	+ 0,2	0,04	— 0,4	0,16	— 0,1
4.	+ 0,8	0,64	— 0,2	0,04	— 0,6	0,36	0,0
5.	+ 0,2	0,04	— 0,2	0,04	+ 0,1	0,01	+ 0,1
6.	— 0,1	0,01	0,0	0,00	+ 0,1	0,01	0,0
		1,10		0,29		0,88	2,22 = $[v v]$

Der mittlere Fehler einer Messung einer Strecke von rund $0,4^{km}$ wird hiernach:

$$m_1 = \sqrt{\frac{[v v]}{n(\sigma - 1)}} = \sqrt{\frac{2,22}{12}} = \pm 0,430^{mm} \quad (5)$$

Hiebei ist mit σ die Wiederholungszahl der Strecken-Messung bezeichnet, also in diesem Falle $\sigma = 3$. Weiter berechnet man den mittleren Fehler einer Messung von 1^{km} , da $s = 0,4^{km}$ ist:

$$m = m_1 \sqrt{\frac{1}{0,4}} = \pm 0,68^{mm} \quad (6)$$

Auch hat man den mittleren Fehler der 3fach wiederholten Messung der Gesamtlänge von $2,4^{km}$:

$$M = \sqrt{\frac{2,4}{3}} m = \pm 0,61^{mm} \quad (7)$$

Man wird hiernach das Gesamtergebnis schreiben:

$$L = 2400,1112^m \pm 0,0061^m$$

Wenn hier die Strecken s nicht alle gleich wären, so müsste man nicht bloss v und v^2 , sondern auch alle Werte $v: \sqrt{s}$ bzw. $v^2:s$ bilden, und dann rechnen:

$$m = \sqrt{\frac{1}{n(\sigma - 1)}} \left[\frac{v v}{s} \right] \quad (8)$$

Sind alle s gleich, so stimmt das mit (5) und (6) überein.

Zu einem Beispiele mit *ungleichen* Wiederholungen in den einzelnen Strecken nehmen wir nochmals die Basis der Gradmessung in Ostpreussen, es ist nämlich für die erste Strecke noch eine dritte (früher bei (4) nicht benützte) Messung vorhanden, und wir haben im ganzen:

Strecke	Messung I	Messung II	Messung III	Mittel
s_1	441,1835 ^m	441,1852 ^m	441,1839 ^m	441,1842 ^m
s_2	. .	1381,1571	1381,1632	1381,1602
$s_1 + s_2$		1822,3423 ^m	1822,3471 ^m	1822,3444 ^m

	$v_{mm} \frac{v^2}{s}$	$v \frac{v^2}{s}$	$v_{mm} \frac{v^2}{s}$	$\left[\frac{v v}{s} \right]$
$s_1 = 0,441^{km}$	+ 0,7 ^{mm} 1,10	— 1,0 ^{mm} 2,27	+ 0,3 ^{mm} 0,20	3,57
$s_2 = 1,381^{km}$		+ 3,05 6,73	— 3,05 6,73	13,46
	1,10	9,00	6,93	17,03

Nun findet man den mittleren Fehler m einer Messung von 1^{km} :

$$m = \sqrt{\frac{3,57 + 13,46}{(3-1) + (2-1)}} = \sqrt{\frac{17,03}{3}} = \pm 2,38^m \text{ für } 1^{km}$$

Der mittlere Fehler des Schluss-Ergebnisses für die ganze Länge $s_1 + s_2$ wird:

$$M = m \sqrt{\frac{s_1}{3} + \frac{s_2}{2}} = 2,38 \sqrt{0,8376} = \pm 2,18^{mm}$$

Die Vereinigung der 3 Messungen von s_1 und der 2 Messungen von s_2 giebt also zusammen:

$$s_1 + s_2 = 1822,3444^m \pm 0,0022^m$$

Nach Anleitung dieser drei Beispiele wird man alle derartigen Fälle behandeln können.

Nach diesen Formeln, welche zur Berechnung des mittleren unregelmässigen Basismessungs-Fehlers aus Messungs-Wiederholungen dienen, geben wir im Folgenden eine Reihe von Beispielen hiefür, wobei immer m den mittleren unregelmässigen (aus Wiederholungen berechneten) Fehler einer Messung von 1 Kilometer Länge, bedeutet.

1736. *Basis von Yarouqui in Peru*, 2 Messungen mit hölzernen 16 oder 20 Fuss langen Latten (*La Condamine Mesure des trois premiers degrés dans l'hémisphère australe*, Paris 1751, S. 5) „nous nous accordâmes à moins de trois pouces près sur une longueur de 6273 toises.“ Dieses giebt 81,21 mm auf 12,326 km doppelt gemessen, oder den mittleren Fehler für eine Messung von 1 km:
 $m = \pm 16,42 \text{ mm.}$

1736. *Basis von Tornœ in Lappland*, 2 Messungen mit hölzernen Latten, 7407 Toisen, Differenz 4 Zoll. (*Astr. Nachr.* 6. Band, 1828, S. 20.) Dieses giebt 20,152 mm auf 14,436 km oder $m = \pm 20,15 \text{ mm.}$

1739. *Nachmessung der Picardschen Basis von Jurisy*, durch *Cassini* (Base du système métrique, III, S. 505), Basis von 5747 Toisen mit Eisenstangen gemessen, welche längs einer 50 Toisen langen Schnur unmittelbar aneinander gelegt wurden. Die Basis ist 5 mal gemessen:

	Toisen	Fuss	Zoll	Linien	Meter
1.	5747	2'	8"	6'''	= 11201,991
2.	"	4'	0"	9'''	= 11202,431
3.	"	3'	4"	10'''	= 11202,217
4.	"	4'	5"	10'''	= 11202,569
5.	"	4'	0"	0'''	= 11202,411

Mittel 11202,324 m + 0,100 m

Betrachtet man alle Abweichungen als unregelmässige Fehler, so erhält man den mittleren Fehler einer Messung von 1 km: $m = \pm 67,0 \text{ mm}$

1805. *Benzenbergs* Basismessung mit hölzernen Latten für das Rheinische Kataster (vgl. § 10, S. 71)
 $m = \pm 8,2 \text{ mm.}$

1819. *Schwerds kleine Basis*. Zwei Messungen auf 20° R reduziert: 859,432734 m und 859,440943 m Differenz = 1,791 mm. (*Schwerd*, „Die kleine Speyrer Basis“, S. 33.) Dieses giebt $m = \pm 1,37 \text{ mm.}$

1834–1872. *Basismessungen mit dem Besselschen Apparate*.

Die Längen- und die Strecken-Verteilung der zahlreichen seit 1834 mit dem *Besselschen* Apparate gemachten Basismessungen haben wir schon in § 17, S. 111 mitgeteilt, und da auch die Messungs-Differenzen bereits anderwärts, nämlich in dem Werke: „Deutsches Vermessungswesen von *Jordan-Steppes* 1882“, I, S. 133 von uns zusammengestellt wurden, bilden wir hier die Tabelle der mittleren unregelmässigen Fehler m für je eine Messung von 1 Kil.:

Jahr	Länge	Basismessung	mittlerer Fehler m
1834	1,822 km	Königsberg (Gradm. in Ostpreussen)	+ 2,77 mm
1838	2,701	Kopenhagen	0,86
1846	2,336	Berlin (Küstenvermessung)	1,55
1847	2,134	Bonn	0,73
1852	2,301	Lommel (Belgien)	0,66
1853	2,489	Ostende	0,54
1854	2,763	Strehlen (Schlesien)	1,75
1871	5,875	Braak (Holstein)	1,59
1872	8,909	Grossenhain (Sachsen)	1,46

(Die Angaben für Grossenhain sind von *Nagel* veröffentlicht im „*Civilingenieur*“ 28. Band, 1882, I. Heft, vgl. auch *Hehnert*, „*Zeitschr. f. Verm.* 1883“, S. 506.)

Besonders zu erwähnen ist hier noch die *Göttinger* Basismessung, weil dieselbe in metronomischer Beziehung neu behandelt wurde, wie wir bereits auf S. 104–105 beschrieben haben.

Die Genauigkeits-Berechnung, entsprechend 4 verschiedenen metronomischen Formeln, ist von *General Schreiber* in der „*Zeitschr. f. Verm.* 1882“, S. 1–17 mitgeteilt worden.

Aus den 33 Strecken-Differenzen der 5193 m langen Linie (eine Strecke = 157 m) ergab sich der mittlere Fehler m einer Messung von 1 km, unter der Annahme unregelmässiger \pm gleichwahrscheinlicher Fehler so:

	Formel (vgl. S. 105)	mittl. Fehler m
I.	$l = L - (k-1,4) m$	$\pm 0,80 \text{ mm}$
II.	$l = L - (k-1,4) m - (k-1,4)^2 Q$	0,70
III.	$l = L - (k-1,4) m - (k-1,4)^2 Q + \alpha h$	0,55
IV.	$l = L - (k-1,4) m - (k-1,4)^2 Q + \alpha h + \alpha^2 k$	0,57

Die Differenzen für die ganze Länge 5193 m (hin und her) der Göttinger Basis wurden nach diesen 4 Formeln:

I	II	III	IV
— 14,10 mm	— 13,04 mm	— 8,17 mm	— 7,62 mm

1879—1880. Basismessung des geodätischen Instituts.

Im Jahre 1879 wurde die alte schlesische Basis bei Strehlen, 2763 m lang, welche erstmals 1854 mit dem Besselschen Apparat gemessen worden war, von dem geodätischen Institute mit einem Brunnerschen Apparate (S. 93) nachgemessen. Die Linie wurde in 10 gleichen Teilen von je 276 m hin und her gemessen. Die Messungs-Differenzen sind in dem „Generalbericht f. d. Europ. Gradn. für 1879“, S. 104 veröffentlicht; man berechnet hieraus den mittleren unregelmässigen Fehler einer Messung von 1 km : $m = \pm 0,76 \text{ mm}$.

Einiges weitere hierüber giebt auch der „Generalbericht über den Fortschritt der Arbeiten für d. Europ. Gradn. im Jahre 1880“, S. 33—35.

1858. Spanische Basismessungen.

Spanische Basis von Madridejos, mit dem älteren Brunnerschen Apparate (S. 92) gemessen. Das Mittelstück, 2767 m der 5 teiligen Basis (s. o. S. 116), wurde in 12 Absätzen je zweimal gemessen („Astr. Nachr. 61. Band, 1864“, S. 340). Die 11 ersten Abschnitte haben je 234 m Länge und die Differenzen der 11 Doppelmessungen sind: $+0,23 - 0,20 + 0,49 + 0,00 - 0,02 - 0,23 - 0,32 + 0,39 - 0,09 - 0,28 + 0,36 \text{ mm}$, das letzte Stück hat nur 194 m Länge und gab bei der Doppelmessung die Differenz $-0,14$. Aus diesen 12 Doppelmessungen berechnet man . . . $m = \pm 0,40 \text{ mm}$.

Über zwei kleinere, im Jahre 1860 ebenfalls mit dem älteren Brunnerschen Apparate gemessene Grundlinien giebt der „Generalbericht d. Europ. Gradn. für 1869“, S. 65 die Einzelheiten der Doppelmessungen, woraus man berechnet:

Basis von Mahon, 2359 m in 6 Absätzen,	$m = \pm 0,43 \text{ mm}$
„ „ Ivlee, 1605 „ 4 „	$m = \pm 0,32 \text{ mm}$

Ausser diesen drei Linien sind bis 1879 noch 6 Grundlinien in Spanien gemessen worden, wober Einzelheiten mitgeteilt sind in dem antlichen Werke: „Memorias del instituto geográfico y estadístico. Tomo III. Madrid 1881, und Tomo IV, Madrid 1883. (Arcos de la Frontera III, S. 259, Lugo III, S. 337, Vich III, S. 419, Olite IV, S. 99.)

Schweizerische Basismessungen.

In den Jahren 1880—1881 wurden mit dem neuen spanischen Apparate (vgl. S. 94—98) drei Grundlinien in der Schweiz gemessen. Bei Aarberg 2400 m , bei Weinfelden 2540 m und bei Bellinzona 3200 m . Die erste Linie 3mal, die beiden anderen je 2mal.

Aus den Messungs-Differenzen berechnet man den mittleren Fehler einer Messung von 1 km :

Aarberg	$m = \pm 0,68 \text{ mm}$
Weinfelden	$m = \pm 1,27 \text{ mm}$
Bellinzona	$m = \pm 0,89 \text{ mm}$

Weiteres hierüber giebt das antliche Werk: „Le réseau de triangulation suisse, publié par la commission géodésique suisse, troisième volume, la mesure des bases par A. Hirsch et J. Durrer. Lausanne 1888.

Nordamerikanische Basismessungen mit dem Repsold-Comstock'schen Apparat (§ 14. S. 99—102).

Nach dem Werke: „Report upon the primary triangulation of the united States Lake Survey, by Comstock etc. Washington 1882, S. 262, S. 290, S. 303 berechnet man aus den Messungs-Differenzen die mittleren unregelmässigen Fehler einer Messung von 1 km :

1877 Chicago-Base	7509 m in 8 Strecken	$m = \pm 1,12 \text{ mm}$
1878 Sandusky-Base	6227 m in 6 „	1,19
1879 Olney-Base	6580 m in 6 „	0,79

Dabei sind die auf S. 107 erwähnten Korrekturen für die Ungleichheit der Temperaturen beider Massstabteile berücksichtigt.

1881. *Californien. Yolo-Country.*

United States coast and geodetic survey, methods and results on the length of the Yolo-Base-Line. Appendix Nr. 11, Report for 1883. Washington 1884, berechnet von *Charles A. Schott*, Assistent (vgl. auch „Generalbericht d. Europ. Gradn. für 1883“, Annexe III, S. 2—3.)

Die 17,5 km lange Linie wurde teils zweifach, teils dreifach gemessen. Aus den 18 Differenzen-Vergleichungen zwischen der ersten und zweiten Messung berechnet man den mittleren Fehler einer Messung von 1 km $m = \pm 2,03 \text{ mm}$

Österreichische Basismessungen.

1862. Grundlinie bei Josephsstadt, zwei Messungen, 2772,174020 und 2772,180159 Wiener Klafter, Differenz = 0,006139 W. Kl. („Generalbericht d. Europ. Gradn. 1863“, S. 15). Dieses giebt 11,94 mm Differenz auf 5,257 km, oder $m = \pm 3,59 \text{ mm}$

1868. Basis in Dalmatien, zwei Messungen 1305,33270 und 1305,33186 Wiener Klafter, Differenz = 0,00084 W. Kl. („Generalbericht d. Europ. Gradn. 1870“, S. 28), oder 1,6 mm auf 2,475 km
 $m = \pm 0,72 \text{ mm}$

1863. *Schwedische Grundlinie* auf Axevalla, zwei Messungen 1357,03274 Toisen und 1357,03360 T. Differenz = 0,00086 Toisen („Generalbericht d. Europ. Gradn. 1863“, S. 28), oder 1,68 mm auf 2,645 km
 $m = \pm 0,73 \text{ mm}$

1865. *Italienische Basis von Catania*. Eine Basis 3692 m wurde 6mal gemessen („Generalbericht d. Europ. Gradn. 1865“, S. 64 und 65).

Wenn man die 6 Messungen als gleichartig behandelt, so findet man $m = \pm 1,96 \text{ mm}$

Die Messungen 1. 2. 3. sind in der einen, 4. 5. 6. in der andern Richtung gemacht. Die beiden Arten zeigen eine regelmässige Differenz. Behandelt man daher die 3 ersten Messungen und die 3 letzten Messungen je für sich, so findet man die mittleren unregelmässigen Fehler für 1 km bzw.

für 1. 2. 3. $m = \pm 0,85 \text{ mm}$

für 4. 5. 6. $m = \pm 0,47 \text{ mm}$

1873. Basis von Simlak, gemessen von *Oudemans* bei der Triangulierung von Java (s. o. § 15. S. 103).

Eine Länge von 3909 m wurde in 20 Strecken von je rund 200 m doppelt gemessen, woraus sich ergibt $m = \pm 1,69 \text{ mm}$

§ 26. Geschwindigkeit der Basismessung.

Bei der Beurteilung der Leistungs-Fähigkeit eines Basis-Apparates kommt ausser der Genauigkeit auch die Geschwindigkeit in Betracht, weshalb wir hiefür eine Anzahl von Angaben gesammelt haben, die im Folgenden zusammengestellt sind. Dabei bedeutet immer v die gemessene Länge für 1 Stunde.

Schwerd mass im Jahre 1820 in 3 Tagen mit 30 Stunden seine 859^m lange Grundlinie zweimal (*Schwerd*: „Die kleine Speyrer Basis“, S. 23—32). Dieses giebt für 1 Stunde $v = 57^m$

Die Württembergische Grundlinie Solitude—Ludwigsburg von 13 032^m Länge wurde in 19 Tagen einmal gemessen (*Köhler*: „Die Landes-Vermessung des Königreichs Württemberg“, S. 57). Rechnet man 1 Tag durchschnittlich zu 6 Stunden, so ist $v = 114^m$

Struve fand 1840 das mittlere Fortschreiten in 1 Stunde 42 Toisen für den *Tennerschen* Apparat und 36 Toisen für seinen Apparat („Vierteljahrsschrift der astr. Gesellschaft 1870“, S. 69), dieses giebt

für den Apparat von *Tenner* $v = 82^m$

„ „ „ „ *Struve* $v = 70^m$

Basismessungen der preussischen Landes-Aufnahme mit dem Besselschen Apparat.

Nach einer bereits früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1880“, S. 387 und 1883, S. 583 gemachten Zusammenstellung haben wir folgende Maximal-Leistungen in 1 Tag, wobei 1 Lage = 4 Stangen = 15,6^m ursprünglich als Einheit zu Grunde gelegt ist:

1834	Königsberg	68,6	Lagen	=	1070 ^m
1871	Braak	67	„	=	1045
1877	Oberhergheim	113	„	=	1763
1880	Göttingen	131	„	=	2044
1883	Meppen	150	„	=	2340

Dieses sind *Maximal*-Leistungen für je 1 Tag; was die *mittlere* Geschwindigkeit für 1 Stunde betrifft, so war dieselbe in Königsberg nach S. 47 „der Gradm. in Ostpreussen“ 8 Lagen = 125^m in 1 Stunde. Teils durch die Vervollkommnungen des Apparates, teils durch die Übung steigerte sich die Geschwindigkeit so sehr, dass bei Göttingen auf 1 Lage etwa 5 Minuten, bei Meppen nur noch etwa 3 Minuten auf 1 Lage kamen.

Hiermach haben wir folgende Geschwindigkeiten in 1 Stunde:

Königsberg	$v = 125^m$
Göttingen	$v = 187^m$
Meppen	$v = 300^m$

Sächsische Basismessung bei Grossenhain.

Diese Basis ist ebenfalls mit dem *Besselschen* Apparate gemacht.

Nach der Mitteilung „Zeitschr. f. Verm. 1883“, S. 600 erforderte die 8 909^m lange Linie folgende Zeiten:

Hinmessung	13	Tage = 118,5	Stunden, also 75	Meter in 1	Stunde
Rückmessung	12	„ = 88,0	101		

Im Mittel hat man 206,5 Stunden für 17818^m oder die *mittlere* Geschwindigkeit in 1 Stunde: $v = 86^m$

Basismessungen des geodätischen Instituts.

Mit einem *Brunnerschen* Apparat, ähnlich dem ersten spanischen Apparate, wurden die zwei Grundlinien bei Strahlen (2763^m) und bei Berlin (2336^m) in den Jahren 1879—1880 gemessen. Nach Mitteilung von Professor *Fischer* wurden zu Anfang stündlich 5 Stangenlagen (= 20^m) gemacht; nachdem aber das Personal eingeübt war, kamen bei der Strahlener Basis auf 1 Stunde durchschnittlich 7—8 Lagen, und bei der Rückmessung 10 Lagen. Bei der Berliner Basis wurden bei etwa 3stündiger Arbeitszeit Vormittags und 3stündiger Nachmittags zusammen 60 Lagen = 240^m gemessen.

Hiernach ist die Geschwindigkeit für 1 Stunde anzunehmen: . . . $v = 40^m$

Bei einer späteren Messung würde sich die Zahl der Stangenlagen in einem Tage vermehren lassen, weil nach den Erfahrungen bei der Strahlener und Berliner Basismessung sich Vereinfachungen des Messungsmodus erzielen lassen.

Spanische Basismessungen mit dem Brunnerschen Apparat.

Der erste *Brunnersche* Apparat, mit welchem die Basis von Madridejos gemessen wurde, hatte eine sehr geringe Geschwindigkeit. *Koype* schreibt hierüber in der Abhandlung „der Basisapparat des General *Ibanez* und die Aarberger Basismessung“ S. 2:

Die erste spanische Basismessung, 14 663^m, dauerte vom 22. Mai bis zum 7. September 1858. Sie erforderte 78 Arbeitstage, also 5,3 Tage für 1 Kilometer. Rechnet man 1 Tag = 6 Stunden, so erhält man für 1 Stunde $v = 31^m$

In dem Werke: „Expériences faites avec l'appareil à mesurer les bases u. s. w. traduit par *Laussedat*, Paris 1860“, S. 210 ist angegeben, dass die Geschwindigkeit 2 Minuten für 1 Meter war, oder für 1 Stunde $v = 30^m$

Bei den zwei kleinen spanischen Grundlinien von Mahon und Ivica auf den balearischen Inseln war nach dem „Generalbericht der Europ. Gradm. für 1869“, S. 65 die Messungs-Geschwindigkeit in 1 Stunde: $v = 120^m$

Schweizerische Basismessungen.

1880—1881 die Grundlinien bei Aarberg, Weinfelden und Bellinzona (vgl. S. 94 bis 98). Die Zeitverhältnisse sind sehr genau angegeben, man findet die Geschwindigkeit in 1 Stunde:

Aarberg	$v = 142^m$
Weinfelden	$v = 114^m$
Bellinzona	$v = 144^m$

Ausserdem sind auch die *Kosten* angegeben (S. 86 der amtl. Veröffentlichung), nämlich für alle drei Linien 37 600 Fr. oder 4 600 Fr. für 1 Kilometer.

Nordamerikanische Basismessungen mit dem Repsold-Comstockschen Apparat
(vgl. S. 99—102).

„Report upon the primary triangulation“ etc. S. 262, S. 290, S. 300 giebt:

1877 Chicago-Base. Die mittlere Messung in 1 Tag war 292^m , die grösste Leistung in 1 Tag 500^m ,

1878 Sandusky-Base. Der Durchschnitt für 1 Tag bei der Hinmessung war 88 Röhren = 352^m , bei der Rückmessung 100 Röhren = 400^m ,

1879 Olney-Base. Die mittlere Röhrenzahl in 1 Tag war $105 = 420^m$, die grösste Zahl an 1 Tag war 168 Röhren = 672^m . Gemessen wurde an 32 Tagen.

Die Tagesleistung wächst mit den Übungsjahren. Nehmen wir zum Schlusse 1 Tag = 6 Stunden = 420^m , so wird für 1 Stunde: $v = 70^m$

§ 27. Mittlere Winkelfehler der Triangulierungen.

Um die verschiedenen Begriffe und Berechnungsarten des mittleren Winkelfehlers bei Triangulierungen zu entwickeln, beginnen wir mit dem einfachsten Fall:

Wenn in einem Dreieck alle drei Winkel α, β, γ gleich genau gemessen sind, und in ihrer Summe einen Widerspruch gegen:

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = w \quad \text{bzw.} \quad \alpha + \beta + \gamma - (180^\circ + \varepsilon) = w \quad (1)$$

so hat man bekanntlich den mittleren Fehler eines gemessenen Winkels α, β oder γ zu berechnen:

$$m = \frac{w}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

(Diesen einfachen für sich verständlichen Fall haben wir früher auch nach dem Grundsatz des arithmetischen Mittels dargestellt in unserem I. Bande, S. 27.)

Hat man mehrere unabhängige Dreiecke dieser Art, in der Anzahl p , etwa in einer Kette (ohne Seitengleichungen), so bekommt man entsprechend:

$$m = \sqrt{\frac{[w^2]}{3p}} \quad (3)$$

Wenn Dreiecke nicht nur kettenartig zusammenhängen, sondern auch Vierecke mit Diagonalen bilden, so ist die Fehler-Berechnung aus den Dreiecksschlüssen nicht mehr so einfach. Sieht man zunächst davon ab, dass dann auch Seitengleichungen auftreten, und will man sich nur an die bequem verfügbaren Dreiecksschlüsse halten, so hat man in einem Vierecke deren vier. Sind dieselben w_1, w_2, w_3, w_4 (wobei diese allerdings nicht unabhängig sind), so rechnet man nach § 23. S. 144 hieraus:

$$m^2 = \frac{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2}{12} \quad (4)$$

Jedoch darf man diesen Wert nicht als aus 4 Dreiecken, sondern nur als aus

3 Dreiecken gezogen, mit anderen Elementen zusammen nehmen. Wenn also z. B. 6 Werte w vorliegen:

$$w_0, (w_1, w_2, w_3, w_4), w_5$$

wobei w_0 und w_5 selbständig aus je einem Dreieck, dagegen w_1, w_2, w_3, w_4 zusammen aus einem Viereck mit 2 Diagonalen erhalten sind, so rechnet man:

$$m^2 = \frac{w_0^2 + \frac{3}{4}(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2) + w_5^2}{1 + 3 + 1} \quad (5)$$

Wenn man nur diejenigen Widersprüche w benützt, welche in *Gesamt-Netz*-Ausgleichungen als Absolutglieder der Dreiecks-Summengleichungen verfügbar sind, so giebt man in jedem Viereck eine Probe w verloren; rechnet man trotzdem aus Bequemlichkeit nur mit denjenigen w , welche als unabhängig in die Ausgleichung eingehen, so wird die Bestimmung von m erheblich weniger zuverlässig, zumal möglicherweise willkürliche Auswahl der Werte w im Viereck stattgefunden hat.

Bei der internationalen Erdmessung hat sich das Bedürfnis einer einfachen Formel zur Berechnung des mittleren Winkelfehlers von Triangulierungen ergeben, und es wurde auf der 1887er Konferenz der permanenten Kommission in Nizza (Verhandlungen hierüber S. 54) der Beschluss gefasst, dass für jedes System von Dreiecken ein Zahlenwert m nach der vorstehenden Formel (3) zu berechnen sei, welcher als Näherungswert für die Winkelmess-Genauigkeit gelten soll, ohne dass dadurch schärferen Genauigkeits-Berechnungen vorgegriffen werden soll. Um diese Bestimmung von m von jeder Willkür unabhängig zu machen, bestimmte man, dass *alle* Dreiecke eines Netzes zugezogen werden sollen, z. B. in einem Viereck nicht nur drei unabhängige Werte w , sondern alle vier, wie schon oben bei (4) besprochen wurde.

Nach dieser rohen Überschlags-Berechnung gehen wir zu schärferen Genauigkeits-Berechnungen über:

Wenn man gleichartige Winkelmessungen in einem Netze mit beliebigem Zusammenhang, also auch mit Seitengleichungen, zusammen ausgleicht, so berechnet man aus der Quadratsumme $[vv]$ der sämtlichen Winkel-Verbesserungen, bei r Bedingungen-Gleichungen den mittleren Winkelfehler:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{r}} \quad (6)$$

Damit bekommt man den mittleren Fehler eines Winkels von der Art, wie sie in die Netz-Ausgleichung eingehen; wenn jedoch in der Netz-Ausgleichung auch *Stationsproben* enthalten waren, dann ist der vorstehende Wert (6) nicht unmittelbar vergleichbar mit den früheren Werten (3) und (2), oder mit den nachher noch zu betrachtenden mittleren Fehlern; und wir wollen deshalb denjenigen mittleren Fehler zu bestimmen suchen, welchen man erhalten haben würde, wenn man zuerst alle Stationsproben zu Stations-Ausgleichungen benützt hätte, und dann erst mit den auf den Stationen ausgeglichenen Winkeln in die Netz-Ausgleichung eingegangen wäre. Allerdings strenge können wir dieses nicht durchführen; da es sich aber in solchen Fällen meist nur um sehr *wenige* Stations-Bedingungen handelt, deren Anzahl = s sei, bei einer Anzahl n von Winkeln, so wollen wir annehmen, durch Konzentration der n Winkel auf $n - s$ unbedingt nötige Winkel werde die Genauigkeit im Verhältnis $\sqrt{n} : \sqrt{n - s}$ gesteigert, und wir nehmen deshalb in solchem Falle:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{r}} \sqrt{\frac{n-s}{n}} \quad (7)$$

Ein gutes Beispiel hiefür ist unser badisches Netz in unserem I. Bande S. 195. Es handelt sich um 27 einzelne gemessene Winkel, welche aber um Speyer und Oggersheim je eine Horizont-Summenprobe im Netze zu erfüllen haben. Da der mittlere Fehler der Ausgleichung an und für sich $= \pm 1,31''$ war (I. Band, S. 204), so rechnen wir nun den mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels nach (7):

$$m = 1,31 \sqrt{\frac{25}{27}} = \pm 1,26'' \quad (8)$$

Sind Winkelmessungen *verschiedener* Genauigkeit zusammen ausgeglichen, so giebt die Ausgleichung den mittleren Fehler m_1 eines Winkels vom Gewichte 1 bei r Bedingungs-Gleichungen:

$$m_1 = \sqrt{\frac{[p v v]}{r}} \quad (9)$$

Bei n Winkeln kann man zunächst daran denken, das *durchschnittliche* Gewicht eines gemessenen Winkels zu berechnen:

$$P = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n} = \frac{[p]}{n} \quad (10)$$

Indessen ist dieses nicht dem Prinzip der Fehlerquadrate entsprechend, da ein Gewicht immer *umgekehrt* proportional einem mittleren Fehlerquadrat ist; man hat vielmehr ein *mittleres* Gewicht so zu berechnen:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{p} \right] \quad (11)$$

Nimmt man dieses zu (9), so bekommt man den mittleren Fehler eines Winkels von mittlerem Stationsgewicht:

$$m = \frac{m_1}{\sqrt{P}} = \sqrt{\frac{[p v v]}{P r}} \quad (12)$$

Zu einem Beispiele wollen wir unsere frühere Ausgleichung des *Schwerdschen* Basisnetzes nehmen (Band I, S. 208 und S. 211). Das durchschnittliche Gewicht nach (10) ist $= 48$, und das mittlere Gewicht nach (11) wird $= 23$, also erheblich von dem vorigen verschieden. Der mittlere Gewichtseinheits-Fehler ist $m_1 = \pm 4,77''$, also nun der mittlere Fehler für mittleres Gewicht auf der Station:

$$m = \frac{4,77}{\sqrt{23}} = \pm 0,99'' \quad (13)$$

Hier wäre noch, weil unter 9 Winkeln eine Stationsprobe bestand, nach (7) zu reduzieren:

$$m = 0,99 \sqrt{\frac{8}{9}} = \pm 0,93'' \quad (14)$$

Doch sind Reduktionen dieser Art, so bald sie erheblich werden, nach der nachher zu entwickelnden genaueren Theorie von (24)–(27) zu behandeln.

Hat man eine Triangulierung nach *Richtungen* ausgeglichen, wie z. B. das badische Viereck in Band I, S. 216, oder das Hannoversche Stadt-Netz in Band II, S. 228, so giebt die Ausgleichung einen mittleren Richtungs-Fehler r , welchem ein mittlerer Winkelfehler m entspricht nach der Gleichung:

$$m = r \sqrt{2} \quad (15)$$

Hat man dabei auf der Station ungleiche Gewichte, so ist nach (11) und (12) zu reduzieren. Dagegen Reduktionen nach der zweifelhaften Näherung (7) kommen bei Richtungs-Ausgleichungen nicht vor, da von jeder Station gerade so viel Richtungen ins Netz eingehen, als die Station Strahlen hat.

Es ist auch zu (15) zu bemerken, dass es überhaupt zweckmässiger wäre, bei allen in Frage stehenden Genauigkeits-Betrachtungen den mittleren *Richtungsfehler* r und nicht den mittleren *Winkelfehler* m als Einheit zu Grunde zu legen; indessen da man jederzeit die beiden Fehler nach (15) gegenseitig reduzieren kann, haben wir dem Herkömmlichen folgend, den mittleren *Winkel*fehler an die Spitze gestellt.

Wir gehen über zu dem sehr häufigen Falle der Ausgleichung nach *Bessels* Methode (Band I, § 54., § 78. und § 79.) Die hier auftretenden Verbesserungen (1) (2) (3) ... sind *Winkel*-Verbesserungen im Netz, und wenn man von Gewichts-Unterscheidungen absieht, so bekommt man bei r Bedingungsgleichungen den mittleren Winkelfehler geradezu:

$$m = \sqrt{\frac{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \dots + (n)^2}{r}} \quad (16)$$

Wenn die *Besselschen* Nullpunkts-Korrekturen z berechnet sind, so kann man daraus zuerst einen mittleren Richtungs-Fehler und dann wieder durch Multiplikation mit $\sqrt{2}$ einen mittleren Winkelfehler berechnen, nach der Formel:

$$m = \sqrt{2 \frac{z^2 + (1')^2 + (2')^2 + \dots}{r}} \quad (17)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} (1') &= z + (1) \\ (2') &= z + (2) \text{ u. s. w. } \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Für die einzelne Station ist hierbei:

$$-z = \frac{[p'](1) + p''(2) + p'''(3)}{[p'] + [p''] + [p'''] + [p'''']} \quad (19)$$

wo $[p']$, $[p'']$, $[p''']$ die Anschnitts-Zahlen der einzelnen Strahlen sind.

Da diese ganze Berechnung mit z eine willkürliche Verteilungsart ist, kann man statt (19) auch kürzer so rechnen:

$$-z = \frac{(1) + (2) + (3) + \dots + (s-1)}{s} \quad (20)$$

wo s die Zahl der Strahlen für die fragliche Station ist, d. h. man stimmt nach (20) und (18) die $s-1$ Winkel-Korrekturen auf s Richtungs-Korrekturen mit der Summe Null ab.

(Dieses Verfahren ist angewendet in dem „Schweizerischen Dreiecksnetz, II. Band, Zürich 1885“, S. 39.)

Wenn man die Wahl hat, nach (16) oder (17) zu rechnen, so ist die Richtungsform (7) vorzuziehen, weil dabei keine Richtung im Vergleich mit irgend einer anderen bevorzugt oder benachteiligt wird.

Näherungs-Berechnungen mit dem durchschnittlichen Fehler.

In allen bisherigen Formeln treten *Quadrat*-Summen auf, welche für den vorliegenden Zweck auszurechnen sind. Obgleich dieses keine ins Gewicht fallende Arbeit ist, fühlt man doch manchmal bei überschläglichen Berechnungen, kritischen Vergleichen u. s. w. das Bedürfnis, rasch einen mittleren Fehler zu bilden, indem man nur die absolute Summe $[\pm \delta]$ irgend welcher Fehler-Elemente δ benützt. Da wir die hierzu nötigen Theorien bereits früher in Band I, § 91. behandelt haben, bilden wir hier sofort die Anwendungen:

Wenn p einzelne Dreiecke vorliegen und die Summe $[\pm w]$ ihrer ohne Rücksicht auf das Vorzeichen zusammengenommenen Widersprüche, so hat man den mittleren Winkelfehler:

$$m = 1,2533 \frac{[\pm w]}{p \sqrt{3}} \quad (21)$$

Für *Besselsche* Ausgleichung und Winkel-Verbesserungen (1) (2) ... hat man mit absoluter Summierung (1) + (2) + ...:

$$m = 1,2533 \frac{(1) + (2) + (3) + \dots + (n)}{\sqrt{n} r} \quad (22)$$

Wenn man die *Besselschen* Winkel-Korrekturen (1) (2) (3) ... zuvor mittelst Nullpunkts-Korrekturen z auf *Richtungen* reduziert, so hat man damit, wenn n' die Gliederzahl im Zähler ist, den mittleren Winkelfehler:

$$m = 1,2533 \sqrt{2} \frac{(0') + (1') + (2') + \dots}{\sqrt{n'} r} \quad (23)$$

Mittleres Gewicht eines Winkels auf der Station.

Zu einer strengeren Bestimmung des mittleren Winkelfehlers mit Rücksicht auf die Stations-Ausgleichungen gelangt man, wenn man die Gewichts-Coefficienten $[\alpha \alpha]$ $[\alpha \beta]$ u. s. w. dieser Ausgleichungen benützt. Wir thun dieses nach dem Vorgang des „Schweizerischen Dreiecksnetzes, II. Band, Zürich 1885“, S. 38 und des „Märkisch-Thüringischen Netzes des geodätischen Instituts, Berlin 1889“, S. 63—64.

Bezeichnet Fig. 1. eine Station, deren Nullstrahl nicht zum Netze gehört, dann haben die Winkel zwischen den übrigen Strahlen folgende Gewichts-Reciproken:

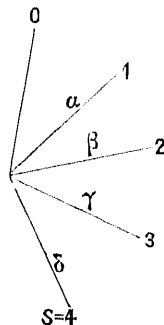
$$\begin{aligned} (1,2) &= [\alpha \alpha] - 2 [\alpha \beta] + [\beta \beta] & (2,3) &= [\beta \beta] - 2 [\beta \gamma] + [\gamma \gamma] \\ (1,3) &= [\alpha \alpha] - 2 [\alpha \gamma] + [\gamma \gamma] & (2,4) &= [\beta \beta] - 2 [\beta \delta] + [\delta \delta] \\ (1,4) &= [\alpha \alpha] - 2 [\alpha \delta] + [\delta \delta] & (2,1) &= [\beta \beta] - 2 [\beta \alpha] + [\alpha \alpha] \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Denkt man sich alle diese Werte angeschrieben und addiert, so findet man mit Rücksicht darauf, dass $[\alpha \beta] = [\beta \alpha]$ u. s. w. ist, allgemein für s Strahlen 1. 2. 3. 4. die Summe:

$$(2s - 2) ([\alpha \alpha] + [\beta \beta] + [\gamma \gamma]) - 4 ([\alpha \beta] + [\alpha \gamma] + [\alpha \delta] + [\beta \gamma] + [\beta \delta] + [\gamma \delta]) \quad (24)$$

$$\text{kürzer bezeichnet} = 2(s - 1) [A A] - 4 [A B] \quad (25)$$

Fig. 1.



Da $s \frac{s-1}{2}$ Winkel zwischen s Strahlen möglich sind, und hierbei jeder Winkel zweimal auftritt, bekommt man den Mittelwert für einen Winkel dieser Station:

$$m^2 = \frac{\mu^2}{s} \left(2 [A A] - 4 \frac{[A B]}{s-1} \right) \quad (26)$$

Dabei ist die Bedeutung der Zeichen $[A A]$ und $[A B]$ durch Vergleichung von (24) und (25) bestimmt, und in (26) ist μ der Gewichtseinheits-Fehler. Denkt man sich diesen Ausdruck (26) auch für die übrigen Stationen berechnet, so bekommt man daraus nach dem Prinzip des arithmetischen Mittels der Fehlerquadrate, den Gesamt-Mittelwert:

$$\frac{m^2}{\mu^2} = 2 \frac{\left([A_1 A_1] - \frac{2}{s_1-1} [A B] \right) + \left([A_2 A_2] - \frac{2}{s_2-1} [A_2 B_2] \right) + \dots}{s_1 + s_2 + \dots} = \frac{1}{P} \quad (27)$$

Diese Formel gilt zunächst für den Fall von Fig. 1., wo der Nullstrahl nicht zum Netz gehört. Wenn der Nullstrahl selbst zum Netz gehört, so gilt die Formel (27) immer noch, jedoch muss dann der Nullstrahl in der Zahl s mitgezählt werden. Man findet dieses, wenn man die ganze Betrachtung für diesen Fall wiederholt.

Der durch (27) bestimmte Wert P ist das gesuchte mittlere Gewicht eines auf der Station ausgeglichenen Winkels.

Um die Bedeutung dieser Formeln deutlich zu machen, nehmen wir von unserem Band I, § 79. die Vierecks-Ausgleichung der Gradmessung in Ostpreussen, und haben von S. 240 oder aus der Tabelle von S. 244 daselbst:

	$[\alpha\alpha], [\beta\beta]$ u. s. w.	$[\alpha\beta], [\alpha\gamma]$ u. s. w.	
Nidden	+ 0,0611	0,0175	$s_1 = 3$
"	+ 0,0764		
Lattenwalde	+ 0,1431	0,0745	$s_2 = 3$
"	+ 0,0805		
Kalleninken	+ 0,1667	0,0833	$s_3 = 3$
"	+ 0,1667	0,1753	
Gilge	+ 0,3333	0.	$s_4 = 1$
	1,0278		10
$\frac{1}{P} = 2 \frac{1,0278 - 0,1753}{10} = 0,17050$			

Als mittleren Gewichtseinheits-Fehler nehmen wir nach (6) S. 247, Band I, den Wert m_2 aus der *Netz*-Ausgleichung, nämlich $\pm 4,88''$, es ist also nun der mittlere Fehler für mittleres Stationsgewicht:

$$m = 4,88 \sqrt{0,1705} = \pm 2,02''.$$

Bei einer grossen Zahl von Stationen und Richtungen wird diese Rechnung wohl meist nahe dasselbe geben, wie eine der früher erwähnten genäherten Mittelbildungen (16), (17) oder der zu (20) gehörigen.

Es sind hier auch die drei Formeln für den Gewichtseinheits-Fehler vorzuführen, welche wir früher in Band I, S. 122—123 und S. 127—130 kennen gelernt haben, nämlich mit kurzen Bezeichnungen:

$$\text{Stationen} \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{[v' v']}{n'}} \quad (28)$$

$$\text{Netz} \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{[v'' v'']}{r}} \quad (29)$$

$$\text{Gesamt-Ausgleichung} \quad \mu = \sqrt{\frac{[v' v'] + [v'' v'']}{n' + r}} \quad (30)$$

Das Verhältnis $\mu_2 : \mu_1$ giebt für eine Triangulierung Aufschluss darüber, ob, und in welchem Mass, die Netz-Ausgleichung Fehler-Einflüsse zu Tage gefördert hat, welche auf den Stationen verborgen blieben.

Die Netz-Ausgleichung ist massgebend, und unser im bisherigen behandelte mittlerer Winkelfehler m bezieht sich nur auf Netz-Ausgleichung. Hat man Genauigkeits-Berechnungen, welche sich bei einer Triangulierung auf μ_1 oder μ beziehen, so kann man sie, wenn alle drei Werte μ_1 , μ_2 , μ bekannt sind, dadurch verhältnismässig auf μ_2 reduzieren.

Mittlerer Fehler des mittleren Fehlers.

Wenn man einen mittleren Fehler irgend welcher Art bestimmt hat, so kann man auch noch die Frage nach der Zuverlässigkeit dieser Bestimmung aufwerfen, denn es ist z. B. ein mittlerer Winkelfehler aus einem Dreieck offenbar viel unsicherer bestimmt, als aus einer grossen Triangulierung mit hunderten von Dreiecken.

Gerade bei solchen mittleren Winkelfehlern der Triangulierungen, wenn Vergleichen und kritische Schlüsse darauf gegründet werden sollen, ist die Frage nach dem mittleren Fehler eines irgend wie bestimmten mittleren Fehlers nicht nebensächlich.

Wir haben diese Frage für *wahre* Beobachtungs-Fehler A bereits früher in Band I, § 93. nach der *Gauss'schen* Abhandlung: „Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen“ behandelt, und dabei meist *wahrscheinliche* Fehler betrachtet. Indem wir nun das Zeichen m für mittlere Fehler in dem Sinne eines Funktions-Zeichens benutzen (vgl. die Anmerkung S. 120), können wir die in Band I, S. 279 stehende Gleichung so schreiben:

$$m(m^2) = \frac{m^2}{\sqrt{n-1}} \sqrt{2} \quad (31)$$

Diese Gleichung bedarf aber insofern einer Berichtigung, als sie für *wahre* Beobachtungs-Fehler A , welche dort angenommen sind, heissen muss:

$$m(m^2) = \frac{m^2}{\sqrt{n}} \sqrt{2} \quad (32)$$

und es ist überall von (4) S. 278, Band I an, $n-1$ durch n zu ersetzen. Wenn *wahre* Fehler A und nicht nur Ausgleichungs-Fehler v vorliegen, so handelt es sich um mittlere Fehler der mittleren Fehler nur insofern, als nicht unendlich viele Werte A , sondern nur eine endliche Zahl n derselben vorhanden ist und in diesem praktisch allerdings kaum auftretenden Falle wahrer Fehler A gilt die Gleichung (32).

Wenn man an die weitere Frage herantritt, wie der mittlere Fehler eines mittleren Fehlers wächst, wenn nicht *wahre* Fehler A , sondern nur gewisse Werte v als übrigbleibende Fehler einer Ausgleichung mit mehr oder weniger Unbekannten vorliegen, so reicht die frühere Theorie von Band I, § 93. nicht aus.

Gauss hat die allgemeinere Aufgabe mit n Unbekannten bei n Beobachtungen in Art. 39. der „Theoria combinationis“ gelöst, und wir wollen hievon hier zunächst den Fall $n = 1$, d. h. das arithmetische Mittel aus n Beobachtungen, nehmen:

Beim arithmetischen Mittel hat man nach Band I, S. 16 und S. 67:

$$m^2 = \frac{[v v]}{n-1} = \frac{[A A] - \frac{[a A]^2}{[a a]}}{n-1}$$

Wenn m als Funktions-Zeichen in dem Sinne der Anmerkung S. 120 genommen wird, so ist:

$$(m(m^2))^2 = \text{Mittelwert von } \left(\frac{[A^2] - \frac{[a A]^2}{[a a]}}{n-1} - m^2 \right)^2 \\ = \left(\frac{1}{n-1} \right)^2 \left([A^2] - \frac{[a A]^2}{[a a]} - (n-1) m^2 \right)^2 \quad (33)$$

Die Klammer giebt:

$$(\dots)^2 = [A^2]^2 + \frac{[a A]^4}{[a a]^2} + (n-1)^2 m^4 - 2 [A^2] \frac{[a A]^2}{[a a]} \\ - 2 [A^2] (n-1) m^2 + 2 \frac{[a A]^2}{[a a]} (n-1) m^2 \quad (34)$$

Hier sind von allen Gliedern die Mittelwerte zu suchen:

$$[A^2]^2 = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \dots)^2 = [A^4] + 2(A_1^2 A_2^2 + A_1^2 A_3^2 + \dots)$$

Nun haben wir nach Band I, S. 277 und S. 271:

$$\frac{[A^4]}{n} = \frac{3}{4} \frac{1}{h^4} = \frac{3}{4} (4 m^4) = 3 m^4$$

$$(A_1^2 A_2^2 + A_1^2 A_3^2 + \dots) \text{ giebt im Mittel } \frac{n-1}{2} m^4$$

$$\text{also } [A^2]^2 = 3 n m^4 + n(n-1) m^4 = (2n + n^2) m^4 \quad (35)$$

Das zweite Glied in (34) giebt:

$$\frac{[a A]^4}{[a a]^2} = \frac{(a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots)^4}{a_1^2 + a_2^2 + \dots} = \frac{(a_1^4 A_1^4 + a_2^4 A_2^4 + \dots) + 6(a_1^2 a_2^2 A_1^2 A_2^2 + \dots)}{a_1^2 + a_2^2 + \dots}$$

$$\text{Mittelwert} = \frac{[a^4] 3 m^4 + 6 [a^2] m^4}{[a^4] + 2 [a^2]} = 3 m^4$$

In ähnlicher Weise bestimmt man auch die übrigen Mittelwerte des Ausdrucks (34) und bekommt dann für denselben:

$$(\dots)^2 = m^4 ((2n + n^2) + 3 + (n-1)^2 - 2(2+n) - 2n(n-1) + 2(n-1)) \\ = m^4 (2n - 2)$$

Dieses ist der Klammer-Ausdruck von (33), man kann also nun nach (33) das Ergebnis bilden:

$$(m(m^2))^2 = \left(\frac{1}{n-1} \right)^2 (2n-2) m^4 = \frac{2}{n-1} m^4$$

$$m(m^2) = \sqrt{\frac{2}{n-1}} m^2$$

Man kann also nun m^2 mit seinem eigenen mittleren Fehler so schreiben:

$$\begin{aligned}
 m^2 &= m^2 \pm \sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad m^2 = m^2 \left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n-1}} \right) \\
 m &= m \sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{2}{n-1}}} = m \left(1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{n-1}} \right) \\
 m &= m \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}} \right) = m \pm m \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}} \quad (36)
 \end{aligned}$$

Dieses gibt den mittleren Fehler des mittleren Fehlers m bei n Beobachtungen für eine Unbekannte, und die Ausdehnung dieser Untersuchung auf mehrere Unbekannte (in dem oben zitierten Art. 39. der „theoria combinationis“), giebt für n Beobachtungen und u Unbekannte:

$$m = m \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2(n-u)}} \right) \quad (37)$$

Dieses lässt sich auch für bedingte Beobachtungen übertragen, z. B. Triangulierung mit r Bedingungs-Gleichungen giebt, weil hier $n - u = r$ ist:

$$m = m \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2r}} \right) \quad (88)$$

Nehmen wir als Beispiel wieder das badische Netz von Band I, § 70.—71., so ist der mittlere Fehler an sich $m = 1,31''$; und da die Ausgleichung $r = 13$ Bedingungs-Gleichungen enthielt, hat man nun:

$$m = 1,31'' \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{26}} \right) = 1,31'' (1 \pm 0,196) = 1,31'' \pm 0,26''$$

d. h. der mittlere Fehler $1,31''$ ist mit einem mittleren Fehler von rund 0,2 oder 20% seines eigenen Wertes bestimmt, oder absolut mit einem mittleren Fehler von $0,26''$.

Genauigkeits-Angaben verschiedener Triangulierungen.

Wir haben zahlreiche Genauigkeits-Angaben von Triangulierungen gesammelt und in Verbindung mit manchen anderen historischen, litterarischen und sonstigen Notizen in Folgenden zusammengestellt. (vgl. hierzu auch die Einleitung S. 12—14.)

Ohne Zweifel ist die Zuverlässigkeit von Genauigkeits-Angaben verschiedener geodätischer Werke, aus denen wir geschöpft haben, eine sehr ungleiche; und welcher Gebrauch zur absoluten Beurteilung von Genauigkeiten oder zur Vergleichung, von den nachstehenden Angaben zu machen ist, müssen wir dem Leser überlassen. —

Unter m ist stets der mittlere Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels, aus Netz-Widersprüchen berechnet, verstanden.

Triangulierung der Niederlande, ausgeführt von Willebrord Snell van Roien (latinisiert Snellius) um 1615.

Zu dem Basisnetze und den Hauptverhältnissen der niederländischen Triangulierung, welche wir bereits in der Einleitung S. 4—5 mitgeteilt haben, ist nun hinzuzufügen, dass inzwischen eine wertvolle historische Abhandlung erschienen ist in der „Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde, onder redactie van J. Boer, Hz. te Utrecht, Jaargang V, 1889, 1e Aflevering“: Overzicht van de graadmetingen in Nederland (met plaat) door Dr. J. D. van der Plaats, und: Graadmeting, Geschiedkundig overzicht door G. B. H. de Balbian. Diese zweite wertvolle Abhandlung haben wir zugleich zu unserem Litteratur-Verzeichnisse, Einleitung S. 16, nachzutragen.

Die britische Landes-Vermessung.

Die schon 1783 unter General Roy begonnene Triangulierung gelangte 1858 zum Abschluss unter James und Clarke.

Es wurde hierüber ein grosses Werk herausgegeben: „*Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland*“ u. s. w. (vgl. Einleitung S. 10).

Die Ausgleichung der Triangulierung ist in 21 Partial-Netze, mit zusammen 202 Punkten, zerlegt worden.

Die Ausgleichung erfolgte nach Richtungen („ord. trig. surv.“ S. 273—277). Der Netz-Ausgleichung ging eine genäherte Stations-Ausgleichung voran, welche wir schon in Band I, S. 228—231 beschrieben haben. An diese Stations-Ausgleichungen schlossen sich genäherte Gewichts-Bestimmungen an („ord. trig. surv.“ S. 66), wobei teils die Abweichungen der einzelnen Richtungs-Beobachtungen von ihrem Mittel, teils die Zahl der Einstellungen, als Genauigkeitsmass dienten. Die Resultate der Stations-Ausgleichungen gingen mit diesen Gewichten wie unmittelbar beobachtete Richtungen in die Netz-Ausgleichungen ein.

Es findet also in jedem einzelnen der 21 Partialnetze Richtungs-Ausgleichung mit ungleichen Gewichten statt, worüber schon in unserem I. Bande, S. 259 einiges bemerkt wurde.

Die Anzahl aller Richtungen ist 1554, es kommen also durchschnittlich 74 Richtungen auf ein Partialnetz.

Als Ganzes behandelt, hätte die Ausgleichung 920 Gleichungen gegeben, während in den Gruppen die Gleichungs-Anzahl zwischen 12 und 64 sich bewegt („ord. trig. surv.“ S. 277). In Bezug auf die gegenseitigen Gruppen-Anschlüsse wird auf S. 272 bis 273 Folgendes berichtet: Nachdem eine Gruppe unabhängig von allen anderen ausgeglichen war, wurden die daraus erhaltenen Korrekturen in den Bedingungs-Gleichungen der nächsten Gruppe substituiert und die Quadratsumme der Fehler in dieser zweiten Gruppe zum Minimum gemacht, in gleicher Weise schloss sich eine zweite Gruppe an, und so fort. Vier der Triangulierungs-Gruppen haben unabhängigen Anfang (oder fünf nach S. 276 und 277, nämlich 1. 6. 7. 12. 14.), ohne fremde Bedingungen, vielmehr wurden Bedingungen aus diesen Anfangs-Gruppen in die anstossenden Gruppen übertragen. Für die Anschlüsse der gemessenen Grundlinien wurden keine Zwangs-Bedingungen eingeführt, denn es kamen niemals 2 Grundlinien in einer Gruppe zusammen. Zwar könnte man durch Basis-Anschlussbedingungen die Fehler-Anhäufung vermindern, allein andernfalls bekommt man in den ungezwungenen Basis-Anschlüssen eine gute Probe für die Theodolit-Arbeit.

Über die Winkel-Genauigkeit sind keine Berechnungen angestellt, doch sind die Dreiecks-Schlüsse sämtlich angegeben; wir haben aus diesen 464 Dreiecks-Schlüssen („ord. trig. surv.“ S. 426—495) folgende Tabelle gebildet, wobei mit n die Anzahl der Dreiecke in jeder Gruppe, mit $[\pm w]$ die absolute Summe der Dreiecks-Widersprüche und mit $[\pm w]$ deren Durchschnittswerte bezeichnet sind.

Gruppe Num.	n	$[\pm w]$	$[\pm w]$ n	Gruppe Num.	n	$[\pm w]$	$[\pm w]$ n
1.	21	34,65''	1,6''	11.	35	116,67''	3,3''
2.	24	94,58	3,9	12.	16	32,49	2,0
3.	14	66,31	4,7	13.	16	69,23	4,3
4.	19	65,68	3,5	14.	22	43,03	2,0
5.	40	104,31	2,6	15.	45	202,14	4,5
6.	14	78,69	5,6	16.	29	63,72	2,2
7.	18	42,70	2,4	17.	19	57,17	3,0
8.	20	39,54	2,0	18.	12	33,35	2,8
9.	21	27,08	1,3	19.	19	45,42	2,4
10.	14	38,77	2,8	20.	19	53,25	2,8
				21.	27	105,79	3,9
Summen von 1. bis 21.				464		1414,57	

Aus allen 464 Dreiecken hat man den mittleren Winkelfehler:

$$m = 1,2533 \frac{1414,57}{464 \sqrt{3}} = \pm 2,21''$$

Von den 6 gemessenen Grundlinien wurden zwei ausgewählt, nämlich die von Lough Foyle und Salisbury Plain, welche mit *Colby's* Kompensations-Stangen gemessen sind (vgl. § 10. S. 73). Die trigonometrische Verbindung zwischen den zwei ausgewählten Grundlinien gab einen Widerspruch von 0,418 Fuss, dessen Verteilung auf eine Masseinheit für die ganze Vermessung führte. Die Differenzen zwischen den wirklich gemessenen Linien und den hierfür trigonometrisch aus jener festgesetzten Einheit abgeleiteten Werten zeigt folgende Tafel („ord. trig. surv.“ S. XIV und S. 422):

	Basis	Basismess-Apparat	Basislänge	trigon. Resultat	Differenz	für 1 ^{km}
Jahr			engl. Fuss	engl. Fuss	engl. Fuss	mm
1791	Hounslow Heath	Stahlkette	27 406,190	27 406,363	+ 0,173	+ 6,3
1794	Salisbury Plain I	Stahlkette	36 576,830	36 577,656	+ 0,826	+ 22,6
1801	Misterton Carr	Stahlkette	26 344,060	26 343,869	— 0,191	— 7,2
1806	Rhuddlan Marsh	Stahlkette	24 516,000	24 517,596	+ 1,596	+ 65,1
1817	Belhelvie	Stahlkette	26 517,530	26 517,770	+ 0,240	+ 9,1
1827	Lough Foyle	Kompens.-Stangen	41 640,887	41 641,103	+ 0,216	+ 5,2
1849	Salisbury Plain II	Kompens.-Stangen	36 577,858	36 577,656	— 0,202	— 5,5
			219 579,355	219 582,013	+ 2,658	

Die Entfernungen der Grundlinien von einander betragen zwischen 62 und 371 englischen Meilen („ord. trig. survey“ S. 424) oder etwa zwischen 100 und 600 Kilometern.

Die Gesamtlänge dieser 7 Grundlinien ist rund 66,9^{km}, also eine Grundlinie im Mittel 9,6^{km}. (vgl. die frühere Zusammenstellung § 18. S. 113.)

Die *Breitengrad-Messung in den Ostsee-Provinzen Russlands*, ausgeführt 1821 bis 1831 von *W. Struve*, enthält 32 in einer einfachen Kette an einander gereihete Dreiecke. Über die Winkel-Genauigkeit giebt *P. G. W. Struve* Auskunft in dem Werke: „Beschreibung der Breitengrad-Messung in den Ostsee-Provinzen Russlands, I. Teil, Dorpat 1831“, S. 137—138 und S. 148—149. Aus Wiederholungen fand sich der wahrscheinliche Fehler eines Dreiecks-Winkels im Jahr 1823 = $\pm 0,425''$ und im Jahr 1824 mit teilweise veränderter Messung = $\pm 0,384''$. Im Mittel hieraus hat man den mittleren Fehler eines Dreiecks-Winkels nach den Vergleichen auf den Stationen:

$$m = \pm 0,60''$$

Für 31 geschlossene Dreiecke ist die Quadratsumme der Widersprüche = 30,60, also der mittlere Fehler eines Winkels aus den Proben im Netz:

$$m = \sqrt{\frac{30,60}{3 \times 31}} = +0,57''$$

Über die Genauigkeit dieser russischen Messungen giebt auch folgende Mitteilung im 10. Band (1833) der „astr. Nachr.“ S. 323—328 Auskunft:

Die Vereinigung der beiden von *Struve* und *Temner* geleiteten Gradmessungen fand in 2 Dreiecken statt. Die durch Einsendung an einen Dritten, nämlich an *Bessel*, in Betreff der gegenseitigen Unabhängigkeit sichergestellten Resultate sind die folgenden:

		Winkel-Vergleichung:				
		<i>Struve</i>		<i>Temner</i>		Differenz
Sestukalns	92° 59'	8,26''	92° 59'	8,19''	—	0,07''
Gaiskalns	53 11	6,66	53 11	5,76	—	0,90
Daborkalns	33 49	46,72	33 49	48,15	+	1,43
Summe	180 0	1,64	180 0	2,10		
soll	180 0	1,46	180 0	1,46		

Winkel-Vergleichung:

	<i>Struve</i>	<i>Tenner</i>	Differenz
Gaisekalkns	18° 29' 18,38"	18° 29' 20,28"	+ 1,90"
Daborkalkns	101 11 56,39	101 11 55,64	— 0,75
Kreuzburg	60 18 44,21	60 18 45,67	+ 1,46
Summe	179 59 58,98	180 0 1,59	
soll	180 0 1,17	180 0 1,17	

Zugleich werden nach den beiderseitigen Triangulierungen die sechs Dreiecks-Seiten mitgeteilt, welche im Mittel um 25 Milliontel abweichen.

Die *dänische Gradmessung* wurde im Jahr 1816 unter Leitung von *Schumacher* begonnen, und bis 1823 von Altona bis Lysabbel auf Alsen fortgesetzt, dann 1837-1848 weiter ausgedehnt, 1850 unter Leitung von *Andrae* vollendet und veröffentlicht in dem Werke: „Den Danske Gradmaaling, udgivet af C. G. Andrae, Geheime Etatsraad og Directeur for Gradmaalingen Kjøbenhavn, I. Band, 1867; II. Band, 1872; III. Band, 1878, IV. Band, 1884“. Hiezu gehört auch:

„Problèmes de haute géodésie, extraits de l'ouvrage danois: „den danske gradmaaling“, 1er cahier: Formation et calcul des triangulations géodésiques, Copenhague 1881; 2er cahier: calcul des latitudes, des longitudes et des azimuts sur le sphéroïde, 1882; 3e cahier: détermination du sphéroïde terrestre etc. 1883.“

Ein Litteratur-Bericht über das Werk: „Den Danske Gradmaaling“ ist von *Helmert* gegeben in der „Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft“, 1877, S. 184 bis 239 und 1878, S. 57—80.

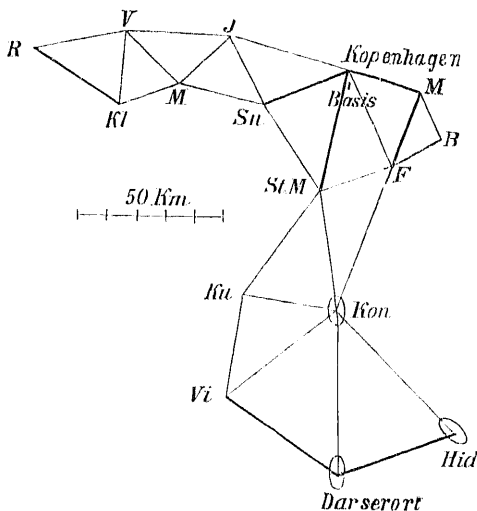
Die dänische Triangulierungs-Berechnung zeichnet sich hauptsächlich durch scharfe Genauigkeits-Untersuchungen aus. Unsere Fig. 1. von S. 389 des ersten Bandes zeigt einen Teil der dänischen Dreiecke, welche auf Grund der Kopenhagener Basis berechnet sind. Die Verbindung der 2701 Meter langen Grundlinie bei Kopenhagen mit der ersten Hauptseite Kopenhagen—Snoldelev wird durch ein Basisnetz von 5 Dreiecken erzielt (welches in Fig. 1. wegen Kleinheit des Massstabes nicht mit aufgenommen ist). Für die 7 Dreiecks-Seiten, welche in Fig. 1. stark gezogen sind, sind die mittleren Fehler berechnet worden, und zwar mit Trennung des Einflusses der Winkelmessungs-Fehler von dem Einfluss des Basisfehlers. Folgende Tabelle (S. 180) giebt hiefür die Fehlerquotienten, ausgedrückt in Millionteilen der Seiten selbst, oder in Millimetern für 1 Kilometer.

Man bemerkt, dass der Einfluss des Basisfehlers neben dem Einfluss der Winkelfehler schon im 5ten Dreieck fast verschwindet.

Für die Punkte Kongshjerg Darserort und Hiddensø wurden auch die *Fehlerellipsen* berechnet, entsprechend der Theorie, welche in unserem I. Bande, § 121.—124. mitgeteilt wurde. Diese *Andraeschen Fehler-Ellipsen* haben den Massstab $s = 1$, entsprechend den Wahrscheinlichkeits-Gesetzen (10) S. 347. Band I.

Indem die Kopenhagener Basis als fehlerfrei angenommen wird, und alle Winkelfehler von der Basis an berücksichtigt werden (*Andrae* Fall II.), hat man a, b, z (s. S. 180).

Fig. 1.
Dänisches Haupttriangulierungs-Netz.
(Massstab 1 : 2 500 000.)



Mittlere Fehler der Seiten s , ausgedrückt in Milliontheil der Länge.

Dreiecks-Seiten s	Anzahl der Dreiecke	Fehler, herrührend von		Mittlerer Gesamt- fehler
		Winkel- messung	Basis- messung	
Grundlinie	.	0,0	1,7	1,7
Kopenhagen-Snoldelev	5	4,4	1,7	4,7
Kopenhagen-St.Møllehøj	6	4,5	1,7	4,8
Kopenhagen-Malmö	8	4,9	1,7	5,2
Malmö-Falsterbo	8	5,0	1,7	5,3
Refsnaes-Kløveshøj	11	6,8	1,7	6,9
Vigerlöse-Darserort	11	7,1	1,7	7,3
Darserort-Hiddensö	12	7,3	1,7	7,5

Die grosse Halbaxe a , die kleine Halbaxe b und das Azimut z der grossen Halbaxe für die erwähnten drei Fehler-Ellipsen sind:

Punkt	a	b	z
Kongsberg	0,56 ^m	0,12 ^m	1°
Darserort	1,06 ^m	0,29 ^m	178°
Hiddensö	1,00 ^m	0,34 ^m	156°

Die Winkelmessungen, welche bei diesen Fehler-Ellipsen benützt wurden, sind sehr genau, z. B. findet man aus den 32 Winkel-Verbesserungen von S. 296 des 1. Bandes der dänischen Gradmessung die Quadratsumme 3,57 mit 7 Bedingungen-Gleichungen, also den mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels:

$$m = \sqrt{\frac{3,57}{7}} = \pm 0,71''$$

Aber die Genauigkeit, welche durch diese Fehler-Ellipsen veranschaulicht wird, ist noch überschätzt, weil der dabei benützte Gewichtseinheits-Fehler (μ nach der Formel (30) S. 173) keine Rücksicht darauf nimmt, dass μ_1 in den Stationen und μ_2 im Netz nicht gleich sind.

Die Werte μ_1 und μ_2 sind (nach einer schon früher von General v. Morawicz in der „Zeitschr. f. Verm. 1877“, S. 393 gegebenen Zusammenstellung) für 5 Ausgleichen der dänischen Gradmessung folgende:

1)	$\mu_1 = \pm 1,00$	$\mu_2 = \pm 1,63$	$\mu_2 : \mu_1 = 1,63$
2)	1,00	1,65	1,65
3)	1,00	3,08	3,08
4)	1,64	2,99	1,82
5)	0,96	1,75	1,82

Der Wert 3) $\mu_2 : \mu_1 = 3,08$ ist durch besondere Umstände bedingt, im übrigen ist im Mittel rund:

$$\mu_2 : \mu_1 = 1,7$$

d. h. nahezu derselbe Wert wie bei der preussischen Landes-Triangulierung (S. 182).

Hannoversche Gradmessung von Gauss. (vgl. Einleitung S. 13—14.)

In Art. 24—25 des „Supplementum theoriae combinationis“ hat Gauss die Richtungs-Ausgleichung eines Fünfecks der Hannoverschen Gradmessung mitgeteilt (ausführlich dargelegt in *Jordan-Steppes*, „deutsches Vermessungswesen, 1882“, I, S. 5—13). Der mittlere Fehler einer als gemessen in die Netz-Ausgleichung eingehenden Richtung ist 0,419'', also der mittlere Winkelfehler:

$$m = 0,419 \sqrt{2} = \pm 0,59''$$

Es ist aber nicht anzunehmen, dass das an solcher Stelle gegebene Ausgleichungs-Beispiel die Genauigkeit der Hannoverschen Gradmessungs-Triangulierung im ganzen darstellt.

An *Bessel* schrieb *Gauss* am 5. November 1823 („Briefwechsel mit *Bessel*“, S. 423 und „*Zeitschr. f. Verm.* 1885“, S. 205): „Ich habe das System meiner Hauptdreiecke in diesen Tagen sorgfältig ausgeglichen . . . Es sind zusammen 26 Dreiecke, worin alle Winkel von mir selbst beobachtet sind. Die grösste Summe der Fehler ist 2,2'', wo bei einer Seite das Pointieren sehr schwierig war; die nächstgrösste ist 1,8''. Keine der 76 vorkommenden Richtungen ist bei der Ausgleichung um eine ganze Sekunde geändert, die grösste Änderung beträgt 0,813''.“

Ferner *Gauss* an *Bohnenberger* am 16. November 1823 („*Zeitschr. f. Verm.* 1882“, S. 431 und „*Zeitschr. f. Verm.* 1885“, S. 205):

„Bei meinen Messungen habe ich gefunden, dass das, was ich in meiner Abhandlung „*theoria combinationis etc.*“ den *mittleren Fehler* nenne, aus mehreren Stationen, gute und weniger gute Messungen durch einander gerechnet, etwa $3,5'' : \sqrt{n}$ ist (n = Anzahl der Repetitionen). Bei sehr fester Aufstellung, sehr günstiger (d. i. nicht zitternder) Luft und ausschliesslich heliotropischen Zielpunkten ist der *mittlere Fehler* aber beträchtlich kleiner. Meine sämtlichen Messungen geben bisher 76 Hauptrichtungen (38 hin und 38 zurück) und aus der Ausgleichung der Fehler fand sich, dass der *mittlere Fehler* einer Hauptrichtung = 0,47'' war.“

Trotzdem scheint die Genauigkeit der Hannoverschen Gradmessung im ganzen doch eine geringere gewesen zu sein, wie *Güde* in der „*Zeitschr. f. Verm.* 1885“, S. 205—206 näher ausführt; und jedenfalls war die spätere Hannoversche *Landesvermessung* noch erheblich weniger genau.

In dem soeben zitierten Briefe von *Gauss* an *Bohnenberger* vom 16. November 1823 („*Zeitschr. f. Verm.* 1882“, S. 430—431) findet sich auch eine prophetische Stelle, welche jetzt, 66 Jahre nachdem sie geschrieben, im schönsten Lichte glänzt:

„Wie schön wäre es, wenn einmal alle über Europa von Schottland bis zum Banat und von Kopenhagen bis Genua und Formentera sich erstreckenden Messungen in ein zusammenhängendes System gebracht werden könnten. Ich möchte gern nach Kräften dazu vorbereiten, allein wenn man über die Mitte seines Lebens hinaus ist, muss man bei einem so ausgedehnten Gegenstande je eher je lieber anfangen.“

Die *kurhessische Triangulierung* wurde von *Gerling*, einem Schüler von *Gauss*, im wissenschaftlichen Anschluss an die Hannoversche Triangulierung ausgeführt.

Gerling hat hierüber in seinen „*Beiträgen zur Geographie Kurhessens*“, Kassel 1839, ausführliche Mitteilungen gemacht; er giebt daselbst auf S. 182 den *mittleren Fehler* einer Richtung (im *Gauss'schen* Sinn) = $\pm 0,88''$.

Ferner wurden im „*General-Bericht der Europ. Gradm. für 1865*“, S. 47 von *Börsch* und *Kaupert* Angaben für den *mittleren Richtungs-Fehler* der kurhessischen Triangulierung gemacht, nämlich für die erste Abteilung 0,95'' und 0,99'', im Mittel 0,97'' und für die zweite Abteilung 1,37''. Unter Voraussetzung, dass die Messungen, für welche *Gerling* im Jahr 1839 den Wert 0,88'' gab, in den Angaben vom Jahr 1865 mit inbegriffen sind, nehmen wir als Gesamteresultat das Mittel aus den Angaben 0,97'' und 1,37'' für die erste und zweite Abteilung, d. h. 1,17'' und damit wird der *mittlere Winkelfehler*:

$$m = 1,17 \sqrt{2} = \pm 1,65''$$

Weiteres über *Gerlings* Ausgleichung s. *Jordan-Steppes* „*deutsches Vermessungswesen*“ I, S. 14—17.

Die *Gradmessung in Ostpreussen* von *Bessel* und *Baeyer* 1838, bildet den Anfang einer neuen Epoche der Triangulierungen und Gradmessungs-Arbeiten. *Bessel* hat hier die Aufgabe gelöst, die Quadratsumme der Änderungen *aller einzelnen* Richtungs-Beobachtungen zu einem Minimum zu machen (vgl. Einleitung S. 14). Auf Genauigkeits-Bestimmungen für die Winkel-Messungen und die daraus abgeleiteten Resultate hat sich jedoch *Bessel* nicht eingelassen.

Die 22 Dreiecks-Widersprüche, welche in den Bedingungs-Gleichungen auf S. 141

bis 148 der „Gr. in O.“ enthalten sind, haben wir bereits gelegentlich in Band I. S. 7 mitgeteilt; dieselben geben die Quadratsumme 30,5, also den mittleren Winkelfehler:

$$m = \sqrt{\frac{30,5}{3.22}} = \pm 0,68''$$

Die *Küstenvermessung von Baeyer 1849*, ist als eine Fortsetzung der Gradmessung in Ostpreussen zu betrachten. Die Messungs- und Berechnungs-Methoden sind im wesentlichen die *Besselschen*.

Man erkennt in der „Küsten-Vermessung“ das peinlichste Bestreben, dem Vorbilde der Gradmessung in Ostpreussen nachzukommen; die Küsten-Vermessung enthält aber mehrere Irrtümer, z. B. die „Berechnung des mittleren Fehlers der Winkelmessung“ § 97. S. 353, u. A. (vgl. *Jordan-Steppes* „das deutsche Vermessungswesen“ I. S. 38–44).

Die Verbindung der preussischen und russischen Dreiecks-Ketten 1857.

Dieses Werk, ebenfalls von General *Baeyer* geleitet, hat denselben Charakter wie die Küsten-Vermessung.

Über diese *Baeyerschen* Triangulierungen haben wir näher berichtet in *Jordan-Steppes* „deutsches Vermessungswesen“ I. S. 38–51 und stellen die dort berechneten mittleren Winkelfehler zusammen:

Küsten-Vermessung	$m = \pm 0,77''$
Verbindung der preuss. u. russ. Dreiecks-Ketten	$m = \pm 0,60''$

Die preussische Landes-Triangulierung.

Als Fortsetzung der Gradmessung in Ostpreussen, der Küsten-Vermessung u. s. w. haben wir von 1867 an die preussische Landes-Triangulierung. Die in jene Zeit fallen den Fortschritte der Ausgleichungs-Theorie haben wir bereits in unserem I. Band § 78. behandelt, und da wir auch im übrigen einen ausführlichen Bericht anderwärts geliefert haben (*Jordan-Steppes* „deutsches Vermessungswesen“ I. S. 59–140), so beschränken wir uns hier darauf, einige charakteristische Zahlen zusammen zu stellen, und zwar zuerst die mittleren Winkelfehler, in soweit sie aus *Netz*-Widersprüchen berechnet sind:

Triangulation 1858, Hauptdreiecke I. Teil, S. 167	$m = \pm 0,63''$
Triangulation 1859, Hauptdreiecke I. Teil, S. 99	0,62
Triangulation 1861 u. 1862, Hauptdreiecke I. Teil, S. 258	0,65
Triangulation 1865, Hauptdreiecke I. Teil, S. 364	0,64
Triangulation 1867, Hauptdreiecke I. Teil, S. 411	0,52
Triangulation in Schleswig-Holstein, II. Teil, S. 224	0,56
Schlesisch-Posensche Kette, II. Teil, S. 571	0,84
Durchschnitt	$m = \pm 0,64''$

Von besonderer Wichtigkeit bei Triangulierungs-Ausgleichungen ist noch das Verhältnis des mittleren Gewichtseinheits-Fehlers μ_1 in der *Stations*-Ausgleichung zu dem mittleren Gewichtseinheits-Fehler μ_2 in der *Netz*-Ausgleichung (vgl. die Formeln (28)–(30) S. 173).

Folgendes sind die wichtigsten Mittelwerte hierfür:

Bezeichnung der Triangulation:	Stations-Ausgleichung μ_1	Netz-Ausgleichung μ_2	μ_2
1859 I S. 99	1,29''	2,06''	1,59
1858 I S. 168	1,32	1,87	1,42
1861–62 I S. 259	1,30	2,21	1,70
1865 I S. 365	1,41	2,15	1,52
1867 I S. 412	1,91	2,01	1,05
Schlesw.-Holst. II S. 225	1,51	1,95	1,29
Mark-Schlesien II S. 438	1,53	2,45	1,60
Schlesien-Posen II S. 572	1,74	3,49	2,00
Durchschnitt	1,50''	2,27''	1,52

In runder Zahl kann man also sagen, dass die Netz-Ausgleichung den mittleren Fehler $1\frac{1}{2}$ fach grösser giebt, als die Stations-Ausgleichungen. Man muss hier- nach auf Fehler schliessen, welche auf den Stationen verborgen bleiben und erst im Netze zu Tage treten. Dieses könnten z. B. je nach Anordnung der Messungen Teil- ungsfehler sein, vielleicht Seiten-Refraktionen in der Atmosphäre, oft aber auch sind Verwerfungen und Wiederholungen u. s. w. auf den Stationen schuld an einem un- günstigen Verhältnisse $\mu_2 : \mu_1$.

Über die neueren Triangulierungen der trigonometrischen Abteilung der Landes- Aufnahme ist von General *Schreiber* eine Mitteilung gemacht in Annex X^b, S. 6—12 der „Verhandlungen der 1887er Konferenz der internationalen Erdmessung“, Berlin 1888 (bereits zum Teil auf S. 135—137 von uns abgedruckt), wovon wir die sehr wertvollen Angaben über Zeitaufwand, Genauigkeit u. s. w. bei dem Wesernetz (vgl. S. 134) hier zitieren:

Zur Bestimmung der 15 Netzpunkte des Wesernetzes sind 4760 Einstellungen (sämtlich nach Heliotropen), und zur Bestimmung der 33 Zwischenpunkte, 3536 Ein- stellungen (davon 3247 nach Heliotropen) gemacht worden.

Hiermit sind beschäftigt gewesen:

im Jahre 1886: eine Sektion 162 Tage,

1887: drei Sektionen bzw. 141, 136 und 74 Tage.

Jede Sektion bestand aus 1 Beobachter, 1 bis 2 Assistenten und 10 bis 15 kommandierten Soldaten.

Gleichzeitig sind von diesem Personal alle einstellbaren Türme je 6mal ange- schnitten und alle Centrier- und Festlegungs-Arbeiten ausgeführt worden.

Wie aus der Karte (S. 134) zu erschen, enthält das eigentliche Netz 60 Be- dingungs-Gleichungen, abgesehen von 16 örtlichen Winkel-Gleichungen auf den An- schluss-Stationen. Es kommen somit durchschnittlich 4 Netz-Bedingungen auf den Punkt. Die Ausgleichung ist übrigens nicht nach Bedingungs-Gleichungen (Korrelaten), sondern nach Elementen, und zwar nach ebenen rechtwinkligen Koordinaten, ausgeführt worden, so dass anstatt eines Systems von 60 nur ein solches von 30 Normal-Glei- chungen (da 15 Punkte zu bestimmen waren) gebildet und aufgelöst zu werden brauchte.

Von den 121 durch die Netz-Ausgleichung bestimmten Richtungs-Verbesserungen sind 6 grösser als 1'', die grösste hat die Richtung Hüttenberg—Deister mit 1,43'' erhalten. Die Richtungs-Verbesserungen liefern übrigens kein zutreffendes Genauig- keitsmass für die Winkel-Bestimmung im Wesernetz, da der ganze Anschluss-Zwang in ihnen enthalten ist. Frei von letzterem sind dagegen die Schlussfehler der 38 Dreiecke und nicht in Dreiecke zerlegten Vier- und Fünfecke, in denen alle Winkel gemessen worden sind. Von diesen Schlussfehlern (die der Vier- und Fünfecke, den

Gewichts-Verhältnissen entsprechend, bzw. mit $\sqrt{\frac{3}{4}}$ und $\sqrt{\frac{3}{5}}$ multipliziert) liegen:

2	zwischen	2,5''	und	2,0''
6	"	2,0''	"	1,0''
30	"	1,0''	"	0,0''

Die Summe ihrer Quadrate ist 27,22, mithin der mittlere Dreiecks Schlussfehler:

$$\sqrt{\frac{27,22}{38}} = 0,85'',$$

woraus sich der mittlere Fehler eines durch Stations-Ausgleichung bestimmten Winkel- wertes gleich $0,85'' \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,49''$ ergibt.

Die Berechnung der Messungen geschieht durchweg, bis zur niedrigsten Ord- nung herab, nach der Methode der kleinsten Quadrate, und zwar unter völligem An- schluss der neu hinzukommenden an die bereits feststehenden Teile, so dass schliesslich ein über das ganze Land ausgedehntes widerspruchsfreies Netz von durchschnittlich 20 Punkten auf 100 Quadrat-Kilometer entsteht. Selbstverständlich kann in den niederen Ordnungen von einer wissenschaftlich strengen Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate nicht die Rede sein; diese dient hier lediglich dem Zweck, auf eine möglichst willkürfreie Art zu widerspruchsfreien und plausiblen Resultaten zu gelangen.

Bei 106 Dreiecken oder	31,3 ‰	ist der Widerspruch zwischen	0,0''	und	0,9''
" 72 "	21,2	" " "	1,0	"	1,9
" 53 "	15,6	" " "	2,0	"	2,9
" 42 "	12,4	" " "	3,0	"	3,9
" 29 "	8,6	" " "	4,0	"	4,9
" 13 "	3,8	" " "	5,0	"	5,9
" 11 "	3,2	" " "	6,0	"	6,9
" 7 "	2,1	" " "	7,0	"	7,9
" 4 "	1,2	" " "	8,0	"	8,9
" 2 "	0,6	" " "	9,0	"	9,9
339	100,0 ‰				

Indem man in der ersten Gruppe den Mittelwert 0,5'' für alle einzelnen Dreiecke annimmt, in der zweiten Gruppe den Mittelwert 1,5'' u. s. w., findet man den mittleren Winkelfehler:

$$m = \pm 1,81''$$

Weiteres hierüber s. *Jordan-Steppes*, „deutsches Vermessungswesen, 1882“, I, S. 195—203.

Schwerdt's Basisnetz.

Im Anschluss an die bayerische Landes-Triangulierung, aber wissenschaftlich unabhängig, wurde die Basismessung und Basisnetz-Triangulierung von *Schwerdt* in Speyer unternommen, die wir schon in Band I, S. 207—216 und S. 356—361 behandelt haben.

Wir fanden dort (S. 211) den mittleren Gewichtseinheits-Fehler = $\pm 4,77''$, woraus der mittlere Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels für mittleres Gewicht in (14) S. 169 berechnet wurde:

$$m = \pm 0,93''$$

Württembergische Triangulierung.

In Württemberg hat schon im vorigen Jahrhundert *Bohnenberger* (1765—1831, vgl. Einleitung S. 13) privatim trigonometrische Messungen und Berechnungen gemacht. Im Schwarzwald mass *Bohnenberger* meist mit einem Sextanten, indem er oft hohe Bäume bestieg, doch gebrauchte er auch zuweilen einen englischen Theodolit. (s. „Allgemeine geograph. Ephemeriden“, 1. Band, 1798, S. 239, Einiges hierüber haben wir in *Jordan-Steppes*, „deutsches Vermessungswesen“ I, 265 angegeben.)

Später, 1816, wurde die amtliche Triangulierung des Königreichs Württemberg unter wissenschaftlicher Leitung von *Bohnenberger* begonnen. Über die hiezu gehörige Basismessung Solitude—Ludwigsburg haben wir schon in § 10. S. 74—75 berichtet. Die Winkelmessungen wurden mit einem 12zölligen *Reichenbach'schen* Repetitions-Theodolit gemacht.

Die württembergische Triangulierung ist zwar für Landesvermessungs-Zwecke bis jetzt genügend gewesen, sie hat aber den Erwartungen nicht entsprochen, welche man an *Bohnenbergers* Namen zu knüpfen berechtigt ist, denn nach *Bohnenbergers* Tode, 1831, trat ein Rückgang ein, infolge dessen auch die Original-Dokumente der Messungen nicht erhalten wurden. („Gen.-Ber. d. Eur. Gr. für 1871“, S. 67.)

Das Wichtigste ist veröffentlicht in dem amtlichen Werk: „Die Landesvermessung des Königreichs Württemberg, in wissenschaftlicher, technischer und geschichtlicher Beziehung auf Befehl der k. Regierung bearbeitet und mit deren Genehmigung herausgegeben, von *Conrad Kohler*, Professor, Trigonometer bei dem k. Katasterbureau, Stuttgart, *J. B. Cotta'scher* Verlag. 1858“.

Weiteres haben wir gesammelt und dargestellt in *Jordan-Steppes* „Deutsches Vermessungswesen I“, S. 252—259, ferner ist eine neuere schätzbare Arbeit zu erwähnen: Über die Genauigkeit des Detail-Dreiecksnetzes in Württemberg, von Vermessungs-Kommissär *Trigonometer Steiff*, „Zeitschr. f. Verm. 1886“, S. 177—197.

Die badische Landes-Triangulierung

wurde etwa im Jahr 1816 begonnen, unter Leitung von Oberst *Tulla*, von welchem ein heute noch in Baden gebräuchliches graphisches Ausgleichungs-Verfahren herrührt, das wir in Band II, § 84. beschrieben haben. Im Jahr 1823 wurden mehrere Münchener Repetitions-Theodolite angeschafft (vgl. Band II, S. 143), mit welchen von da an alle Messungen gemacht sind. Nachdem die Mängel einer ebenen Triangulierungs-Berechnung, welche zuerst ausgeführt worden war, erkannt waren, wurden von 1841—1846 die Winkel grossenteils neu gemessen, und eine neue (sphärische) Triangulierungs-Berechnung mit Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate unternommen. Zugleich wurde im Jahr 1846 eine badische Basis bei Heitersheim gemessen (Fig. 4. S. 116), nachdem von 1820 an die bayerische Basis Speyer—Oggersheim benützt worden war. Der offizielle Dirigent der Vermessung war, als *Tullas* Nachfolger, Oberst *Klose*; der wissenschaftliche Teil der Vermessung ist aber die Arbeit von Obergeometer *Rheiner*. (vgl. „Badische Biographien von *Weech*“, Artikel *Tulla* und *Klose*.)

Das Hauptgerippe der badischen Triangulierung besteht aus einer langen Kette längs des Rheinthals, welche die badische Basis bei Heitersheim mit der Speyerer Basis verbindet und den Basis-Anschluss in die Ausgleichung aufnimmt, sowie auch zwei Azimute, mit welchen die zwei Grundlinien orientiert sind.

An dieses Hauptgerippe schliessen sich zahlreiche Partial-Netze an.

Die Netz-Ausgleichungen sind auf *Winkel* gegründet. Die Horizontproben wurden mit in das Netz gezogen. Das pfälzische Netz, das wir in unserem I. Bande § 70. bis §. 71. behandelt haben, und das kleine Beispiel von Band I. § 74. bringen das badische Winkel-Material zur Anschauung. Die amtliche badische Ausgleichung wurde jedoch viel schwerfälliger gemacht, wie wir in *Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen I.“ S. 276 angegeben haben. Mittlere Winkel-Fehler wurden in der letzten Zeit (etwa 1850) nach der *Bayerschen* Formel S. 353 der „Küsten-Vermessung“ berechnet.

Im Ganzen kann man den mittleren Winkelfehler der badischen Triangulierung annehmen:

$$m = \pm 0,75''$$

Dieses ist im Einzelnen gezeigt in *Jordan-Steppes* „Deutsches Vermessungswesen 1882“, S. 277, worauf wir hier verweisen, sowie auf eine 1873 aus Veranlassung der „Europ. Gradmessung“ ausgearbeitete autographisch vervielfältigte Denkschrift: „Triangulierung des Grossherzogthums Baden, in der Zeit von 1823—1852 ausgeführt von Oberst *Klose* und Obergeometer *Rheiner*, im Auftrage des Gr. Ministeriums des Innern, auf Grund der Akten des Gr. Kataster-Bureaus beschrieben und durch Revisions-Berechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate erläutert von *W. Jordan*, Professor der Goodäsie am Gr. Polytechnikum. Karlsruhe, Februar 1873.“ 68 S. 40 und 5 Tafeln. Auch ein Abschnitt in *Sydows* Berichten über den „kartographischen Standpunkt Europas“ in *Petermanns* geogr. Mittheilungen, 1861, S. 468—470 ist auf amtliches Material gegründet.

Die badische Triangulierung ist in Hinsicht auf Messungs-Genauigkeit und Punkt-Festlegung, und Aufbewahrung der Original-Messungen die beste der drei süd-deutschen Vermessungen. —

Über die

Hessen-Darmstädtische Triangulierung

berichtet *Eckhardt* im 12. Band, 1834, der „Astr. Nachr.“ S. 129, dass der mittlere Fehler des einzelnen Winkels = $2,365''$ sei, wobei aber die Horizont-Abschlüsse (gyrus horizontalis) als Bedingungs-Gleichungen in die Netz-Ausgleichung eingeführt wurden. Das hessische Netz hat meist die Anordnung von nahezu gleichseitigen Dreiecken, so dass die Anzahl der Horizont-Abschlüsse etwa gleich $\frac{1}{3}$ der Anzahl der Winkel ist, wir nehmen deswegen schätzungsweise nach (7) § 169:

$$m = 2,365'' \sqrt{\frac{5}{6}} = 2,12''$$

Von der hessischen Triangulierung giebt auch *Fischer* in seinem „Lehrbuch der höheren Geodäsie, dritter Abschnitt, Giessen 1846“, S. 93–105 ein Ausgleichungs-Beispiel. Es ist ein Netz mit 5 Seiten-Gleichungen, 14 Dreiecks-Gleichungen und 5 Horizont-Gleichungen, zusammen 24 Netz-Bedingungsgleichungen. Die Quadratsumme der 45 Winkel-Korrekturen in Centesimal-Sekunden, welche einzeln angegeben sind, ist = 373,2, also der mittlere Fehler eines gemessenen Winkels = $\sqrt{\frac{373,2}{24}} = 3,94$ und näherungsweise mittlerer Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels, weil Horizont-Gleichungen benützt sind; nach (7) S. 169:

$$m = 3,94 \sqrt{\frac{40}{45}} = \pm 3,71$$

Dieses sind Centesimal-Sekunden, also in Sexagesimal Sekunden:

$$m = 0,324 \times 3,71 = \pm 1,20''$$

In Hessen war bei der Ausgleichung der Triangulierung ein eigentümliches, von *Schleiermacher* herrührendes, Eliminations-Verfahren im Gebrauch, über welches wir verweisen auf *Helmert* in *Schlömilch's* „Zeitschr. f. M. u. Ph. 1869“, S. 201–205; ferner *Nell*, „Zeitschr. f. Verm. 1881“, S. 1–11 und S. 109–121, und *Jordan-Steppes* „Deutsches Vermessungswesen I“, S. 286.

1853–1863 Nassauische Landes-Triangulierung.

Aus den Schlussfehlern der 15 Hauptdreiecke berechnet man: $m = \pm 0,78''$
(Weiteres s. „Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 313–322.)

Mecklenburgische Landes-Vermessung.

Von 1853–1873 wurde eine Triangulierung ohne eigene Basismessung im Anschluss an die Nachbarstaaten unternommen, und 1882 veröffentlicht in einem amtlichen Werke: „Grossherzogth. Mecklenb. Landes-Vermessung, ausgeführt unter wissenschaftlicher Leitung von *P. Paschen*, herausgegeben (nach *Paschens* Tode) von *Köhler*, *Brubius* und *Foerster*, Schwerin 1882. I. Teil: Die trigonometrische Vermessung; II. Teil: Das Coordinaten-Verzeichnis (hiez u. noch III. Teil: Die astronomischen Bestimmungen, und IV. Teil: Die geometrischen Nivellements)*. Litteratur-Bericht hierüber mit Dreiecks-Netz in 1:2 000 000 s. „Zeitschr. f. Verm. 1883“, S. 355 bis 367. Aus 57 Dreiecks-Schlüssen berechnet man den mittleren Winkelfehler:

$$m = \pm 1,15''$$

In Österreich (vgl. Einleitung S. 13)

werden etwa seit 1860 umfassende trigonometrische Arbeiten ersten Rangs durch das k. k. militär-geographische Institut ausgeführt, wie die 4 bis jetzt erschienenen Bände „Die astronomisch-geodätischen Arbeiten des k. k. militär-geographischen Instituts in Wien“, I. Band 1871, II. Band 1873, III. Band 1875, zeigen. Eine Basismessung in Dalmatien haben wir bereits auf S. 165 erwähnt. Die Triangulierungs-Methode ist in Bezug auf Messung und Ausgleichung die *Besselsche*. Auf S. 186 des I. Bandes wird angegeben, dass für ein Netz mit 64 Bedingungs-Gleichungen die absolute Summe der 133 Richtungs-Korrekturen = 45,10 ist, man hat daher den mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels nach (23) S. 171:

$$m = 1,2533 \sqrt{2 \frac{45,10}{133,64}} = \pm 0,87''$$

Ähnliche Berechnungen kann man auch anstellen nach den Angaben von Band II, S. 162, Band III, S. 241 der zitierten österreichischen Veröffentlichungen.

Schweizer Triangulierungen (vgl. Einleitung S. 13).

Über die ältesten Vermessungen seit 1550 bis zur Neuzeit berichtet das Werk: „Geschichte der Vermessungen in der Schweiz von *Rudolf Wolf*, Zürich 1879“. (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1880“, S. 367–370). Aus der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts stammt eine Triangulierung von *Eschmann*, für welche man aus 69 geschlossenen Dreiecken den mittleren Winkelfehler findet:

$$m = \pm 3,24''$$

Mit dem Eintritte der Schweiz in die internationale Erdmessung wurde eine neue Triangulierung unternommen, welche veröffentlicht ist in dem Werke: „Das schweizerische Dreiecks-Netz“, herausgegeben von der schweizerischen geodätischen Kommission. I. Band: Die Winkelmessungen und Stations-Ausgleichungen, Zürich 1881 (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 456–457) und II. Band: „Die Netz-Ausgleichung“ (bearbeitet von *Koppe*), Zürich 1884. Auf S. 39 dieses Bandes ist angegeben der mittlere Fehler einer auf der Station ausgeglichenen Richtung nach den Angaben der Netz-Ausgleichung $= \pm 0,90''$, also der mittlere entsprechende Winkelfehler:

$$m = 0,90 \sqrt{2} = \pm 1,27''$$

Ferner sind auf S. 36–37 die mittleren Gewichtseinheits-Fehler aus der Stations-Ausgleichung $\mu_1 = \pm 1,33''$ und aus der Netz-Ausgleichung $\mu_2 = \pm 1,64''$ angegeben, es ist also das Verhältnis:

$$\mu_2 : \mu_1 = 1,24$$

Zum Schluss unserer vorstehenden Einzel-Angaben haben wir noch die Triangulierungs-Berichte der internationalen Erdmessung zu erwähnen:

„Rapport sur les triangulations par *A. Ferrero*, als Annex II des General-Berichtes für 1883“, und:

„Comptes rendus de la session de la commission permanente à Nice 1887. Supplément, Rapport sur les triangulations par le Général *A. Ferrero*.“

Diese Berichte enthalten alle Haupt-Triangulierungspunkte mit Breiten und Längen (auf 1'' abgerundet) und Triangulierungs-Karten von Europa in 1 : 10 000 000 und 1 : 8 000 000.

Der zweite Bericht hat auch teilweise historische Einleitungen zu den Triangulierungen.

Anmerkung zu § 25. — § 27.

Fehler-Quotienten für Dreiecks-Seiten. Die Fehler von Dreiecks-Seiten oder auch von anderen geodätischen Linien, werden häufig in Quotienten-Form angegeben, auch wenn der Fehler-Quotient an sich noch nicht massgebend für die Güte der Messungen ist.

Wenn s eine Seitenlänge, und Δs deren Fehler ist, so nennt man häufig den Quotienten $\frac{\Delta s}{s}$ den *relativen Fehler* von s , den man entweder als Reciproke 1 : ... oder besser als Dezimalbruch angiebt. Wenn z. B. $s = 300\,000^m$ und $\Delta s = 1,5^m$ ist, so hat man:

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{1,5}{300\,000} = \frac{1}{200\,000} = 5 \text{ Milliontel oder } = 5 \text{ Millimeter für 1 Kilometer.}$$

In der logarithmischen Rechnung zählt man gewöhnlich in Einheiten der 7. Stelle:

$$\log(1 \pm 0,000\,005) = \pm 0,000\,00217$$

$$\text{kürzer geschrieben } = \pm 217$$

Die Beziehung zwischen logarithmischen Fehlern und Seiten-Fehlern ist:

$$\Delta \log s = 0,43429 \frac{\Delta s}{s}$$

wobei 0,43429 der logarithmische Modul ist. Hiernach haben wir zur Übersicht Folgendes zusammengestellt:

Milliontel oder Millimeter auf 1 Kilometer	$\frac{As}{s} = 1:n$		$\log \left(1 + \frac{As}{s} \right)$
1	0,000 001	1: 1000 000	0,000 00043
2	0,000 002	1: 500 000	87
3	0,000 003	1: 333 333	13.0
4	0,000 004	1: 250 000	17.4
5	0,000 005	1: 200 000	21.7
6	0,000 006	1: 166 667	0,000 00261
7	0,000 007	1: 142 857	30.4
8	0,000 008	1: 125 000	34.7
9	0,000 009	1: 111 111	39.1
10	0,000 010	1: 100 000	43.4

§ 28. Schluss-Betrachtungen über Haupt-Triangulierung.

Die neueren Basis-Messungen sind technisch so fein behandelt, dass der mittlere unregelmässige Messungs-Fehler nicht mehr als etwa 1 Millimeter für 1 Kilometer beträgt. Dieses geht aus den auf S. 163—165 gesammelten mittleren Fehlern deutlich hervor, denn wir haben für den mittleren Fehler einer Messung von 1 Kilometer, in runden Durchschnitts-Zahlen:

S. 163	für <i>Bessels</i> Apparat	$m = \pm 1,3^{mm}$
S. 164	„ den neuen spanischen Apparat	0,9 ^{mm}
S. 164	„ „ nordamerikanischen „	1,0 ^{mm}
Durchschnitt		$m = \pm 1,1^{mm}$

Für Doppelmessung vermindert sich dieses noch auf $1,1 : \sqrt{2} = 0,8^{mm}$ für 1^{km} , indessen wollen wir den runden Wert $m = \pm 1^{mm}$ für 1^{km} als unregelmässigen von der Messung selbst herrührenden Fehler einer neueren Basis nun annehmen.

Ganz anders, nämlich ungünstiger, steht es mit den *regelmässigen*, namentlich den metronomischen Fehlern der Basis-Messungen.

Wir haben auf S. 83 berichtet, dass bei der *Besselschen* Basis-Messung bei Königsberg, 1834, der Hauptfehler, nämlich die Vergleichung mit einem von anderwärts gegebenen Normalmass, nur = 0,6 Milliontel der Länge gefunden wurde, und ähnliche kleine Werte wurden auch später mit dem *Besselschen* Apparate gefunden (wie wir z. B. in *Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen“, I, S. 132—133 zusammengestellt haben); indessen sind wahrscheinlich jene älteren Vergleichungen in Bezug auf Genauigkeit überschätzt, wie auf S. 106 berichtet wurde, indem später mit dem *Besselschen* Apparate Unsicherheiten bis zu 0,02^{mm} auf eine Stange von 4^m, d. h. 5 Milliontel der Länge, gefunden wurden.

Die beiden betrachteten Fehlerteile, nämlich m = mittlerer unregelmässiger Fehler und m' = mittlerer regelmässiger Fehler, setzen sich in bekannter Weise zum Gesamtfehler M für die Länge L zusammen, nach der Gleichung:

$$M = \sqrt{(m \sqrt{L})^2 + (m' L)^2} = \sqrt{m^2 L + m'^2 L^2} \quad (1)$$

Nehmen wir nach dem bisherigen $m = 1^{mm}$ für $L = 1^{km}$ und als Minimum m' ebenfalls $= 1^{mm}$ für $L = 1^{km}$, so wird:

$$M = \sqrt{L + L^2}$$

Zur Übersicht ist hernach folgendes berechnet:

Gemessene Basis- Länge L	Mittlerer unregelm. Fehler $m \sqrt{L}$	Mittlerer regelmäss. Fehler $m' L$	Mittlerer Gesamt- Fehler M	Verhältnis $\frac{M}{L}$
1 ^{km}	$\pm 1,00^{mm}$	$\pm 1,00^{mm}$	$\pm 1,41^{mm}$	1,41
2 ^{km}	1,41 ^{mm}	2,00 ^{mm}	2,24 ^{mm}	1,12
5 ^{km}	2,24 ^{mm}	5,00 ^{mm}	5,48 ^{mm}	1,10
10 ^{km}	3,16 ^{mm}	10,00 ^{mm}	10,49 ^{mm}	1,05

Hieraus ist zu sehen, dass bei grösseren Längen neben den systematischen Fehlern m' , die unregelmässigen Messungs-Fehler m fast verschwindend sind; dieses ist noch viel mehr der Fall, als die vorstehende Tabelle zeigt, weil wir hier nur $m' = 1$ Milliontel angenommen haben, während es in Wirklichkeit das 5—10fache hiervon tragen kann.

Durch solche Überlegungen wird der Fingerzeig gegeben, dass die Technik auf einem falschen Wege war, als sie Apparate, wie den älteren *Brunnerschen* und ähnliche schuf (vgl. S. 93 und S. 99).

Die Messungs-Geschwindigkeiten sind nach der Zusammenstellung S. 165—167 sehr verschieden; die äussersten Werte scheinen zu sein:

Älterer <i>Brunnerscher</i> Apparat	$v = 30$ Meter in 1 Stunde
<i>Bessels</i> Apparat, Landes-Aufnahme bei Meppen	$v = 300$ " " " "

Die Hauptsache der Basis-Messung, nämlich der metronomische Teil, liegt nun in den Händen des internationalen Mass- und Gewichts-Bureaus (vgl. S. 57—59 und S. 64), und in dieser Beziehung werden ohne Zweifel die nächsten Basis-Messungen sich wesentlich von den früheren unterscheiden.

Die mittleren Basis-Fehler betragen nach den vorstehenden Untersuchungen mindestens 1—2 Milliontel, können aber bei metronomischen Unsicherheiten und konstanten Fehler-Einflüssen (Keildruck u. s. w.), welche namentlich in früherer Zeit vorkamen, auch auf das 5—10fache, d. h. auf etwa 10 Milliontel steigen, und solche Fehler pflanzen sich in Triangulierungen unmittelbar nach dem Verhältnis der Längen fort.

Nachdem dieses erkannt ist, haben wir zu überlegen, welche Fehler durch die Triangulierung selbst, d. h. durch die Winkelmessung, entstehen und wie sich diese Fehler fortpflanzen.

Betrachten wir hierzu zuerst den mittleren Winkel-Fehler, so haben wir für neuere gute Triangulierungen nach S. 180—184 in runden Zahlen etwa Folgendes:

S. 180	Dänische Gradmessung	$m = \pm 0,71''$
S. 182	Preussische Landes-Aufnahme	0,64
S. 184	" geodätisches Institut	0,74

Durchschnitt $m = 0,71''$

Unter solche Beträge scheint der mittlere Fehler eines Winkels in diesem Sinne

(auf der Station ausgeglichen, aus Netz-Widersprüchen berechnet) sich zur Zeit noch nicht erheblich herunterbringen zu lassen; doch ist dieses auch nicht dringlich, denn mit dieser Genauigkeit lassen sich die vorhandenen Bedürfnisse befriedigen, und wenn bei Triangulierungen grosse Fehler auftreten, so werden die Gründe oft anderswo zu suchen sein, als in der nackten Winkel-Messung.

Nun fragt es sich weiter, wie die Winkel-Fehler in Dreiecks-Ketten oder Netzen die Schluss-Ergebnisse beeinflussen.

Die nötigsten Theorien hiezu haben wir bereits in § 19. und 20. (S. 119—132) entwickelt, und wir haben z. B. auf S. 131 gefunden, dass eine *einfache* Kette gleichseitiger Dreiecke, deren Längs-Erstreckung das 10fache ($v = 10$) einer Dreiecks-Seite hat, mit einem mittleren Fehler von $1,62 \sqrt{10}$ Millionteln $= 5$ Millionteln trianguliert werden kann. Dabei ist der mittlere Winkel-Fehler zunächst rund $= 1''$ angenommen, und da derselbe in Wirklichkeit kleiner, nämlich nach dem obigen etwa $= \pm 0,7''$ gemacht werden kann, auch Ketten mit Seiten-Gleichungen und sonstigen Verstärkungen noch günstiger werden können, braucht obiger Wert von 5 Millionteln nur als obere Grenze solcher Fehler-Fortpflanzung angenommen zu werden. *)

Ausser solchen theoretischen Untersuchungen der Fehler-Fortpflanzung in Dreiecks-Ketten haben wir aber auch noch einen guten Anhaltspunkt zur Genauigkeits-Beurteilung, in den mannigfachen formell streng nach der M. d. kl. Q. berechneten mittleren Fehlern von Dreiecks-Seiten und Polar-Coordinationen, welche in den früheren Bänden der Triangulierung der preussischen Landes-Aufnahme veröffentlicht sind.

Wir haben dieselben gesammelt in „*Jordan-Steppes* Deutsches Vermessungswesen“ I, S. 138—139 und entnehmen von dort Folgendes:

Mittlere Fehler von Polar-Coordinationen.

Citat.	Polar-Coordinate.	Entfernung <i>D</i>	Mittl. Fehler von <i>D</i> in Einheiten der 7ten Log.- Dezimale	Mittl. Fehler der Azimut- Über- tragung
Preuss. Landes-Triangulierung.				
Triangulation 1858 I S. 181-185	Pillakerberg-Algeberg	125 ^{km}	± 15.3	$\pm 0,63''$
„ 1859 I S. 114-118	Sommerfeld-Pillakerberg	135	9.2	0,68
„ 1861-62 I S. 274-280	Lantern-Mahren	125	9.0	0,55
„ 1865 I S. 377-381	Klorberg-Culm	180	8.2	0,68
„ 1867 I S. 416-418	Kistowo-Krummenfließ	100	5.7	0,33
Durchschnitt:		133 ^{km}	± 9.5	$\pm 0,57''$

Wegen des Verhältnisses $\mu_2 : \mu$ nach (29) und (30) S. 173, welches für die preussische Landes-Triangulierung im Mittel $\mu_2 : \mu = 1,5$ ist, hat man diese Durchschnitts-Werte noch zu vergrössern, so dass man hat:

$$A \log D = \pm 14.2 \quad A \alpha = \pm 0,85''$$

Statt $A \log D$ in Einheiten der 7ten Logarithmen-Dezimale kann man auch den mittleren Entfernungs-Fehler AD selbst, oder das Verhältnis $AD : D$ angeben,

*) Hiezu ist auch eine nach dem Druck unseres § 20. erschienenen Veröffentlichung des geodätischen Instituts anzuführen: „Gewichts-Bestimmungen für Seiten-Verhältnisse in schematischen Dreiecks-Netzen“, von Dr. Paul Simon. Berlin 1889.

denn es ist nach den Bemerkungen am Schlusse von § 27. S. 188—189, für $\Delta \log \Delta = 14.2$, der Fehler-Quotient:

$$\frac{\Delta D}{D} = 0,000\ 0033 = 3,3 \text{ Milliontel oder } 3,3^{mm} \text{ für } 1^{km}.$$

Dieses gilt zunächst für mittlere Entfernungen von 133^{km} und ist auf andere Entfernungen nach dem Quadratwurzel-Gesetz von S. 131 zu übertragen.

(Über erfahrungsmässige Genauigkeit von Dreiecks-Seiten selbst, welche durch die Ketten der Landes-Aufnahme trigonometrisch übertragen wurden, vgl. „Jordan-Steppes, Deutsches Vermessungswesen“ I, S. 138.)

Vergleichung zwischen Basis-Fehlern und Triangulierungs-Fehlern.

Nach all diesen, auf die Erfahrungen der letzten Jahrzehnte bei unseren besten Triangulierungen gegründeten Überlegungen können wir zu der sehr wichtigen Vergleichung zwischen Basis-Fehlern und Triangulierungs-Fehlern übergehen.

Wenn eine Triangulierungs-Kette (wie z. B. auf S. 134) zwei gleichartig gemessene Grundlinien in der Entfernung von $200\text{--}300^{km}$ verbindet, so kann bei den besten neueren Genauigkeits-Verhältnissen die Anschluss-Differenz wohl etwa 10 Milliontel ausmachen, wozu die Triangulierung selbst den Hauptteil beitragen wird. Wenn jedoch die beiden Grundlinien nicht mit demselben Apparat, oder überhaupt nicht metronomisch gleichartig gemessen sind, so können aus den Basis-Messungen selbst Anschluss-Fehler hervorgehen, welche den Triangulierungs-Fehlern gleichkommen und dieselben sogar übertreffen.

Dieses ist ein Ergebnis, welches auf den ersten Blick überraschend ist, welches aber auf die unzweifelhaften Erfahrungen gegründet ist.

Astronomisch-geodätische Netze.

Aus dem früheren Beispiele von S. 134 haben wir die rein trigonometrische Anordnung und Ausgleichung der Ketten und Netze der preussischen Triangulierungen kennen gelernt. Die ersten Ketten werden zuerst selbständig angelegt und für sich ausgeglichen. Gelangen mehrere Ketten zum Polygonschluss, so muss die Schlusskette nicht nur ihre eigenen Fehler, sondern auch den Anschluss-Zwang zur Ausgleichung bringen, und ähnlich verhält es sich mit dem Füllnetze zwischen den Umfangs-Ketten.

Dieses Verfahren rührt davon her, dass man wegen des allmählichen Fortschrittes der Arbeit (in diesem Sinne etwa seit 1865) und wegen der praktischen Bedürfnisse der Kleinvermessungen, nicht warten konnte, bis das Ganze fertig ist und zusammen ausgeglichen werden kann.

Die astronomische Orientierung der ganzen preussischen Landes-Triangulierung beruht seit 1865 auf dem einen Punkte Raunberg bei Berlin mit einem Azimute nach dem Marienurm in Berlin.

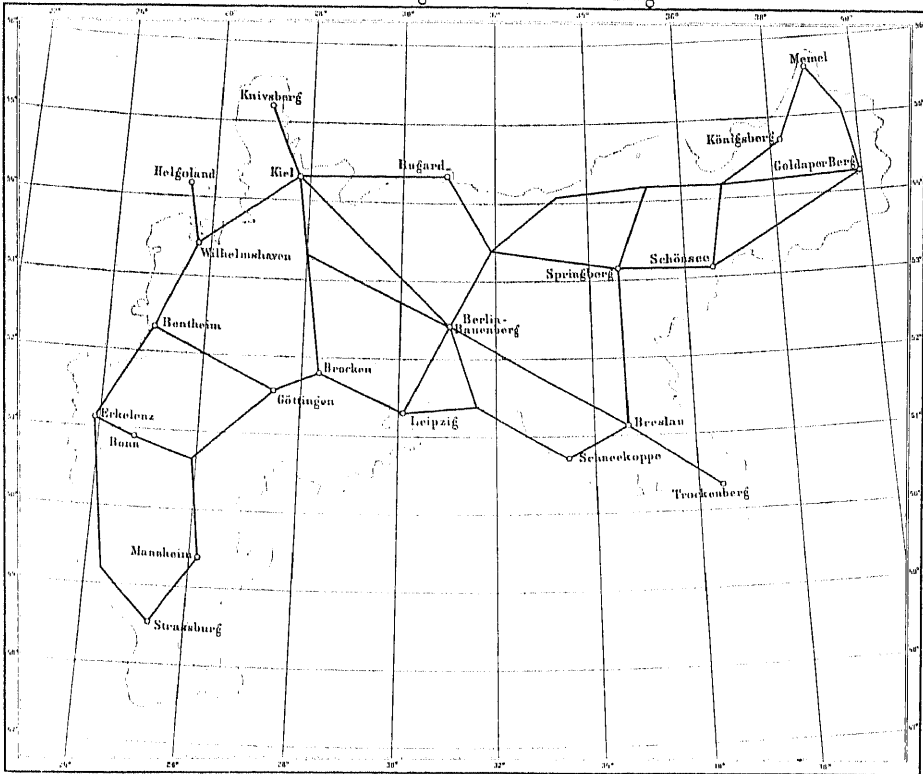
Die so gewonnenen Coordinaten der Landes-Aufnahme werden wohl noch Jahrzehnte lang die Grundlagen aller praktischen Vermessungen bilden.

Inzwischen wird in Preussen bereits mit einer neuen Ausgleichung geodätischer Dreiecks-Ketten mit Zuziehung zahlreicher astronomischer Messungen begonnen, wie aus dem nachstehenden Übersichts-Netze zu erschen ist, welches dem „allgemeinen

Arbeitsplane des geodätischen Institutes für das nächste Decennium“, Berlin 1886, entnommen ist. (Abgedruckt in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1886, S. 497—506.)

Fig. 1.

Astronomisch-geodäetisches Netz I Ordnung.



Maasstab 1:10 800 000.

Die Verbindung *astronomischer* und *geodätischer* Messungen kann nur teilweise zur Versicherung und Verfeinerung von Triangulierungs-Netzen dienen. Z. B. einzelne astronomisch gemessene Breiten, Längen oder Azimute, tragen zur geodätischen Punkt-Bestimmung wenig bei, weil z. B. ein Breiten-Fehler von $0,1''$ bereits 3 Meter auf der Erd-Oberfläche ausmacht, und dazu kommt noch die *Lot-Abweichung*, welche meist mehrere Sekunden beträgt.

Anders verhält es sich mit der Verbindung astronomisch gemessener Längen und Azimute. Wenn nämlich an den beiden Endpunkten einer Dreiecks-Kette, bzw. der daraus abgeleiteten geodätischen Linie, die beiden Azimute α_1 und α_2 und zugleich der Längen-Unterschied λ astronomisch gemessen sind, so besteht eine von den Lot-Abweichungen und von den Erd-Dimensionen nahezu *unabhängige* Gleichung (nach *Laplace*, im wesentlichen $\alpha_1 - \alpha_2 = \lambda \sin \varphi$ für die Mittelbreite φ).

Soweit diese Theorien in den Rahmen unseres Buches gehören, werden wir dieselben später behandeln.

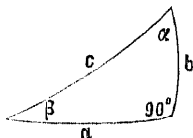
Kapitel II.*)

Mathematische Hilfsmittel der geodätischen Entwicklungen.

§ 29. Sphärische Trigonometrie.

I. Rechtwinkliges sphärisches Dreieck.

Fig. 1.
Rechtwinkliges sphärisches Dreieck.



Wir nehmen nach Andeutung von Fig. 1. die Bezeichnungen an:

Hypotenuse = c Gegenwinkel = 90°

Kathete = a Gegenwinkel = α

Kathete = b Gegenwinkel = β

Hiemit hat man folgende Gleichungen:

$$\cos c = \cos a \cos b \quad (1)$$

$$\cos c = \cotg \alpha \cotg \beta \quad (2)$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \quad \text{und} \quad \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c} \quad (3)$$

$$\cos \alpha = \frac{\tan b}{\tan c} \quad \text{und} \quad \cos \beta = \frac{\tan a}{\tan c} \quad (4)$$

$$\tan \alpha = \frac{\tan a}{\sin b} \quad \text{und} \quad \tan \beta = \frac{\tan b}{\sin a} \quad (5)$$

$$\cos \alpha = \sin \beta \cos a \quad \text{und} \quad \cos \beta = \sin \alpha \cos b \quad (6)$$

In dieser Gestalt prägen sich diese Gleichungen leicht dem Gedächtnis ein, wenn man die Analogieen mit den Formeln der ebenen Trigonometrie im Auge behält.

Z. B. würde man für ein ebenes rechtwinkliges Dreieck, entsprechend Fig. 1., schreiben:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \tan \alpha = \frac{a}{b}$$

und nun braucht man nur noch auswendig zu wissen, dass sinus im Zähler sinus und im Nenner sinus, sowie tangens entsprechend tangens und sinus hat, endlich dass cos im Zähler und im Nenner beidemale tang hat, um die Formeln (3) (4) (5) immer aus dem Gedächtnis anschreiben zu können.

Ferner merke man sich, dass die Formel (1) dem pythagoräischen Satze der Ebene, d. h. $c^2 = a^2 + b^2$ entspricht, und dass die beiden Beziehungen (2) und (6) der Beziehung in der Ebene $\alpha + \beta = 90^\circ$ entsprechen.

Ausserdem hat man die *Nepersche Regel*: Wenn man die Stücke $\alpha, c, \beta, 90^\circ - a, 90^\circ - b, \alpha \dots$ in cyklischer Aufeinanderfolge betrachtet, so ist der Cosinus irgend eines Stückes gleich dem Sinus-Produkt der getrennten und gleich dem Cotangenten-Produkt der anliegenden Stücke.

*) Wir schalten dieses kleine Kapitel hier ein, um die gebräuchlichsten Formeln für geodätische Entwicklungen zur Hand zu haben und nach Bedarf citieren zu können.

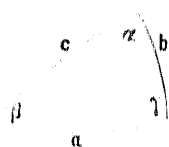
II. Allgemeines sphärisches Dreieck.

Nach Fig. 2. bezeichnen wir:

Seite a mit dem Gegenwinkel α

$\begin{matrix} b & c & a \\ \alpha & \beta & \gamma \end{matrix}$

Fig. 2.
Sphärisches Dreieck.



Man hat zuerst folgende 4 Gleichungs-Gruppen, welche je vier Stücke enthalten, und zur Bestimmung eines Dreiecks aus drei gegebenen Stücken genügen:

Cosinus-Satz

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Sinus-Satz

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \quad (8)$$

Cotangenten-Satz

$$\left. \begin{aligned} \cotg a \sin b &= \cos b \cos \gamma + \sin \gamma \cotg \alpha \\ \cotg b \sin c &= \cos c \cos \alpha + \sin \alpha \cotg \beta \\ \cotg c \sin a &= \cos a \cos \beta + \sin \beta \cotg \gamma \\ \cotg a \sin c &= \cos c \cos \beta + \sin \beta \cotg \alpha \\ \cotg b \sin a &= \cos a \cos \gamma + \sin \gamma \cotg \beta \\ \cotg c \sin b &= \cos b \cos \alpha + \sin \alpha \cotg \gamma \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Polar-Cosinus-Satz

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha \\ \cos \beta &= \cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b \\ \cos \gamma &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Nicht unmittelbar zur Auflösung eines Dreiecks dienend, aber anderweitig oft brauchbar, ist eine Beziehung zwischen *fünf* Stücken des Dreiecks, welche in sechsfacher Anwendung folgende Gruppe giebt:

$$\left. \begin{aligned} \sin a \cos \beta &= \cos b \sin c & \sin b \cos c \cos \alpha \\ \sin b \cos \gamma &= \cos c \sin a & \sin c \cos a \cos \beta \\ \sin c \cos \alpha &= \cos a \sin b & \sin a \cos b \cos \gamma \\ \sin a \cos \gamma &= \cos c \sin b & \sin c \cos b \cos \alpha \\ \sin b \cos c &= \cos a \sin c & \sin a \cos c \cos \beta \\ \sin c \cos \beta &= \cos b \sin a & \sin b \cos a \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Weiter haben wir die wichtigen *Gauss'schen* Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{a}{2} \cos \frac{\beta}{2} &= \gamma & \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{a}{2} \sin \frac{\beta}{2} &= \gamma & \sin \frac{b-c}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{a}{2} \cos \frac{\beta}{2} &= \gamma & \cos \frac{b+c}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{a}{2} \sin \frac{\beta}{2} &= \gamma & \cos \frac{b-c}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Diese Gleichungen lassen verschiedene Anwendungen zu; wenn z. B. b, c und α gegeben und β, γ, a zu berechnen sind, so bestimmt man zuerst $\frac{\beta+c}{2}$ und $\frac{\beta-c}{2}$, womit man auch β und γ hat, und dann $\frac{a}{2}$ auf mehr als einem Wege.

Wenn wir hiebei zur vorübergehenden Abkürzung die Zähler und Nenner der entstehenden Brüche mit Z , N , sowie Z' , N' bezeichnen, so haben wir:

$$\operatorname{tang} \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\cos \frac{b-c}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{b+c}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{Z}{N} \quad (13)$$

$$\operatorname{tang} \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{\sin \frac{b-c}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{Z'}{N'} \quad (14)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{Z}{\sin \frac{\beta + \gamma}{2}} = \frac{N}{\cos \frac{\beta + \gamma}{2}}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{Z'}{\sin \frac{\beta - \gamma}{2}} = \frac{N'}{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}} \quad (15)$$

Wenn hier $\frac{\alpha}{2} < 45^\circ$ ist, so ist die Bestimmung aus $\sin \frac{\alpha}{2}$ vorzuziehen, und wenn $\frac{\alpha}{2} > 45^\circ$, so ist $\cos \frac{\alpha}{2}$ günstiger.

Bei der Doppelbestimmung, die man auch für $\cos \frac{\alpha}{2}$ selbst oder für $\sin \frac{\alpha}{2}$ hat, gelten zu günstigster Auswahl dieselben Regeln, wie bei der Berechnung der Hypotenuse eines ebenen Dreiecks, wie bereits in unserem Band II. S. 191—192 angegeben ist.

Der *sphärische Exzess* eines sphärischen Dreiecks ist der Überschuss der Winkelsumme über 180° , d. h.:

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ \quad (16)$$

Wenn r der Kugelhalbmesser und F die krumme Oberfläche des sphärischen Dreiecks ist, so findet man daraus den Exzess ε nach der Formel:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2} \rho \quad (17)$$

wo $\rho = 206\,265''$ ist.

§ 30. Reihen-Entwicklungen.

In der höheren Geodäsie spielen konvergierende Reihen eine wichtige Rolle.

Als Grundlage der konvergierenden Potenz-Reihen betrachten wir zuerst die *Taylor'sche Reihe* mit der Veränderlichen x und mit der Änderung h derselben:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots \quad (1)$$

Dabei bedeutet $f'(x)$ die erste Ableitung von $f(x)$ nach x , $f''(x)$ die zweite Ableitung u. s. w., ferner ist:

$$\left. \begin{array}{ll} 1! = 1 & 6! = 720 \\ 2! = 1 \cdot 2 = 2 & 7! = 5\,040 \\ 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 & 8! = 40\,320 \\ 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 & 9! = 362\,880 \\ 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 & 10! = 3\,628\,800 \end{array} \right\} \quad (2)$$

Beispielshalber schreiben wir hierfür die sehr oft gebrauchten trigonometrischen Anwendungen:

$$\left. \begin{aligned} \sin(x+h) &= \sin x + h \cos x - \frac{h^2}{2} \sin x - \frac{h^3}{6} \cos x + \frac{h^4}{24} \sin x + \dots \\ \sin(x-h) &= \sin x - h \cos x - \frac{h^2}{2} \sin x + \frac{h^3}{6} \cos x + \frac{h^4}{24} \sin x - \dots \\ \cos(x+h) &= \cos x - h \sin x - \frac{h^2}{2} \cos x + \frac{h^3}{6} \sin x + \frac{h^4}{24} \cos x - \dots \\ \cos(x-h) &= \cos x + h \sin x - \frac{h^2}{2} \cos x - \frac{h^3}{6} \sin x + \frac{h^4}{24} \cos x + \dots \\ \tan(x+h) &= \tan x + h \frac{1}{\cos^2 x} + h^2 \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{h^3}{3} \frac{\cos^2 x + 3 \sin^2 x}{\cos^4 x} + \dots \\ \cot(x+h) &= \cot x - h \frac{1}{\sin^2 x} + h^2 \frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{h^3}{3} \frac{\sin^2 x + 3 \cos^2 x}{\cos^4 x} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Auf die zuerst angegebene *Taylor'sche* Reihe (1) gründet sich auch die *Maclaurin'sche* Reihe:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) \quad (4)$$

wobei $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ u. s. w. diejenigen Werte sind, welche entstehen, wenn in $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ u. s. w. die Veränderliche x gleich Null gesetzt wird.

Von besonderer Wichtigkeit ist die *Binomial-Reihe*:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \dots \quad (5)$$

Die Coefficienten dieser Reihe heißen *Binomial-Coefficienten*, und haben folgende Bedeutungen:

$$\left. \begin{aligned} \binom{n}{1} &= n \\ \binom{n}{2} &= \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \\ \binom{n}{3} &= \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} \text{ u. s. w.} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Die Binomial-Reihe gilt allgemein für ganze oder gebrochene positive oder negative Exponenten n und konvergiert immer, wenn $x < 1$ ist. Einige häufig gebrauchte Anwendungen dieser Reihe sind folgende:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad (7)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \quad (8)$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots \quad (9)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots \quad (10)$$

$$\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 \pm \frac{1}{16} x^3 - \frac{5}{128} x^4 \pm \frac{7}{256} x^5 - \frac{21}{1024} x^6 \pm \dots \quad (11)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = 1 \mp \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} x^2 \mp \frac{5}{16} x^3 + \frac{35}{128} x^4 \mp \frac{63}{256} x^5 + \frac{231}{1024} x^6 \mp \dots \quad (12)$$

Logarithmische Reihe.

$$\left. \begin{aligned} l(1+x) &= +x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \\ l(1-x) &= -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Hiebei ist l das Zeichen für natürliche Logarithmen mit der Basis $e=2,71828\,1828$, oder es ist lz der natürliche Logarithmus von z . Dagegen bedeutet $\log z$ den Briggschen Logarithmus mit der Basis 10, und es besteht die Beziehung:

$$\log z = \mu(lz) \quad (14)$$

Der Faktor μ heisst der *Modulus* des Briggschen Logarithmen-Systems, und es ist:

$$\mu = \log e = \frac{1}{l10} = 0,434\,294\,4819 \quad , \quad \log \mu = 9.637\,7843\,113 \quad (15)$$

Anmerkung. Der logarithmische Modulus wird sehr häufig mit M bezeichnet; wir werden jedoch M als Zeichen für den Meridian-Krümmungshalbmesser nehmen, und sind dadurch teilweise gehindert, M zugleich als Zeichen für den Modulus zu benutzen.

Goniometrische Reihen.

In den Potenzreihen für $\sin x$, $\cos x$ u. s. w. ist x als Bogen in analytischem Masse zu nehmen.

Zur gegenseitigen Verwandlung zwischen Winkelmaass in Graden, Minuten, Sekunden einerseits, in analytisches Mass andererseits, dient die Zahl ϱ , bzw. die drei Zahlen ϱ° ϱ' ϱ'' .

Wenn x° , x' , x'' ein Winkelwert in geometrischem Mass, d. h. in Graden, Minuten oder Sekunden ist, und x der entsprechende Wert in analytischem Masse, so bestehen die Gleichungen:

$$x = \frac{x^\circ}{\varrho^\circ}, \quad x = \frac{x'}{\varrho'}, \quad x = \frac{x''}{\varrho''}$$

Die Zahlenwerte sind:

$$\left. \begin{aligned} \pi &= 3,141\,592\,653\,5898 & \log \pi &= 0.497\,1498\,727 \\ \varrho^\circ &= \frac{180^\circ}{\pi} = 57,295\,779\,5131^\circ & \log \varrho^\circ &= 1.758\,1226\,324 \\ \varrho' &= \frac{180.60'}{\pi} = 3\,437,746\,77078' & \log \varrho' &= 3.536\,2738\,828 \\ \varrho'' &= \frac{180.60.60''}{\pi} = 206\,264,806\,247'' & \log \varrho'' &= 5.314\,4251\,332 \\ \text{Für neue (Centesimal-) Teilung des Quadranten ist:} \\ \varrho &= \frac{200^\circ}{\pi} = 63,661\,977\,237^\circ & \log \varrho &= 1.803\,8801\,230 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

In diesem Sinne ist x in den folgenden Reihen aufzufassen:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad , \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

oder entwickelt:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - \dots \quad (17)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \frac{x^{10}}{3628800} + \dots \quad (18)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \frac{1382x^{11}}{155925} + \dots \quad (19)$$

$$\cotan x = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \dots \right) \quad (20)$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \dots \quad (21)$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \frac{31x^6}{15120} + \dots \right) \quad (22)$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \frac{35x^9}{1152} + \frac{63x^{11}}{2816} + \dots \quad (23)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \dots \quad (24)$$

$$l \sin x = lx - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + \dots \quad (25)$$

$$l \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \dots \quad (26)$$

$$l \tan x = lx + \frac{x^3}{3} + \frac{7x^4}{90} + \frac{62x^6}{2835} + \dots \quad (27)$$

Diese Reihen können manchmal dazu dienen, für einen sehr kleinen Winkel unmittelbar $\log \sin u$ u. s. w. zu berechnen, z. B. für x'' in Sekunden:

$$\log \sin x'' = \log \frac{x''}{\rho''} - \frac{\mu}{6 \rho''^2} x''^2 - \frac{\mu}{180 \rho''^4} x''^4 - \dots \quad (28)$$

Dabei ist für Einheiten der 7. Logarithmenstelle:

$$\log \frac{\mu}{6 \rho''^2} = 5.2307828 - 10 \quad \log \frac{\mu}{180 \rho''^4} = 3.12481 \quad (28a)$$

Verwandlung der Potenzen von $\sin x$ und $\cos x$ in \sin und \cos der Vielfachen von x .

1) für gerade Exponenten:

$$\sin^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}} \left(\frac{1}{2} \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \cos 2x + \binom{2n}{n-2} \cos 4x - \dots \right) \quad (29)$$

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}} \left(\frac{1}{2} \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1} \cos 2x + \binom{2n}{n-2} \cos 4x + \dots \right) \quad (30)$$

2) für ungerade Exponenten:

$$\sin^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}} \left(\binom{2n+1}{n} \sin x - \binom{2n+1}{n-1} \sin 3x + \dots \right) \quad (31)$$

$$\cos^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}} \left(\binom{2n+1}{n} \cos x + \binom{2n+1}{n-1} \cos 3x + \dots \right) \quad (32)$$



In diesen Reihen ist so lange fortzufahren, bis ein Coëfficient = 0 wird.
Die Anwendung bis zur 8. Ordnung giebt:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \\ \sin^3 x &= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x \\ \sin^4 x &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \\ \sin^5 x &= \frac{5}{8} \sin x - \frac{5}{16} \sin 3x + \frac{1}{16} \sin 5x \\ \sin^6 x &= \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2x + \frac{3}{16} \cos 4x - \frac{1}{32} \cos 6x \\ \sin^7 x &= \frac{35}{64} \sin x - \frac{21}{64} \sin 3x + \frac{7}{64} \sin 5x - \frac{1}{64} \sin 7x \\ \sin^8 x &= \frac{35}{128} - \frac{7}{16} \cos 2x + \frac{7}{32} \cos 4x - \frac{1}{16} \cos 6x + \frac{1}{128} \cos 8x \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \\ \cos^3 x &= \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x \\ \cos^4 x &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \\ \cos^5 x &= \frac{5}{8} \cos x + \frac{5}{16} \cos 3x + \frac{1}{16} \cos 5x \\ \cos^6 x &= \frac{5}{16} + \frac{15}{32} \cos 2x + \frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{32} \cos 6x \\ \cos^7 x &= \frac{35}{64} \cos x + \frac{21}{64} \cos 3x + \frac{7}{64} \cos 5x + \frac{1}{64} \cos 7x \\ \cos^8 x &= \frac{35}{128} + \frac{7}{16} \cos 2x + \frac{7}{32} \cos 4x + \frac{1}{16} \cos 6x + \frac{1}{128} \cos 8x \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Verwandlung der sin und cos der Vielfachen von x in Potenzen von sin x und cos x.

$$\sin n x = \binom{n}{1} \cos^{n-1} x \sin x - \binom{n}{3} \cos^{n-3} x \sin^3 x + \binom{n}{5} \cos^{n-5} x \sin^5 x \dots \quad (35)$$

$$\cos n x = \cos^n x - \binom{n}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4} \cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots \quad (36)$$

Hieraus findet man:

$$\left. \begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \sin 3x &= 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x \\ \sin 4x &= 4 \sin x \cos^3 x - 4 \sin^3 x \cos x \\ \sin 5x &= 5 \sin x \cos^4 x - 10 \sin^3 x \cos^2 x + \sin^5 x \\ \sin 6x &= 6 \sin x \cos^5 x - 20 \sin^3 x \cos^3 x + 6 \sin^5 x \\ \sin 7x &= 7 \sin x \cos^6 x - 35 \sin^3 x \cos^4 x + 25 \sin^5 x \cos^2 x - \sin^7 x \\ \sin 8x &= 8 \sin x \cos^7 x - 56 \sin^3 x \cos^5 x + 56 \sin^5 x \cos^3 x - 8 \sin^7 x \cos x \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
 \cos 3x &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x \\
 \cos 4x &= \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x \\
 \cos 5x &= \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x \\
 \cos 6x &= \cos^6 x - 15 \cos^4 x \sin^2 x + 15 \cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x \\
 \cos 7x &= \cos^7 x - 21 \cos^5 x \sin^2 x + 35 \cos^3 x \sin^4 x - 7 \cos x \sin^6 x \\
 \cos 8x &= \cos^8 x - 28 \cos^6 x \sin^2 x + 70 \cos^4 x \sin^4 x - 28 \cos^2 x \sin^6 x + \sin^8 x
 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Abgekürzte Potenz-Reihen mit mittlerem Argument.

Man kann in einer Potenzreihen-Entwicklung nach dem *Taylor*'schen Satz immer Glieder sparen durch Einführung eines *mittleren* Arguments, wie sich so zeigen lässt:

$$\text{Man setzt zuerst:} \quad x + h = \left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}$$

$$\text{und dann:} \quad x = \left(x + \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2}$$

Dann hat man nach dem *Taylor*'schen Satze (1):

$$f(x + h) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} f'\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{8} f''\left(x + \frac{h}{2}\right) + \dots$$

$$f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2} f'\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{8} f''\left(x + \frac{h}{2}\right) - \dots$$

Daraus findet man durch Subtraktion und Addition:

$$f(x + h) - f(x) = h f'\left(x + \frac{h}{2}\right) + h^3 \dots \quad (39)$$

$$\frac{f(x + h) + f(x)}{2} = f\left(x + \frac{h}{2}\right) + h^2 \dots \quad (40)$$

In (39) kommt kein Glied mit h^2 vor und in (40) ist kein Glied mit h ; diese Glieder wurden durch Einführung von $x + \frac{h}{2}$ als Argument von f und von f' erspart.

Als einfache Anwendung der Gleichung (39) nehmen wir z. B.:

$$\sin u - \sin v = (u - v) \cos \frac{u + v}{2} + (u - v)^3 \dots \quad (40a)$$

Will man hier nur bis auf $(u - v)^2$ einschl. genau rechnen, so kann man in dem Glied mit $(u - v)$ nach Belieben u oder v schreiben, z. B.:

$$\sin u = \sin v + (u - v) \cos u + (u - v)^3 \dots \quad (41)$$

$$\text{oder} \quad \sin u = \sin v + (u - v) \cos v + (u - v)^3 \dots \quad (42)$$

Diese zwei letzten Formeln sind *gleich* genau.

Eine andere Anwendung dieses Prinzips ist folgende:

Wenn $f(x, x')$ eine Funktion von x und x' ist, welche nach Potenzen von $(x' - x)$ entwickelt werden kann, so ist:

$$f(x, x') = f(x, x) + (x' - x) f'(x) + (x' - x)^2 \dots$$

oder

$$f(x, x') = f(x', x') + (x - x') f'(x') + (x - x')^2 \dots$$

Aus diesen beiden Gleichungen zusammen folgt:

$$f(x, x') = \frac{f(x, x) + f(x', x')}{2} + (x' - x) \frac{f'(x) - f'(x')}{2} \quad (43)$$

Es unterscheiden sich aber $f'(x)$ und $f'(x')$ selbst nur um Glieder von der Ordnung $(x' - x)$, also ist:

$$f(x, x') = \frac{f(x, x) + f(x', x')}{2} + (x' - x)^2 \dots \quad (44)$$

Dabei sind $f(x, x)$ und $f(x', x')$ diejenigen 2 Werte von $f(x, x')$, welche entstehen, wenn bzw. $x' = x$ und $x = x'$ gesetzt wird.

Folgendes sind zwei einfache Beispiele hiefür:

$$\sqrt{x x'} = \frac{x + x'}{2} + (x' - x)^2 \dots \quad (45)$$

$$\sqrt{\frac{x^2 + x'^2}{2}} = \frac{x + x'}{2} + (x' - x)^2 \dots \quad (46)$$

oder in Worten: das geometrische Mittel, das Mittel der Methode der kleinsten Quadrate und viele andere Mittel zweier Zahlen x und x' sind dem arithmetischen Mittel gleich, auf Glieder von der Ordnung $(x' - x)$ einschliesslich genau.

Zum Schluss dieser Betrachtungen erinnern wir daran, dass Näherungsformeln, welche nur auf ein Glied genau sein sollen, am einfachsten in der Gestalt von *Differentialformeln* angeschrieben werden; wenn man z. B. $\sin u - \sin v$ nur auf Glieder von der Ordnung $u - v$ genau haben will, so setzt man:

$$\sin u - \sin v = d \sin v \quad \text{oder} \quad = -d \sin u$$

und:

$$u - v = d v \quad \text{oder} \quad = -d u$$

und hat damit:

$$d \sin u = \cos u d u \quad \text{oder} \quad d \sin v = \cos v d v$$

woraus entsteht:

$$\sin u - \sin v = (u - v) \cos u \quad \text{oder} \quad = (u - v) \cos v \quad (47)$$

in Übereinstimmung mit (41) und (42).

Reihen-Umkehrung.

Wenn eine konvergierende Potenzreihe vorliegt von dieser Form:

$$y = A x + B x^2 + C x^3 + D x^4 + \dots \quad (48)$$

so kann man die Aufgabe stellen, umgekehrt x durch eine konvergierende Reihe nach Potenzen von y darzustellen.

In erster Näherung giebt die Reihe (48) jedenfalls, nach x aufgelöst:

$$x = \frac{y}{A} + y^2 \dots$$

$$\text{also} \quad y = A x + B \left(\frac{y}{A} + y^2 \dots \right)^2 + \dots$$

und dieses giebt nach x aufgelöst:

$$x = \frac{y}{A} - \frac{B}{A^3} y^2 + \dots$$

In dieser Weise kann man fortfahren, und Schritt für Schritt höhere Glieder $y^3 \dots y^4 \dots$ u. s. w. hinzufügen, was in besonderen Fällen oft nützlich ist. Man kann das Verfahren auch allgemeiner darstellen, indem die Auflösung der Reihe (48) diese Form annehmen soll:

$$x = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \dots \quad (49)$$

Hier haben die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ folgende Bedeutungen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{A} & \beta &= \left(-\frac{B}{A^3} \right) \\ \gamma &= \left(\frac{2B^2}{A^5} - \frac{C}{A^4} \right) & \delta &= \left(-\frac{5B^3}{A^7} + \frac{5BC}{A^6} - \frac{D}{A^5} \right) \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

In ähnlicher Weise kann man auch *zwei* Reihen mit einander vergleichen; es sei gegeben:

$$A x + B x^2 + C x^3 + \dots = A' y + B' y^2 + C' y^3 + \dots \quad (51)$$

Dann kann man x so darstellen:

$$x = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \dots \quad (51)$$

wo die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \dots$ folgende Bedeutungen haben:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{A'}{A} & \beta &= \left(\frac{B'}{A} - \frac{B A'^2}{A^3} \right) \\ \gamma &= \left(\frac{C'}{A} - \frac{2 B A' B'}{A^3} - \frac{C A'^3}{A^4} + \frac{2 B^2 A'^3}{A^5} \right) \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

§ 31. Interpolation.

Wir betrachten verschiedene Werte einer Funktion y , welche gewissen in arithmetischer Progression stehenden Werten des Arguments x entsprechen und nehmen die Bezeichnungen nach folgender Anordnung:

Argument x	Funktion y	Differenzen Δy
x_0	y_0	Δy_0
x_1	y_1	$\Delta^2 y_0$
x_2	y_2	$\Delta^3 y_0$
x_3	y_3	$\Delta^4 y_0$
x_4	y_4	$\Delta^5 y_0$
.	.	.

Es handelt sich nun um irgend einen *Zwischenwert* x_{n+z} , welcher zwischen x_n und x_{n+1} liegt, wobei also z ein echter Bruch ist; und es soll der hiezu gehörige Wert y berechnet werden. Man hat hiezu die bekannte Interpolations-Formel:

$$y = y_n + z \Delta y_n + \frac{z(z-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y_n + \frac{z(z-1)(z-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 y_n + \dots \quad (1)$$

In der Geodäsie hat man nur selten nötig, höhere Differenzen zu berücksichtigen; als Beispiel der Anwendung haben wir jedoch das zuweilen auftretende Bedürfnis, einen Wert so genau als möglich aus der 10stelligen Logarithmen-Tafel zu entnehmen (s. unten (5)–(6)).

Mit Beschränkung auf die zweite Differenz schreiben wir nach (7):

$$y = y_n + z \Delta y_n - \frac{z(1-z)}{2} \Delta^2 y_n \quad (2)$$

Zu einem Zahlenbeispiel wollen wir annehmen, man solle aus der Tafel Seite [26] des Anhangs den Funktionswert m entnehmen für die Breite $\varphi = 52^\circ 37' 32,6709''$.

Da in jener Tafel S. [26] das Intervall $\Delta \varphi = 10'$ ist, schreiben wir zunächst:

$$\varphi = 52^\circ 37' 32,6709'' = 52^\circ 37,544515', \text{ oder } z = 0,7544515$$

Im Übrigen bekommt man nach S. [26] mit der vorstehenden Formel (2):

$$\begin{aligned} \text{für } \varphi = 52^\circ 30' & \quad 5\,818\,380,341'' \\ \text{„ erste Differenz } & 18\,544,271 \times 0,7544515 = +\,13\,990,753 \\ \text{„ zweite „} & -0,523 \frac{0,754 \times 0,246}{2} = -0,049 \\ & m = 5\,832\,371,045'' \end{aligned} \quad (3)$$

Man kann für das letzte Glied der Formel (2) in jedem vorkommenden Falle Hilfstäfelchen berechnen, ähnlich wie dieses auch für erste Differenzen am Rande von Tabellen meist geschieht.

In manchen Fällen ist es nützlich, die Interpolations-Formel (1) auf eine andere Form zu bringen, nämlich:

$$y = y_n + z \left(\Delta y_n - \frac{1-z}{2} \Delta^2 y_n \right) \quad (4)$$

Hier wird eine Verbesserung $-\frac{1-z}{2} \Delta^2 y_n$ der ersten Differenz Δy_n berechnet, und dann mit der verbesserten ersten Differenz weiter gerechnet, wie bei einfacher Proportional-Interpolation.

Hiernach ist folgendes berechnet:

$$\left. \begin{array}{cccccccccccc} z = 0,0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,7 & 0,8 & 0,9 & 1,0 \\ \frac{(1-z)}{2} = 0,50 & 0,45 & 0,40 & 0,35 & 0,30 & 0,25 & 0,20 & 0,15 & 0,10 & 0,05 & 0,00 \end{array} \right\} \quad (5)$$

Die weitere Anwendung zeige ein Beispiel:

Es liege vor $x = 15^\circ 30' 34,67492''$ und man soll den zugehörigen Wert $y = \log \sin x$ aus der 10stelligen Logarithmen-Tafel bestimmen.

Indem wir voraussetzen, dass der Leser die fragliche 10stellige Tafel zur Hand habe, setzen wir die Rechnung hiernach an, mit Ausrechnung des Proportionalteils in 6stelliger logarithmischer Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} x = 15^\circ 30' 34,67492'' &= 15^\circ 30' 30'' + 0,467\,492\,(10'') \\ & \quad \Delta y \\ & \quad + 758\,868 \Delta^2 y \\ \log \sin 15^\circ 30' 30'' &= 9,427\,1265\,273 \quad -0,141 \\ & \quad + 758\,727 \\ & \quad + 0,038 \text{ (Korrekt. } 0,27 \times 0,141) \\ & \quad 758\,765 \\ & \quad 2,880107 = \log 758\,765 \\ & \quad 9,669774 = \log 0,467492 \\ & \quad 354\,717 \quad 2,549881 \\ \log \sin 15^\circ 30' 34,67492'' &= 9,427\,1619\,990 \end{aligned} \quad (6)$$

Wir bedienen uns für solche Zwecke eines autographierten Schemas, diesem Beispiele entsprechend, welches ein Hilfstäfelchen nach (5), und alles Konstante vorgedruckt enthält. Man kann nach diesem Schema in gleicher Weise sowohl y zu gegebenem x als auch x zu gegebenem y bestimmen; in letzterem Falle hat man nur zuerst einen Näherungswert von x zu benützen, um die Korrektur für zweite Differenz ausrechnen zu können.

Für grössere Rechnungen mit 10stelligen Logarithmen werden die einzelnen Logarithmen in dem erwähnten Schema behandelt, welches dann eine Beilage zu der Haupt-Rechnung bildet.

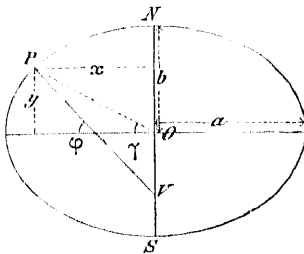
Kapitel III.

Das Erd-Ellipsoid, (Sphäroid).

§ 32. Erklärungen und Grund-Masse.

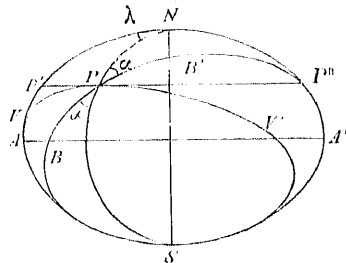
Die ideale Erdoberfläche, welche unseren Berechnungen zu Grunde gelegt wird, ist ein Umdrehungs-Ellipsoid, d. h. diejenige Fläche, welche durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe erzeugt wird.

Fig. 1.



Umdrehungs-Ellipsoid.

Fig. 2.



Zuerst kommen folgende Grössen und Gleichungen in Betracht, welche zu den vorstehenden Fig. 1. und Fig. 2. in Beziehung stehen.

Die grosse Halbaxe a (1)

die kleine Halbaxe b (2)

die Abplattung $\alpha = \frac{a - b}{a}$ (3)

die Excentricität $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ (4)

die zweite Excentricität $e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ (5)

Die Excentricität e in diesem Sinne ist eine absolute Zahl, und erscheint als Verhältniss der halben linearen Excentricität $\sqrt{a^2 - b^2}$ zur grossen Halbaxe a .

Indem man die halbe lineare Excentricität $\sqrt{a^2 - b^2}$ auch zur kleinen Halb-

Axe b in Beziehung setzt, kommt man auf den Wert e' nach (5), welcher für unsere Berechnungen oft vorteilhafter ist, als e nach (4).

Zwischen e und e' bestehen die leicht nachweisbaren Beziehungen:

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \quad e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} \quad (6)$$

Ferner geben (1) (2) (4) und (5):

$$b^2 = a^2 (1 - e^2) \quad a^2 = b^2 (1 + e'^2) \quad (7)$$

$$(1 - e^2)(1 + e'^2) = 1 \quad (7a)$$

Die Abplattung α steht zur Excentricität e in den Beziehungen:

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2} \quad e^2 = 2\alpha - \alpha^2 \quad (8)$$

Da in der Abplattung α die grosse Axe bevorzugt ist, könnte man daran denken, auch einen Wert $\alpha' = \frac{a-b}{b}$ einzuführen. Dieses ist nicht gebräuchlich, dagegen benutzt man häufig einen Quotienten von ähnlichem Sinne, der aber a und b gleichmässig behandelt, nämlich:

$$n = \frac{a-b}{a+b} \quad (9)$$

Ausser den beiden Halbaxen a und b führen wir auch noch eine dritte Grösse c ein, entsprechend der Gleichung:

$$c = \frac{a^2}{b} \quad \text{oder} \quad c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (10)$$

Diese Grösse c hat bekanntlich die Bedeutung des Krümmungs-Halbmessers im Nordpol oder Südpol der Meridian-Ellipse, und schmiegt sich daher dem Umdrehungs-Ellipsoid in der Nähe der Pole sehr an; diese Grösse c wird sich später bei manchen Entwicklungen nützlich erweisen.

In Fig. 1. haben wir noch zu betrachten die Normale PV , welche die Richtung der Schwerkraft auf dem Ellipsoid anzeigt, und insbesondere den Winkel φ , welchen die Normale mit der grossen Axe macht, d. h.:

die geographische Breite φ (11)

Sehr verschieden hievon ist der in Fig. 1. eingeschriebene Winkel γ , welcher *geocentrische* Breite heisst, und in der Erdmessung fast nie gebraucht wird (dagegen kommt γ bei astronomischen Parallaxen-Rechnungen vor; die Formel für $\varphi - \gamma$ und für den geocentrischen Halbmesser OP haben wir mitgeteilt in „Grundzüge der astr. Zeit- und Ortsbestimmung“, Berlin 1885, S. 296—298).

Ferner sind nach Fig. 2. noch folgende Begriffe festzustellen:

die Umdrehungs-Axe NS ,

der Parallelkreis $P'P''$,

Meridiane NAS , NPS u. s. w.,

geographischer Längen-Unterschied λ ,

verschiedene Normalschnitte, z. B. BPB' ,

das Azimut α eines Normalschnittes.

Die Besselschen Erd-Dimensionen.

Wie wir schon in der Einleitung S. 9 angegeben haben, werden die von *Bessel* im Jahre 1841 durch Ausgleichung berechneten Erd-Dimensionen sehr allgemein angewendet, und wir werden in der Folge dieselben stets benutzen.

Aus formellen Gründen rechnet man mit solchen Grund-Massen so scharf als möglich; es waren aber die letzten Stellen lange schwankend (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1885“, S. 22—27 und S. 90, sowie „Zeitschr. f. Verm. 1889“, S. 359).

Nach den zwei neueren amtlichen Werken: „Rechnungs-Vorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landes-Aufnahme, erste Ordnung“, Berlin 1878, S. 4 und „Veröffentlichung des königl. preuss. geodätischen Instituts, Lot-Abweichungen“, Berlin 1886, S. 4, bilden wir folgende Zusammenstellung der Grundzahlen mit ihren 10stelligen Logarithmen:

$$\begin{aligned}
 a &= 6\,377\,397,15500 \text{ Meter} & \log a &= 6.804\,6434\cdot637 \\
 b &= 6\,356\,078,96325 \text{ „} & \log b &= 6.803\,1892\cdot839 \\
 \frac{a^2}{b} = c &= 6\,398\,786,84939 \text{ „} & \log c &= 6.806\,0976\cdot435 \\
 \alpha &= \frac{a-b}{a} = \frac{1}{299,152\,8128} & \log \frac{1}{\alpha} &= 2.475\,8930\cdot907 \\
 \alpha &= 0,003\,342\,773\,181\,579 & \log \alpha &= 7.524\,1069\cdot093 \text{ — } 10 \\
 \frac{a^2 - b^2}{a^2} = c^2 &= 0,006\,674\,372\,230\,614 & \log c^2 &= 7.824\,4104\cdot237 \text{ — } 10 \\
 \frac{a^2 - b^2}{b^2} = c'^2 &= 0,006\,719\,218\,797\,971 & \log c'^2 &= 7.827\,3187\cdot833 \text{ — } 10 \\
 1 - c^2 &= 0,993\,325\,627\,769\,386 & \log(1 - c^2) &= 9.997\,0916\cdot404 \text{ — } 10 \\
 \frac{b}{a} = \sqrt{1 - c^2} &= 0,996\,657\,226\,850 & \log \sqrt{1 - c^2} &= 9.998\,5458\cdot202 \text{ — } 10 \\
 \frac{a-b}{a+b} = n &= 0,001\,674\,184\,800\,816 & \log n &= 7.223\,8033\cdot949 \text{ — } 10
 \end{aligned}$$

Im Anschluss hieran geben wir noch die wichtigsten *mathematischen Konstanten*.

$$\begin{aligned}
 \pi &= 3,141\,592\,653\,5898 & \log \pi &= 0.497\,1498\cdot727 \\
 \varrho^\circ &= \frac{180}{\pi} = 57,295\,779\,5131 & \log \varrho^\circ &= 1.758\,1226\cdot324 \\
 \varrho' &= \frac{180 \times 60}{\pi} = 3\,437,746\,770\,78 & \log \varrho' &= 3.536\,2738\cdot828 \\
 \varrho'' &= \frac{180 \times 60 \times 60}{\pi} = 206\,264,806\,247 & \log \varrho'' &= 5.314\,4251\cdot332 \\
 \text{Logarithmischer Modul, } \mu &= 0,434\,294\,481\,90 & \log \mu &= 9.637\,7843\cdot113 \text{ — } 10
 \end{aligned}$$

Ferner zur Verwandlung von Toisen in Meter:

$$\begin{aligned}
 1 \text{ Meter} &= \frac{443,296}{864} \text{ Toisen} & \log 443,296 &= 2.646\,6938\cdot125 \\
 & & \log 864 &= 2.936\,5137\cdot425 \\
 1 \text{ Meter} &= 0,513\,074\,074 \text{ Toisen} & \log (M, T) &= 9.710\,1800\cdot700 \text{ — } 10 \\
 1 \text{ Toise} &= 1,949\,036\,310 \text{ Meter} & \log (T, M) &= 0.289\,8199\cdot300
 \end{aligned}$$

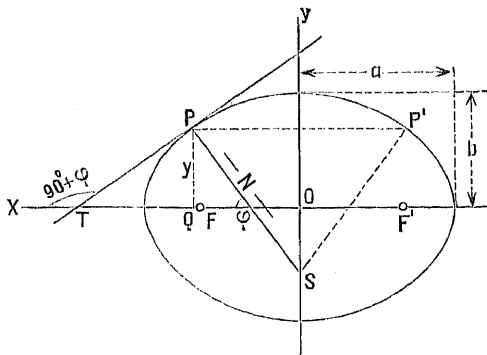
Einige 10stellige Logarithmen:

$$\begin{aligned}
 \log 2 &= 0.301\,0299\cdot957 & \log 6 &= 0.778\,1512\cdot504 \\
 \log 3 &= 0.477\,1212\cdot547 & \log 7 &= 0.845\,0980\cdot400 \\
 \log 4 &= 0.602\,0599\cdot913 & \log 8 &= 0.903\,0899\cdot870 \\
 \log 5 &= 0.698\,9700\cdot043 & \log 9 &= 0.954\,2425\cdot094
 \end{aligned}$$

§ 33. Die Haupt-Krümmungs-Halbmesser.

Die Gleichung der Ellipse in rechtwinkligen Coordinaten, nach Andeutung von Fig. 1., ist bekanntlich:

Fig. 1.
Umdrehungs-Erd-Ellipsoid.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ oder } b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad (1)$$

Die Differentiierung dieser Gleichung giebt:

$$\frac{2x dx}{a^2} + \frac{2y dy}{b^2} = 0 \text{ oder } \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \quad (2)$$

Andererseits hat der Differential-Quotient $\frac{dy}{dx}$ eine Beziehung zum Normalen-Winkel φ , nämlich (nach Fig. 1.):

$$\frac{dy}{dx} = -\cotg \varphi \text{ oder } \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \quad (3)$$

Die Gleichungen (2) und (3) zusammen geben:

$$\frac{b^2 x}{a^2 y} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \text{ oder } \frac{b^2 x^2}{a^2 y^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \quad (4)$$

Nun hat man in (1) und (4) zwei Gleichungen, welche nach x^2 und y^2 aufgelöst werden können; ehe wir jedoch dieses thun, wollen wir durchaus statt zweier Halbbaxen a und b nur *eine* Halbbaxe a , und dazu die Excentricität einführen, nämlich nach (7) § 32. S. 206:

$$b^2 = a^2 (1 - e^2) \quad (5)$$

Damit kann man (1) und (4) so umformen:

$$x^2 (1 - e^2) + y^2 = a^2 (1 - e^2) \quad (6)$$

$$x^2 (1 - e^2)^2 \sin^2 \varphi - y^2 \cos^2 \varphi = 0 \quad (7)$$

Wenn man die erste dieser zwei Gleichungen mit $\cos^2 \varphi$ multipliziert, und dann beide Gleichungen addiert, so bekommt man:

$$x^2 (1 - e^2) (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - e^2 \sin^2 \varphi) = a^2 (1 - e^2) \cos^2 \varphi$$

$$x^2 = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad (8)$$

Wenn man in ähnlicher Weise die zwei Gleichungen (6) und (7) dazu benützt, um x^2 zu eliminieren, so bekommt man:

$$y^2 = \frac{a^2 (1 - e^2)^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad (9)$$

In den Formeln (8) und (9) ist der Nenner $1 - e^2 \sin^2 \varphi$ gemeinschaftlich. Dieser Nenner, oder auch dessen Quadratwurzel, wird uns noch öfter beschäftigen, weshalb dafür ein stehendes Zeichen eingeführt werden soll, nämlich:

$$\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = W \quad (10)$$

und damit hat man aus (8) und (9):

$$x = \frac{a \cos \varphi}{W} \quad y = \frac{a (1 - e^2) \sin \varphi}{W} \quad (11)$$

Nach diesem gehen wir über zur Bestimmung der *Krümmungs-Halbmesser* des Ellipsoids, und zwar zuerst des Krümmungs-Halbmessers der Meridian-Ellipse, den wir mit M bezeichnen wollen. Die analytische Geometrie bietet hierzu die Formel:

$$M = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \quad (12)$$

Den hierzu nötigen ersten Differential-Quotienten haben wir bereits in (3) gebraucht, nämlich:

$$\frac{dy}{dx} = -\cotg \varphi, \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \quad (13)$$

Die zweite Ableitung hiervon giebt zunächst:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dx} \quad (14)$$

und hiezu hat man nach (10) und (11):

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\varphi} &= -e^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \frac{dx}{d\varphi} &= \frac{a}{W^2} \left(-\sin \varphi W - \cos \varphi \frac{dW}{d\varphi} \right) = -\frac{a}{W^3} \sin \varphi (1 - e^2) \end{aligned}$$

Setzt man dieses in (14) ein, so erhält man:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^3 \varphi} \frac{dW}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{1}{\sin^3 \varphi} \frac{dW}{d\varphi} \frac{a}{W^3} \sin \varphi (1 - e^2) \quad (15)$$

Nun kann man aus (13) und (15) die Formel (12) zusammen setzen, und bekommt mit Weglassung des für uns bedeutungslosen Vorzeichens:

$$M = \frac{a (1 - e^2)}{W^3} \quad (16)$$

Dieses ist der erste Haupt-Krümmungs-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids; der zweite Haupt-Krümmungs-Halbmesser, welcher sich auf die Krümmung quer zum Meridian, also von West nach Ost bezieht, kann ohne weitere Rechnung durch eine sehr einfache geometrische Betrachtung gefunden werden (nach *Helmert* „Höhere Geodäsie“ I, S. 50):

Wir betrachten in Fig. 1. (S. 208) zuerst den Parallelkreis PP' für die Breite

φ , und sehen, dass alle in diesem Parallelkreis gezogenen Flächen-Normalen sich in einem Punkte S der Axe schneiden.

Der Querkrümmungs-Bogen, welcher in P rechtwinklig zum Meridian ist, muss offenbar jenen Parallelkreis PP' in P berühren, und deswegen sind zwei einander unendlich nahe liegende Gerade PS auch Normalen des Querkrümmungs-Bogens in P . Da aber der Schnittpunkt zweier einander unendlich naher Normalen einer Kurve als Krümmungs-Mittelpunkt der Kurve gilt, so ist PS der Krümmungs-Halbmesser des Querkrümmungs-Bogens, oder kurz, es ist $PS = N$ der Querkrümmungs-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids in dem Punkte P .

Indem wir die Länge dieses Querkrümmungs-Halbmessers nun mit N bezeichnen, haben wir nach Fig. 1. und nach Gleichung (11):

$$\frac{x}{\cos \varphi} = N = \frac{a}{W} \quad (17)$$

Nachdem wir so die beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser M und N nach (16) und (17) bestimmt haben, wollen wir als zunächst wichtig, ihren Quotienten betrachten, d. h.:

$$\frac{N}{M} = \frac{W^2}{1 - e^2} = V^2 \quad (18)$$

Wenn man hier die Bedeutung von W nach (10) und auch e'^2 nach (6) § 32. S. 206 einführt, so erhält man:

$$\frac{W^2}{1 - e^2} = \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2} = \frac{1 - e^2 + e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2} = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi = V^2 \quad (19)$$

Den so bestimmten Wert V^2 bzw. V werden wir auch sonst noch öfter benutzen, namentlich an Stelle des früher zuerst angenommenen W , und bemerken als Beziehung zwischen W und V :

$$W = V \sqrt{1 - e^2} \quad (20)$$

Setzt man dieses nebst c von (10) § 32. S. 206 in die Ausdrücke (16) und (17) für N und M , so erhält man:

$$N = \frac{c}{V} \quad M = \frac{c}{V^3} \quad (21)$$

Der Quotient $N:M = V^2$ ist in der Geodäsie sehr wichtig, denn je näher dieser Quotient gleich 1 ist, desto mehr ist es gestattet, die Erde unter der betreffenden Breite als eine Kugel zu betrachten. Zur Gewinnung einer Übersicht wollen wir einige Werte hiefür ausrechnen:

$$\begin{array}{ll} \varphi = 0^\circ & \frac{N}{M} = 1,0067 = V^2 \\ \dots 30^\circ & \dots 1,0050 \\ \dots 45^\circ & \dots 1,0034 \\ \dots 60^\circ & \dots 1,0017 \\ \dots 90^\circ & \dots 1,0000 \end{array}$$

Die Werte V^2 sind von 1 ziemlich verschieden, unter 45° um etwa $\frac{1}{3}\%$; und nur in der Nähe der Erdpole ($\varphi = 90^\circ$) wäre in Hinsicht auf die Krümmungsverhältnisse ein sehr günstiges Feld für Geodäsie.

Trotzdem giebt es sehr viele Fälle, wo es sich nur um kleine Korrekturen zweiter Ordnung handelt, in welchen der Quotient $N:M$ doch hinreichend $= 1$ gesetzt, d. h. die Erde als Kugel behandelt werden darf.

In solchen Fällen nimmt man einen Mittelwert der beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser M und N an, am einfachsten das geometrische Mittel:

$$r = \sqrt{MN} = \frac{c}{V^2} = \frac{c}{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad (22)$$

Dieser Wert r heisst der *mittlere Krümmungs-Halbmesser* für die betreffende Breite φ .

Will man r statt durch V^2 durch das frühere W^2 ausdrücken, so hat man:

$$r = \sqrt{MN} = \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{W^2} = \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad (22a)$$

Tafel-Berechnung für die Krümmungs-Halbmesser.

Einzelne Werte $\log W$, $\log V$, und damit $\log M$ u. s. w. lassen sich geradezu nach den betreffenden geschlossenen Formeln ausrechnen; die Werte W oder V werden aber so oft gebraucht, dass es sich wohl lohnt, ein für allemal Tabellen hiefür zu berechnen, und dann empfiehlt es sich auch, *Reihen-Entwicklungen* anzuwenden.

Nehmen wir zuerst $W^2 = 1 - e^2 \sin^2 \varphi$, so bekommt man dafür nach (13) § 30. S. 198 die logarithmische Reihe:

$$\log \frac{1}{W^2} = \mu e^2 \sin^2 \varphi + \frac{\mu e^4}{2} \sin^4 \varphi + \frac{\mu e^6}{3} \sin^6 \varphi + \frac{\mu e^8}{4} \sin^8 \varphi + \dots \quad (23)$$

wo $\mu = 0,43429 \dots$ der logarithmische Modulus ist. Die Ausrechnung der Coëfficienten mit dem Besselschen Werte e nach § 32. S. 207 giebt für Einheiten der 7. Logarithmen-Decimale:

$$\log \mu e^2 = 4.462\,1947\,350 \quad , \quad \log \frac{\mu e^4}{2} = 1.985\,5751\,6 \quad (23a)$$

$$\log \frac{\mu e^6}{3} = 9.633\,8942 - 10 \quad , \quad \log \frac{\mu e^8}{4} = 7.333\,366 - 10 \quad , \quad \log \frac{\mu e^{10}}{5} = 5.0609 - 10 \quad (23b)$$

Setzt man hier $\varphi = 90^\circ$, so hat man eine Rechenprobe, nämlich:

$$\begin{aligned} -\log(1 - e^2) &= 0.002\,8986\,4303 + 96.7336 + 0.4304 + 0.0022 + 0.00001 \\ &= 0.002\,9083\,5965 \end{aligned}$$

$$\log(1 - e^2) = 9.997\,0916\,4035 - 10$$

Dieses stimmt hinreichend mit $\log(1 - e^2)$ nach § 32. S. 207.

Die Reihe (23) mit den Coëfficienten (23a) und (23b) konvergiert immer, und wie das vorstehende Beispiel mit $\varphi = 90^\circ$ zeigt, braucht man auch am Ende des Quadranten nicht mehr als 4 Glieder, um sogar noch die zehnte Logarithmenstelle richtig zu haben, während am Anfange des Quadranten mit $\varphi = 0^\circ$, 10° u. s. w. weniger Glieder genügen.

Für grössere Werte φ empfiehlt sich mehr als die vorstehende Reihe für $\log W^2$, eine entsprechende Reihe für $\log V^2$, nämlich:

$$\log V^2 = \mu e'^2 \cos^2 \varphi - \frac{\mu e'^4}{2} \cos^4 \varphi + \frac{\mu e'^6}{3} \cos^6 \varphi - \frac{\mu e'^8}{4} \cos^8 \varphi \dots \quad (24)$$

mit den Coëfficienten-Logarithmen für Einheiten der 7. Logarithmen-Decimale:

$$\begin{aligned} \log \mu e'^2 &= 4.465\,1030\,946 \quad , \quad \log \frac{\mu e'^4}{2} = 1.991\,3918\,8 \\ \log \frac{\mu e'^6}{3} &= 9.642\,6194 \quad , \quad \log \frac{\mu e'^8}{4} = 7.344\,999 \quad , \quad \log \frac{\mu e'^{10}}{5} = 5.0754 \end{aligned} \quad (24a)$$

$\log W$ und $\log V$ stehen nach (20) in der sehr einfachen Beziehung:

$$\log W - \log V = \log \sqrt{1 - e^2} = 9.998\,5458\,202,$$

man kann daher stets $\log W$ aus dem dazu gehörigen $\log V$ leicht ableiten und umgekehrt.

Man kann diese Reihen auch noch auf eine andere Form bringen, indem statt der Potenzen von $\sin \varphi$ die \cos der Vielfachen von φ einsetzt, nämlich nach (33) § 30. S. 200:

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi, \quad \sin^4 \varphi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi \text{ u. s. w.}$$

Führt man dieses bis $\sin^8 \varphi$ ein und ordnet nach $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$ u. s. w., so erhält man aus (23):

$$-\log W = A + B \cos 2\varphi + C \cos 4\varphi + D \cos 6\varphi + E \cos 8\varphi \quad (25)$$

$$A = 7264.8126, B = -7270.8923, C = 6.08633, D = -0.00679, E = 0.00001$$

Wenn man hier $\varphi = 45^\circ + (\varphi - 45^\circ)$ setzt, um die Zählung von der Mittelbreite 45° an zu haben, so erhält man:

$$-\log W = 7264.8126 + 7270.8923 \sin 2(\varphi - 45^\circ) - 6.0863 \cos 4(\varphi - 45^\circ) - 0.0068 \sin 6(\varphi - 45^\circ)$$

Diese Form (25) ist insofern günstiger als die frühere Form (23) oder (24), als man damit in *einer* Rechnung stets die Bestandteile für *zwei* Werte φ erhält, welche symmetrisch gegen 45° liegen, z. B. $\varphi = 30^\circ$ und $\varphi = 60^\circ$ geben mit $\varphi - 45^\circ = \mp 15^\circ$:

$$\varphi = 30^\circ, -\log W = 7264.8126 - 3635.4462 - 3.0432 + 0.0068 = 3626.3300$$

$$\varphi = 60^\circ, -\log W = 7264.8126 + 3635.4462 - 3.0432 - 0.0068 = 10897.2088$$

$$\text{also für } \varphi = 30^\circ \log W = 9.999\,6373\,6700$$

$$\text{„ „ } \varphi = 60^\circ \log W = 9.998\,9102\,7912$$

Sobald einmal Näherungs-Werte von $\log W$ oder $\log V$ vorhanden sind, kann man die aufeinander folgenden Differenzen für eine Tabellen-Berechnung sehr gut durch eine Differential-Formel erhalten, z. B. für $\log W$:

$$d \log W = - \frac{\mu}{2} \frac{e^2 \sin 2\varphi}{W^2} \frac{d\varphi}{\varrho} \quad (26)$$

Will man die Differenzen von $10'$ zu $10'$ haben, so ist $d\varphi = 10'$ und $\varrho = 3434.747$ zu nehmen und damit wird:

$$(\Delta \log W)_{10'} = [1.624\,8909] \frac{\sin^2 \varphi}{W^2}$$

wobei die eckig geklammerte Zahl den Coefficienten-Logarithmus bedeutet. Will man hiernach z. B. die Differenz $\Delta \log W$ zwischen $\varphi = 40^\circ 0'$ und $\varphi = 40^\circ 10'$ scharf berechnen, so nimmt man $2\varphi = 80^\circ 10'$ und $\log W^2 = (\log W_{40^\circ} + \log W_{40^\circ 10'})$, wo zu letztere Werte bereits genähert vorhanden sein müssen; man berechnet so $\Delta \log W = 41.655$, was mit 41.7 auf S. [12] der Tafel unseres Anhangs genügend stimmt.

Um hier auf diese in unserem Anhang Seite [2] bis [23] mitgeteilte Tafel der Werte W , V^2 , M , N u. s. w. näher einzugehen, haben wir anzugeben, dass zuerst $\log W$ oder $\log V^2$ nach den Reihen (25), (23) und (24) berechnet wurden für alle Werte $\varphi = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ \dots 89^\circ, 90^\circ$. Dann wurde nach der Formel (26) von $10'$ zu $10'$ interpoliert, unter Benützung anderer schon vorhandener Näherungs-Werte. Diese ganze Rechnung ist ursprünglich bis auf 0.001 genau angelegt; wegen der zahlreichen

Fehlerhäufungen kann jedoch die letzte angesetzte Stelle 0·1 doch nicht unbedingt verbürgt werden, denn dazu wäre von vornherein Rechnung auf 0·0001 mindestens nötig. Von 72° — 90° haben wir nur noch 7. Decimalen (ohne 0·1) angegeben.

Ausser den Grundfunktionen W bzw. V haben wir nun in der Tafel Seite [2] bis [23] des Anhangs noch einige andere Funktionen berechnet, nämlich $\log [1]$, $\log [2]$, $\log M$, $\log N$, $\log r$, deren Bedeutungen wir hier zusammenstellen:

Übersicht der Bezeichnungen in der Hilfstafel Seite [2] bis [23] unseres Anhangs.

φ = Geographische Breite

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$$

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{W^3} \text{ oder } = \frac{c}{V^3} \text{ Meridian-Krümmungs-Halbmesser}$$

$$N = \frac{a}{W} \text{ oder } = \frac{c}{V} \text{ Querkrümmungs-Halbmesser}$$

$r = \sqrt{MN}$ mittlerer Krümmungs-Halbmesser

$$[1] = \frac{e''}{M} \text{ Meridian-Krümmungs-Coëfficient}$$

$$[2] = \frac{e''}{N} \text{ Querkrümmungs-Coëfficient.}$$

§ 34. Krümmungs-Halbmesser für beliebiges Azimut.

Nachdem der Meridian-Krümmungs-Halbmesser M und der Querkrümmungs-Halbmesser N bestimmt sind, kann man auch den Krümmungs-Halbmesser R für irgend welches Azimut α leicht angeben, wenn man den Eulerschen Satz als bekannt voraussetzt, nämlich:

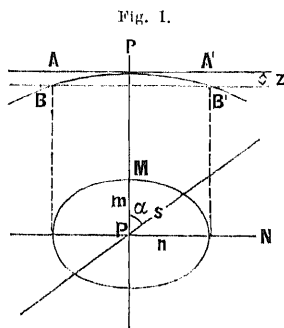
$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{M} + \frac{\sin^2 \alpha}{N} \quad (1)$$

Dieser Satz wird in der analytischen Geometrie bewiesen, und wir wollen hier eine geometrisch anschauliche Begründung des Satzes geben, welche durch einige Nebenbetrachtungen auch zum strengen Beweise entwickelt werden kann.

In Fig. 1. sei P ein Punkt des Ellipsoids mit einer Berührungs-Ebene AA' und einer Schnitt-Ebene BB' parallel AA' .

Die Ebene BB' giebt eine Schnitt-Ellipse, welche im unteren Teile von Fig. 1. dargestellt ist mit ihren Hauptaxen PM , PN und einer dritten Richtung im Azimute α . Wenn nun der Abstand der beiden Ebenen AA' und BB' sehr *klein* ist, $= z$, so lässt sich die Ordinate z durch die Krümmungs-Halbmesser M , R , N , welche nach den drei betrachteten Richtungen stattfinden, dreifach ausdrücken, in bekannter Näherung (welche z. B. auch für die Erdkrümmung bei trigonometrischer Höhenmessung angewendet wird), nämlich:

$$z = \frac{m^2}{2M} = \frac{s^2}{2R} = \frac{n^2}{2N} \quad (2)$$



Dabei besteht für die Schnitt-Ellipse mit den Halbaxen m und n die Gleichung:

$$\frac{(s \cos \alpha)^2}{m^2} + \frac{(s \sin \alpha)^2}{n^2} = 1 \quad (3)$$

Durch Verbindung von (2) und (3) erhält man den bereits oben (1) geschriebenen *Eulerschen* Satz.

Setzt man hier die Ausdrücke für M und N nach (21) § 33. S. 210 ein, nämlich:

$$M = \frac{c}{V^3} \text{ und } N = \frac{c}{V}$$

so giebt (1):

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{c} V^3 + \frac{\sin^2 \alpha}{c} V = \frac{V}{c} (\cos^2 \alpha (1 + e'^2 \cos^2 \varphi) + \sin^2 \alpha)$$

$$R = \frac{c}{V} \frac{1}{1 + e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha} \text{ oder } = \frac{N}{1 + e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha} \quad (4)$$

Die zweite hier angewendete Form für R führt auch zu einer bequemen logarithmischen Näherungs-Formel; in erster Näherung hat man:

$$\log (1 + e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha) = \mu e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \dots$$

also:

$$\log R - \log N = -\mu e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \dots \quad (5)$$

Setzt man hier $\alpha = 0$, so geht R in den Meridian-Krümmungs-Halbmesser M über, also:

$$\log M - \log N = -\mu e'^2 \cos^2 \varphi + \dots \quad (6)$$

oder

$$\log M - \log N = \log V^2 \text{ (nach (18) § 33. S. 210)}$$

Damit geben (5) und (6):

$$\log R - \log N = (\log V^2) \cos^2 \alpha \quad (7)$$

und in gleicher Weise findet man auch:

$$\log R - \log M = -(\log V^2) \sin^2 \alpha \quad (8)$$

Zu einem Beispiele wollen wir folgendes nehmen:

Zu einer trigonometrischen Höhenmessung zwischen dem Polytechnikum in Karlsruhe und dem trigonometrischen Punkte Hornsgrinde im Schwarzwald soll der Erdkrümmungs-Halbmesser in der fraglichen Sicht berechnet werden. Die Mittelbreite beider Punkte ist $\varphi = 48^\circ 48' 26,6''$ und das mittlere Azimut $\alpha = 18^\circ 55' 3,0''$. Mit diesen Werten findet man nach der strengen Formel (4):

$$\log R = 6.804\,3345$$

dagegen nach der Näherungsformel (7) oder (8)

$$\log R = 6.804\,3347$$

Die Näherungsformel (7) oder (8) giebt also hier den Wert $\log R$ nahezu auf 7 Stellen richtig; doch kann der Fehler auch etwas grösser werden. Um dieses besser beurteilen zu können, entwickeln wir die Formel (4) bis e'^4 und finden:

$$\left. \begin{aligned} \log R &= \log N - \mu e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \mu \frac{e'^4}{2} \cos^4 \varphi \cos^4 \alpha \\ &= \log N - [4.465\,1031] \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + [1.99189] \cos^4 \varphi \cos^4 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

wo die Zahlen in eckigen Klammern Coefficienten-Logarithmen bedeuten.

Man kann dieses auch auf folgende Form bringen:

$$\log R = \log N - \cos^2 \alpha (\log V^2) - \frac{\mu e'^4}{2} \cos^4 \varphi \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \quad (10)$$

$$\text{oder} \quad \log R = \log M + \sin^2 \alpha (\log V^2) - \frac{\mu e'^4}{2} \cos^4 \varphi \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \quad (11)$$

Nach diesen Formeln (9)—(11) ist die folgende Tafel berechnet worden.

*Krümmungs-Halbmesser R für verschiedene Breiten φ und verschiedene Azimute α .
Die Tafel giebt $\log R$ für Meter.*

Breite φ	A z i m u t α						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	6.80 1735	6.80 1929	6.80 2460	6.80 3187	6.80 3915	6.80 4448	6.80 4643
10°	1866	2055	2570	3274	3980	4498	4687
20°	2244	2416	2885	3527	4169	4641	4813
30°	2823	2969	3368	3913	4459	4860	5006
35°	3167	3298	3655	4143	4632	4990	5121
40°	3534	3648	3961	4388	4815	5128	5243
45°	3913	4010	4276	4641	5005	5272	5369
50°	4292	4372	4592	4893	5194	5415	5496
55°	4659	4723	4899	5138	5378	5554	5618
60°	5004	5053	5186	5369	5551	5684	5733
65°	5316	5353	5446	5577	5707	5803	5837
70°	5586	5609	5671	5756	5842	5904	5927
80°	5966	5972	5988	6010	6032	6048	6054
90°	6098	6098	6098	6098	6098	6098	6098

Hieraus kann man jeden Wert $\log R$ für beliebiges φ und α durch Interpolation auf 5 Stellen genau finden.

Innerhalb der Breiten $\varphi = 36^\circ$ und 64° ist eine ausführlichere Tafel für $\log R$ berechnet worden von *Bremiker*, und veröffentlicht in dessen „Studien über höhere Geodäsie“, Berlin 1869, S. 74—79; diese *Bremikersche* Tafel giebt $\log R$ für Toisen, 6stellig mit Intervall von 1° bei φ und α .

Ferner wird eine Tafel für $\log R$ mit Intervall $\Delta \alpha = 10^\circ$ gegeben von *Albrecht*, „Formeln und Hülftafeln für geographische Ortsbestimmungen, Leipzig 1879, S. 201.

Änderung der Erdkrümmung nach Breite und Azimut.

Wenn man das vorstehende Übersichtstäfchen in Bezug auf die Änderungen betrachtet, welche der Krümmungs-Halbmesser R in der Breite und im Azimut erfährt, so bemerkt man, dass für *gleiche* Änderungen $\Delta \varphi$ oder $\Delta \alpha$ die Änderungen $\Delta \log R$ von nahe gleicher Grössenordnung sind, und das zeigt auch die Differentiierung von $\log R$ oder von R nach φ und nach α , die beiden Differentiierungen von R nach φ und nach α geben Grössen von der Ordnung e'^2 .

Allein wenn man überlegt, welche Änderungen von R vorkommen auf einem räumlich begrenzten Vermessungsgebiete der Erde, so wird die Vergleichung der Einflüsse von φ und α ganz anders, denn auf beschränktem Gebiete der Erde ist die Breite φ nahezu konstant, dagegen trotzdem das Azimut α innerhalb seiner äussersten Grenzen 0° und 90° veränderlich.

Auf beschränktem Vermessungsgebiete sind daher die Änderungen im Azimut viel einflussreicher als die Änderungen der Breite, und man kann in solchem Falle sagen, dass die Erdkrümmungsänderungen, welche von Breitenänderung $\Delta\varphi$ herrühren, nur Grössen zweiter Ordnung sind im Vergleich mit den vom Azimut α abhängigen Krümmungs-Änderungen.

§ 35. Rektifikation der Meridian-Ellipse.

Der Meridian-Krümmungs-Halbmesser für die Breite φ ist nach (16) § 33. S. 209:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3} = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

Die Länge eines Meridianbogens sei m , also dm dessen Differential, und dieses ist bekanntlich:

$$dm = M d\varphi \quad (1a)$$

$$\text{also:} \quad m = \int M d\varphi = a(1-e^2) \int \frac{d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

Dieses ist ein elliptisches Integral zweiter Gattung; davon ist jedoch bei der Rektifikation für geodätische Zwecke nicht die Rede, indem hier Reihenentwicklungen angewendet werden, die nach Umständen bei weniger oder mehr Gliedern abgebrochen werden.

I. Integration nur bis e^2 einschliesslich.

Wenn man nur bis e^2 einschliesslich entwickeln will, so schreibt man die zu integrierende Funktion (2) kurz so:

$$F = \frac{1}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = (1-e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi + e^4 \dots \quad (3)$$

hier ist nach bekannter goniometrischer Formel:

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \quad (4)$$

und es ist:

$$\int \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi \quad (5)$$

Damit wird das allgemeine Integral in (2):

$$\int F d\varphi = \left(1 + \frac{3}{4} e^2\right) \varphi - \frac{3}{8} e^2 \sin 2\varphi \quad (6)$$

Das bestimmte Integral zwischen den Grenzen φ_1 und φ_2 ist daher:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F d\varphi = \left(1 + \frac{3}{4} e^2\right) (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{3}{8} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)$$

oder im zweiten Gliede goniometrisch umgewandelt:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F d\varphi = \left(1 + \frac{3}{4}e^2\right)(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{3}{4}e^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cos(\varphi_2 + \varphi_1) \quad (7)$$

folglich der Meridianbogen m selbst zwischen den Grenzen φ_1 und φ_2 nach (2) und (7):

$$m = a(1 - e^2) \left(\left(1 + \frac{3}{4}e^2\right)(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{3}{4}e^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cos(\varphi_2 + \varphi_1) \right) \quad (8)$$

Wenn man hier die Sinus-Reihe anwendet, nämlich:

$$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)^3}{6} + \dots$$

so erhält man:

$$m = a(\varphi_2 - \varphi_1)(1 - e^2) \left(1 + \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4}e^2 \cos(\varphi_2 + \varphi_1) + \frac{1}{8}e^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2 \cos(\varphi_2 + \varphi_1) \right) \quad (9)$$

Obgleich in diesem Ausdrucke alle Glieder von der Ordnung e^4 und darüber vernachlässigt sind, kann man doch zu vielen Zwecken davon Gebrauch machen; ja man kann noch mit einem kleinen weiteren Opfer an Genauigkeit einen sehr praktischen Satz ableiten, der sich auf den Meridian-Krümmungs-Halbmesser der *Mittelbreite* $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ bezieht. Dieser Meridian-Krümmungs-Halbmesser ist nach (1):

$$M' = \frac{a(1 - e^2)}{\left(1 - e^2 \sin^2 \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

dieses ebenfalls bis auf e^2 einschliesslich entwickelt, giebt:

$$M' = a(1 - e^2) \left(1 + \frac{3}{2}e^2 \sin^2 \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right)$$

und mit Anwendung der Formel (4):

$$M' = a(1 - e^2) \left(1 + \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4}e^2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \right)$$

Nimmt man nun diesen Krümmungs-Halbmesser M' als *Kreisbogen*-Halbmesser zu einem Centriwinkel $\varphi_2 - \varphi_1$, so erhält man einen entsprechenden Meridianbogen:

$$m' = M'(\varphi_2 - \varphi_1) = a(\varphi_2 - \varphi_1)(1 - e^2) \left(\left(1 + \frac{3}{4}e^2\right) - \frac{3}{4}e^2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \right) \quad (10)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem früheren (9), so findet man völlige Übereinstimmung in den ersten Gliedern, man hat also auch sofort die Differenz:

$$m' - m = -a(\varphi_2 - \varphi_1)(1 - e^2) \frac{e^2}{8}(\varphi_2 - \varphi_1)^2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

oder genähert, zugleich mit Zufügung der nötigen ρ :

$$m' - m = -a \frac{e^2}{8} \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\rho} \right)^3 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (11)$$

Dieses ist der Fehler der begangen wird, wenn man, nach (10), einen Ellipsen-Meridian-Bogen als *Kreisbogen* behandelt, dessen Halbmesser der Meridian-Krümmungs-Halbmesser für die *Mittelbreite* $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ ist.

Zunächst sieht man aus (11), dass der Fehler $m' - m$ verschwindet, wenn $\varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ$, d. h. wenn die Mittelbreite $= 45^\circ$ ist (vorbehaltlich der vernachlässigten Glieder von der Ordnung e^4).

Im übrigen berechnet man nach (11) zur Übersicht folgende Fehlertabelle für $(\varphi_2 - \varphi_1) = 1^\circ$:

Mittelbreite φ	Fehler $m' - m$	Fehler $m' - m$	Mittelbreite φ	(12)
0°	$-0,028^m$	$+0,028^m$	90°	
15°	$-0,024^m$	$+0,024^m$	75°	
30°	$-0,014^m$	$+0,014^m$	60°	
45°	$\mp 0,000$		45°	

Wenn man also z. B. unter der Mittelbreite $\varphi = 30^\circ$ einen Meridianbogen von 1° Weite ($\varphi_2 - \varphi_1 = 1^\circ$) mit dem Krümmungs-Halbmesser der Mittelbreite als Kreisbogen berechnet, so begeht man einen Fehler von nur $-0,014^m$, d. h. man bekommt nur 14^{mm} zu wenig, und in der Gegend von 45° beträgt der Fehler noch erheblich weniger. Hiernach ist dieses Mittelbreiten-Verfahren für viele Zwecke brauchbar; man muss aber beachten, dass bei grösseren Weiten $\varphi_2 - \varphi_1$ der Fehler sehr rasch wächst, weil er der *dritten* Potenz $(\varphi_2 - \varphi_1)^3$ proportional ist.

Ein Hilfstäfelchen von ähnlicher Art wie (12), jedoch ausführlicher und genauer, werden wir später auf S. 223 wieder finden.

II. Integration bis e^4 einschliesslich.

Will man einen Schritt weiter gehen, so hat man statt (3) nach dem *Taylor*schen Satze:

$$F = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{15}{8} e^4 \sin^4 \varphi \quad (13)$$

hiez u als bekannte goniometrische Formeln:

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi$$

dieses giebt auch $\sin^4 \varphi$, nämlich:

$$\begin{aligned} \sin^4 \varphi &= (\sin^2 \varphi)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{4} \cos^2 2\varphi \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4\varphi \\ \sin^4 \varphi &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi. \end{aligned} \quad (13a)$$

Wenn man hiernach $\sin^2 \varphi$ und $\sin^4 \varphi$ in (13) einsetzt und nach $\cos 2\varphi$ und $\cos 4\varphi$ ordnet, so erhält man:

$$F = \left(1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4\right) - \left(\frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4\right) \cos 2\varphi + \frac{15}{64} e^4 \cos 4\varphi$$

das allgemeine Integral hievon ist:

$$\int F d\varphi = \left(1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4\right) \varphi - \left(\frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4\right) \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{15}{64} \frac{e^4}{4} \sin 4\varphi \quad (14)$$

Wenn man die Grenzen φ_1 und φ_2 einführt, und wenn man zugleich die gonio-metrischen Formeln berücksichtigt:

$$\sin 2 \varphi_2 - \sin 2 \varphi_1 = 2 \sin (\varphi_2 - \varphi_1) \cos (\varphi_2 + \varphi_1)$$

$$\sin 4 \varphi_2 - \sin 4 \varphi_1 = 2 \sin 2 (\varphi_2 - \varphi_1) \cos 2 (\varphi_2 + \varphi_1)$$

so erhält man aus (14) das bestimmte Integral:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F d\varphi = \left(1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4\right)(\varphi_2 - \varphi_1) - \left(\frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4\right)\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\cos(\varphi_2 + \varphi_1) - \frac{15}{128}e^4\sin 2(\varphi_2 - \varphi_1)\cos 2(\varphi_2 + \varphi_1) \quad (15)$$

Wenn man auf die Bedeutung von F nach (13) und (2) zurückgreift, so findet man:

$$\text{Meridianbogen } m = a(1 - e^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F d\varphi \quad (16)$$

Der Meridianbogen m ist also durch (15) und (16) bestimmt.

Als besonderen Fall wollen wir den ganzen Quadranten des Meridians nehmen, und haben hiefür aus (16) und (15) mit $\varphi_1 = 0^\circ$ und $\varphi_2 = 90^\circ$, bzw. $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$:

$$\text{Meridianquadrant } Q = a \frac{\pi}{2} (1 - e^2) \left(1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + e^6 \dots\right) \quad (17)$$

$$Q = a \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 + e^6 \dots\right) \quad (18)$$

Wir wollen noch das Excentricitätsquadrat e^2 durch die Abplattung α ersetzen, nämlich nach (8) § 32. S. 206:

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2.$$

Setzt man dieses in (17) und ordnet nach Potenzen von α , so erhält man:

$$Q = a \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right) \quad (19)$$

Von dem Klammerfaktor kann man auch den Logarithmus entwickeln, wodurch man findet:

$$\log \left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right) = \mu \left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right) - \frac{\mu}{2} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2 = -\mu \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right)$$

Die Formel (19) haben wir schon in unserer Einleitung S. 7 bei Gelegenheit der älteren Gradmessungen erwähnt, und um für solche Fälle leicht den Quadranten aus der grossen Achse und der Abplattung α oder umgekehrt berechnen zu können, haben wir zu (19) folgendes Hilfstäfelchen gebildet.

Abplattung α	$\log \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right)$	Abplattung α	$\log \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right)$
1:280	0.195 3440 +	1:300	0.195 3957 +
1:285	0.195 3577 137	1:305	0.195 4076 119
1:290	0.195 3708 131	1:310	0.195 4191 115
1:295	0.195 3835 127	1:315	0.195 4308 112
1:300	0.195 3957 122	1:320	0.195 4410 107

Integration bis e^8 einschliesslich.

Man kann das im vorstehenden angewendete Verfahren beliebig weit fortsetzen; es besteht im allgemeinen darin, dass man die zu integrierende Funktion $(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}}$ nach Potenzen von $e^2 \sin^2 \varphi$ entwickelt und dann die Potenzen $\sin^2 \varphi$, $\sin^4 \varphi$, $\sin^6 \varphi$ u. s. w. in $\cos 2 \varphi$, $\cos 4 \varphi$, $\cos 6 \varphi$ u. s. w. ausdrückt und dadurch integrierbar macht.

Man könnte auch die Umwandlung der Potenzen $\sin^4 \varphi$, $\sin^6 \varphi$ u. s. w. in $\cos 2 \varphi$, $\cos 4 \varphi$, $\cos 6 \varphi$ u. s. w. successive goniometrisch machen, wie mit $\sin^4 \varphi$ bei (13a) geschehen ist; indessen für weitere Ausdehnung hat man die auf den *Moirreschen* Satz gegründeten allgemeinen Formeln, welche wir schon in (33) § 30. S. 200 zu solchem Gebrauche zusammengestellt haben.

In diesem Sinne greifen wir nochmals auf (2) und (3) zurück und entwickeln nach dem binomischen Satz:

$$(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{2} \frac{5}{4} e^4 \sin^4 \varphi + \frac{3}{2} \frac{5}{4} \frac{7}{6} e^6 \sin^6 \varphi + \frac{3}{2} \frac{5}{4} \frac{7}{6} \frac{9}{8} e^8 \sin^8 \varphi + \dots \quad (20)$$

Nach (33) S. 220 ist hier zu setzen:

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2 \varphi$$

$$\sin^4 \varphi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2 \varphi + \frac{1}{8} \cos 4 \varphi$$

$$\sin^6 \varphi = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2 \varphi + \frac{3}{16} \cos 4 \varphi - \frac{1}{32} \cos 6 \varphi$$

$$\sin^8 \varphi = \frac{35}{128} - \frac{7}{16} \cos 2 \varphi + \frac{7}{32} \cos 4 \varphi - \frac{1}{16} \cos 6 \varphi + \frac{1}{128} \cos 8 \varphi$$

Setzt man diese Ausdrücke in (20) ein und ordnet nach $\cos 2 \varphi$, $\cos 4 \varphi$ u. s. w., so bekommt man:

$$(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} = A - B \cos 2 \varphi + C \cos 4 \varphi - D \cos 6 \varphi + E \cos 8 \varphi - \dots \quad (21)$$

wobei die Coefficienten A , B u. s. w. folgende sind:

$$A = 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6 + \frac{11025}{16384} e^8 + \dots = 1,005\,037\,306\,031$$

$$B = \frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4 + \frac{525}{512} e^6 + \frac{2205}{2048} e^8 + \dots = 0,005\,047\,849\,181$$

$$C = \frac{15}{64} e^4 + \frac{105}{256} e^6 + \frac{2205}{4096} e^8 + \dots = 0,000\,010\,563\,780$$

$$D = \frac{35}{512} e^6 + \frac{315}{2048} e^8 + \dots = 0,000\,000\,020\,630$$

$$E = \frac{315}{16384} e^8 + \dots = 0,000\,000\,000\,038$$

Die zugleich hier beigelegten Zahlenwerte sind mit der *Besselschen* Excentricität berechnet. Die Reihe für A enthält die Weiter-Entwicklung der früheren Formel (17).

Die Reihe (21) lässt sich integrieren, wie früher (13), und giebt mit Zusetzung des Faktors $a(1-e^2)$ sofort den Meridianbogen vom Äquator ($\varphi = 0$) bis zur Breite φ :

$$m \int_0^\varphi = a(1-e^2) \left(\frac{A\varphi}{Q} - \frac{B}{2} \sin 2\varphi + \frac{C}{4} \sin 4\varphi - \frac{D}{6} \sin 6\varphi + \frac{E}{8} \sin 8\varphi - \dots \right) \quad (22)$$

Wenn man die schon bei (21) angegebenen Coëfficienten hier einsetzt, so bekommt man:

$$m \int_0^\varphi = 30,866\,83879\, \varphi'' - 15988,63835 \sin 2\varphi + 16,7299 \sin 4\varphi \left\{ \begin{array}{l} - 0,02178 \sin 6\varphi \\ + 0,00003 \sin 8\varphi \end{array} \right\} \quad (23)$$

Die Logarithmen der Coëfficienten sind bzw.:

$$\left. \begin{array}{lll} 1.439\,4921.536 & 4.203\,8114.8 & 1.223\,494 \\ & 8.33815 - 10 & 5.478 - 10 \end{array} \right\} \quad (23a)$$

Dabei ist im ersten Glied φ in Sekunden zu nehmen; will man hier φ in Graden nehmen, so hat man:

$$m \int_0^\varphi = 111\,120,61965\, \varphi^\circ - 15988,63835 \sin 2\varphi + \dots \left\{ \begin{array}{l} \log = 5.045\,7946.544 \\ 4.203\,8114.8 \end{array} \right\} \quad (24)$$

im übrigen dieselben Glieder wie bei (23) bzw. (23a).

Diese Formel (24) giebt auch die Länge des Erdmeridianquadranten, indem $\varphi = 90^\circ$ gesetzt, und die folgenden Glieder wegen $\sin 2\varphi = 0$ u. s. w. fortgelassen werden. Auf diese Weise findet man:

$$\text{Meridian-Quadrant } Q = 10\,000\,855,768 \text{ Meter} \quad (25)$$

Die Einführung beliebiger Grenzen lässt sich in (22) ebenso wie früher bei (14) und (15) machen, und giebt den Meridianbogen zwischen den Grenzen φ_1 und φ_2 :

$$m \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} = a(1-e^2) \left(A(\varphi_2 - \varphi_1) - B \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cos(\varphi_2 + \varphi_1) \right. \\ \left. + \frac{C}{2} \sin 2(\varphi_2 - \varphi_1) \cos 2(\varphi_2 + \varphi_1) \right. \\ \left. - \frac{D}{3} \sin 3(\varphi_2 - \varphi_1) \cos 3(\varphi_2 + \varphi_1) \right. \\ \left. + \frac{E}{4} \sin 4(\varphi_2 - \varphi_1) \cos 4(\varphi_2 + \varphi_1) + \dots \right) \quad (26)$$

Auch hier wollen wir die Coëfficienten ausrechnen und dabei $\varphi_2 - \varphi_1 = 1^\circ$ sowie $\varphi_2 + \varphi_1 = 2\varphi$ setzen, d. h. wir wollen den Meridianbogen m_1 für 1° Weite mit der Mittelbreite φ berechnen und haben:

$$m_1 = 111\,120,61965 - 558,0804 \cos 2\varphi + 1,1677 \cos 4\varphi - 0,0023 \cos 6\varphi \left\{ \begin{array}{l} \text{Coëfficienten-Logarithmen: } 2.746\,6967.9 \\ \phantom{\text{Coëfficienten-Logarithmen: }} 0.067344 \\ \phantom{\text{Coëfficienten-Logarithmen: }} 7.3580 \end{array} \right\} \quad (27)$$

Zu einem Zahlenbeispiel wollen wir den Punkt *Celle* betrachten (welcher einer der 40 preussischen Kataster-Coordinten-Nullpunkte ist). Derselbe hat die Breite $\varphi = 52^\circ 37' 32,6709''$; setzt man dieses in (23) (wobei teilweise mit 10stelligen Logarithmen zu rechnen ist), so bekommt man den Meridianbogen vom Äquator bis zu dem Punkte *Celle*:

$$m \int_0^{\text{Celle}} = 5\,847\,805,047 - 15\,425,526 - 8,492 + 0,015 \\ = 5\,832\,371,044 \quad (28)$$

Denselben Wert kann man auch aus der Hilfstafel Seite [16] des Anhangs durch Interpolation finden, wie wir schon beispielshalber in (3) § 31. S. 204 gezeigt haben.

III. Reihenentwicklung nach dem Maclaurinschen Satz.

Während die bisher behandelte Rektifikation durch *Integrieren* bewerkstelligt wurde, kann man auch durch fortgesetztes *Differentiieren* und Reihenentwicklung nach dem *Maclaurinschen* Satze eine gute Formel für die Meridianbogenlänge bekommen, namentlich wenn man dabei das Prinzip der *Mittelbreite* anwendet (das wir schon in (39), (40) und ff. im § 30. S. 201 erwähnt haben).

Wir betrachten einen Meridianbogen m , welcher zwischen den Breiten $\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}$ und $\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}$ liegt, wo also φ die Mittelbreite und $\Delta\varphi$ die Weite ist. Der Bogen m wird dadurch ebenfalls in zwei Teile m_1 und m_2 zerlegt, für deren nördlichen m_1 nach dem *Maclaurinschen* Satze eine Reihe gelten wird:

$$m_1 = \left(\frac{dm}{d\varphi}\right) \frac{\Delta\varphi}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2m}{d\varphi^2}\right) \left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3m}{d\varphi^3}\right) \left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^3 + \dots \quad (29)$$

eine entsprechende Reihe gilt für den südlichen Teil m_2 , nämlich:

$$-m_2 = -\left(\frac{dm}{d\varphi}\right) \frac{\Delta\varphi}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2m}{d\varphi^2}\right) \left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{d^3m}{d\varphi^3}\right) \left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^3 + \dots \quad (30)$$

durch Subtraktion findet man hieraus:

$$m_1 + m_2 = m = \left(\frac{dm}{d\varphi}\right) \Delta\varphi + \left(\frac{d^3m}{d\varphi^3}\right) \frac{\Delta\varphi^3}{24} \quad (31)$$

Nun wissen wir von (1a) S. 216:

$$\frac{dm}{d\varphi} = M = \frac{c}{V^3} = \frac{c}{(1 + e'^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Wenn man diese Funktion zweimal ableitet, so findet man:

$$\begin{aligned} \frac{d^2m}{d\varphi^2} &= \frac{3ce'^2 \sin \varphi \cos \varphi}{V^5} \\ \frac{d^3m}{d\varphi^3} &= \frac{3ce'^2}{V^3} \left(\frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{V^2} + \frac{5e'^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{V^4} \right) \end{aligned}$$

Damit kann man die Formel (31) zusammensetzen, wodurch man findet:

$$m = M \Delta\varphi \left\{ 1 + \frac{\Delta\varphi^2 e'^2}{8V^2} \left(\cos 2\varphi + \frac{5}{4} \frac{e'^2}{V^2} \sin^2 2\varphi \right) \right\} \quad (32)$$

Zur Zahlenrechnung hat man ϱ zuzusetzen, und zugleich wollen wir das Korrektionsglied abtrennen, d. h. schreiben:

$$m = \frac{M \Delta\varphi}{\varrho} + g \Delta\varphi^3, \text{ wo } g = \frac{M e'^2}{8V^2 \varrho^3} \left(\cos 2\varphi + \frac{5}{4} \frac{e'^2}{V^2} \sin^2 2\varphi \right)$$

Die hiernach berechneten Werte g und die entsprechenden Winkelkorrekturen $\gamma = \frac{g}{M} \varrho$, welche man zur umgekehrten Berechnung von $\Delta\varphi$ aus m braucht, sind in nachfolgender Tabelle mitgeteilt.

Korrektions-Glieder g und γ für Meridian-Bogen-Rektifizierung mit dem Krümmungshalbmesser der Mittelbreite φ .

φ	g	γ	φ	g	γ	φ	g	γ
	+	—					—	+
0°	0,0281 ^m	0,00091''	45°	+0,00024 ^m	—0,000008''	55°	0,0095 ^m	0,00031''
5°	0,0277	0,00090	46°	—0,00075	+0,000024	60°	0,0140	0,00045
10°	0,0264	0,00086	47°	—0,00174	+0,000056	65°	0,0182	0,00059
15°	0,0244	0,00079	48°	—0,00273	+0,000088	70°	0,0217	0,00070
20°	0,0217	0,00070	49°	—0,00372	+0,000120	75°	0,0247	0,00080
25°	0,0183	0,00059	50°	—0,00470	+0,000152	80°	0,0268	0,00086
30°	0,0143	0,00046	51°	—0,00567	+0,000184	85°	0,0281	0,00091
35°	0,0099	0,00032	52°	—0,00664	+0,000215	90°	0,0286	0,00092
40°	0,0051	0,00017	53°	—0,00761	+0,000246			
45°	0,0002	0,00001	54°	—0,00856	+0,000277			
			55°	—0,00951	+0,000308			

Diese Werte g sind im wesentlichen dasselbe, was die früher bei (12) angegebenen Beträge $m - m'$, d. h. die negativen Fehler.

Zu einem Zahlenbeispiel wollen wir den Meridianbogen zwischen den Breiten 47° und 53°, also 6° Weite mit der Mittelbreite $\varphi = 50^\circ$ berechnen, man hat zuerst nach der Tafel des Anhangs, S. [14] und [15] $\log M = 6.804\,2916\cdot0$ oder sofort $\log \frac{Q''}{M} = \log [1] = 8.510\,1335\cdot3$ was mit $6^\circ = 21\,600''$ das Hauptglied giebt:

$$m' = \frac{21600}{[1]} = 667\,298,611^m$$

und dazu kommt noch nach dem vorstehenden Korrektionsstäfelchen für $\varphi = 50^\circ$ und $\Delta\varphi = 6^\circ$ der Betrag:

$$-0,00470 \times 6^3 = -1,015^m.$$

Dieses zum vorigen hinzugefügt giebt:

$$m = 667\,298,611^m - 1,015^m = 667\,297,596^m.$$

Die Genauigkeit dieser Berechnung ist sehr gross, denn das nächste vernachlässigte Glied ist nur von der Ordnung $\frac{M}{160} \Delta\varphi^5 e'^2 \cos 2\varphi$, was für einen Breitenunterschied von 10° zwischen 45° und 55° nur 7^{mm} ausmacht, jedoch wegen des Faktors $\cos 2\varphi$ erheblicher wird, wenn die Mittelbreite φ weit von 45° abliegt.

Anhang zu §. 35. Parallelkreisbögen.

Im Anschluss an die in diesem § 35. behandelten Meridianbögen erwähnen wir hier auch noch kurz die Parallelkreisbögen; jedoch ist für diese keine besondere Entwicklung nötig.

Wenn N der Quer-Krümmungshalbmesser für die Breite φ , oder die Normalen-

länge nach der untenstehenden Fig. 1. ist, so ist für die Breite φ der Parallelkreis-Halbmesser $= N \cos \varphi$, also für einen Längenunterschied λ der Parallelkreisbogen:

$$p = N \cos \varphi \frac{\lambda}{\rho}$$

Hiernach sind unsere Parallelkreisbögen in der Tafel Seite [28] des Anhangs berechnet.

§ 36. Bestimmung der Oberfläche des Erd-Ellipsoids.

Bei den geodätischen Messungen und Berechnungen im engeren Sinne hat man kein Bedürfnis, die Oberflächen einzelner Zonen des Ellipsoids in der nachher zu behandelnden Weise zu kennen; jedoch besteht für Kartographie und Geographie im allgemeinen ein solches Bedürfnis, weshalb wir die Flächenberechnung hier anschliessen.

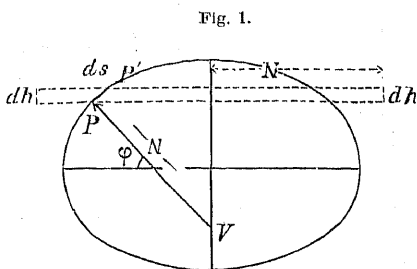


Fig. 1.

Die Oberfläche einer schmalen Zone des Umdrehungs-Ellipsoids zwischen den Breiten φ und $\varphi + d\varphi$ wird nach einem elementar-stereometrischen Satze erhalten als krumme Oberfläche eines *Cylinders*, dessen Höhe gleich der Höhe der genannten Zone ist, und dessen Halbmesser gleich der Länge der Flächennormalen N ist.

Mit Bezug auf Fig. 1. hat man daher:

$$\text{Zonen-Flächen-Element } dZ = 2N\pi \times dh:$$

$$\text{Es ist aber: } dh = ds \cos \varphi$$

$$ds = M d\varphi \quad (\text{wo } M \text{ der Meridian-Krümmungs-Halbmesser ist}).$$

$$\text{Also: } dZ = 2MN\pi \cos \varphi d\varphi \quad (1)$$

$$\text{oder auch: } dZ = 2r^2\pi \cos \varphi d\varphi \quad (2)$$

wo $r = \sqrt{MN}$ der mittlere Krümmungs-Halbmesser ist.

Setzt man hiefür nach (22 a) § 33. S. 211 seinen Wert und zugleich $a^2(1-e^2) = b^2$, so wird:

$$dZ = 2b^2\pi \frac{\cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} d\varphi \quad (3)$$

Dieses ist das Flächen-Differential einer Zone des Ellipsoids zwischen den Breiten φ und $\varphi + d\varphi$, also die Zonenfläche selbst, allgemein:

$$Z = 2b^2\pi \int \frac{\cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} d\varphi \quad (4)$$

Hier kann man entwickeln:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} &= (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-2} = 1 + \left(\frac{-2}{1}\right) e^2 \sin^2 \varphi + \left(\frac{-2-3}{1} \frac{1}{2}\right) e^4 \sin^4 \varphi + \dots \\ &= 1 + 2e^2 \sin^2 \varphi + 3e^4 \sin^4 \varphi + 4e^6 \sin^6 \varphi + 5e^8 \sin^8 \varphi + \dots \end{aligned}$$

Die zu integrierende Funktion ist also nach (4):

$$\frac{\cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} = \cos \varphi + 2e^2 \cos \varphi \sin^2 \varphi + 3e^4 \cos \varphi \sin^4 \varphi + 4e^6 \cos \varphi \sin^6 \varphi + \dots$$

Diese Glieder lassen sich einzeln unmittelbar integrieren, denn es ist allgemein:

$$\int \cos q \sin^n q dq = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} q$$

also, mit mehrfacher Anwendung dieses Integrals:

$$\int \frac{\cos q}{(1-e^2 \sin^2 q)^2} dq = \sin q + \frac{2}{3} e^2 \sin^3 q + \frac{3}{5} e^4 \sin^5 q + \frac{4}{7} e^6 \sin^7 q + \dots$$

Wenn man also auf (4) zurückgreift, und die Grenzen 0 und q einführt, so erhält man die Zonenfläche vom Äquator bis zur Breite q :

$$Z \Big|_0^q = 2b^2 \pi \sin q \left(1 + \frac{2}{3} e^2 \sin^2 q + \frac{3}{5} e^4 \sin^4 q + \frac{4}{7} e^6 \sin^6 q + \frac{5}{9} e^8 \sin^8 q + \dots \right) \quad (5)$$

Hieraus findet man auch die Zone zwischen den zwei Breiten q_1 und q_2 , indem man die vorstehende Funktion (5) für $q = q_1$ und für $q = q_2$ bildet, und beides subtrahiert:

$$Z \Big|_{q_1}^{q_2} = 2b^2 \pi \left(\sin q_2 - \sin q_1 + \frac{2}{3} e^2 (\sin^3 q_2 - \sin^3 q_1) + \frac{3}{5} e^4 (\sin^5 q_2 - \sin^5 q_1) + \dots \right) \quad (6)$$

Hier kann man nach (33) § 30, S. 200 setzen:

$$\sin^3 q_2 = \frac{3}{4} \sin q_2 - \frac{1}{4} \sin 3q_2$$

$$\sin^5 q_2 = \frac{5}{8} \sin q_2 - \frac{5}{16} \sin 3q_2 + \frac{1}{16} \sin 5q_2 \quad \text{u. s. w.}$$

folglich:

$$\sin^3 q_2 - \sin^3 q_1 = \frac{3}{4} (\sin q_2 - \sin q_1) - \frac{1}{4} (\sin 3q_2 - \sin 3q_1)$$

$$\sin^5 q_2 - \sin^5 q_1 = \frac{5}{8} (\sin q_2 - \sin q_1) - \frac{5}{16} (\sin 3q_2 - \sin 3q_1) + \frac{1}{16} (\sin 5q_2 - \sin 5q_1)$$

Zugleich ist goniometrisch:

$$\sin q_2 - \sin q_1 = 2 \sin \frac{q_2 - q_1}{2} \cos \frac{q_2 + q_1}{2}$$

$$\sin 3q_2 - \sin 3q_1 = 2 \sin 3 \frac{q_2 - q_1}{2} \cos 3 \frac{q_2 + q_1}{2}$$

$$\sin 5q_2 - \sin 5q_1 = 2 \sin 5 \frac{q_2 - q_1}{2} \cos 5 \frac{q_2 + q_1}{2}$$

Setzt man all dieses in (6), und ordnet nach den Funktionen $\sin \frac{q_2 - q_1}{2}$,

$\sin 3 \frac{q_2 - q_1}{2}$ u. s. w., so bekommt man:

$$\begin{aligned} Z \Big|_{q_1}^{q_2} = 4b^2 \pi \Big\{ & \sin \frac{q_2 - q_1}{2} \cos \frac{q_2 + q_1}{2} \\ & + \frac{2}{3} e^2 \left(\frac{3}{4} \sin \frac{q_2 - q_1}{2} \cos \frac{q_2 + q_1}{2} - \frac{1}{4} \sin 3 \frac{q_2 - q_1}{2} \cos 3 \frac{q_2 + q_1}{2} \right) \\ & + \frac{3}{5} e^4 \left(\frac{5}{8} \sin \frac{q_2 - q_1}{2} \cos \frac{q_2 + q_1}{2} - \frac{5}{16} \sin 3 \frac{q_2 - q_1}{2} \cos 3 \frac{q_2 + q_1}{2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{16} \sin 5 \frac{q_2 - q_1}{2} \cos 5 \frac{q_2 + q_1}{2} \right) + \dots \Big\} \end{aligned}$$

$$Z \Big]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 4 b^2 \pi \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 + \dots \right) \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{6} e^2 + \frac{3}{16} e^4 + \dots \right) \sin 3 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos 3 \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{80} e^4 + \dots \right) \sin 5 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos 5 \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \right. \\ \left. + \dots \dots \dots \right\} \quad (7)$$

Wir haben diese Entwicklung in aller Ausführlichkeit bis e^4 hier geschrieben, die Weiter-Entwicklung bietet keine Schwierigkeit, wir wollen deren Ergebnis bis e^8 hersetzen, dabei aber zur Abkürzung schreiben:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta \varphi \quad , \quad \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi$$

Damit wird die Zonenfläche von der Weite $\Delta \varphi$ und mit der Mittelbreite φ :

$$Z = 4 b^2 \pi \left\{ A \cos \varphi \sin \frac{\Delta \varphi}{2} - B \cos 3 \varphi \sin 3 \frac{\Delta \varphi}{2} \right. \\ \left. + C \cos 5 \varphi \sin 5 \frac{\Delta \varphi}{2} - D \cos 7 \varphi \sin 7 \frac{\Delta \varphi}{2} \right. \\ \left. + E \cos 9 \varphi \sin 9 \frac{\Delta \varphi}{2} - \dots \dots \dots \right\} \quad (8)$$

Dabei haben die Coëfficienten A , B u. s. w. folgende Bedeutungen und Zahlenwerte für Besselsches e^2 :

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 + \frac{5}{16} e^6 + \frac{35}{128} e^8 + \dots = 1,003 \, 353 \, 984 \, 792 \\ B &= \frac{1}{6} e^2 + \frac{3}{16} e^4 + \frac{3}{16} e^6 + \frac{35}{192} e^8 + \dots = 0,001 \, 120 \, 804 \, 092 \\ C &= \frac{3}{80} e^4 + \frac{1}{16} e^6 + \frac{5}{64} e^8 + \dots = 0,000 \, 001 \, 689 \, 260 \\ D &= \frac{1}{112} e^6 + \frac{5}{256} e^8 + \dots = 0,000 \, 000 \, 002 \, 694 \\ E &= \frac{5}{2304} e^8 + \dots = 0,000 \, 000 \, 000 \, 004 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Fläche einer Grad-Abteilung.

Die Formel (8) mit dem Coëfficienten (9) giebt mit $\Delta \varphi = 1^\circ$ die Fläche eines Ringes von 1° Breite, der um die ganze Erde herumgeht, d. h. 360° Länge hat. Häufiger als die Fläche dieses ganzen Ringes braucht man den 360sten Teil derselben, d. h. eine „Grad-Abteilung“, oder ein Trapez, welches durch zwei Meridiane und durch zwei Parallelkreise, beide im Abstände von je 1° , begrenzt ist.

Die krumme Oberfläche einer solchen Grad-Abteilung mit der Mittelbreite φ ist also:

$$G = \frac{b^2 \pi}{90} \left\{ A \sin 30' \cos \varphi - B \sin 1^\circ 30' \cos 3 \varphi + C \sin 2^\circ 30' \cos 5 \varphi \right. \\ \left. - D \sin 3^\circ 30' \cos 7 \varphi + E \sin 5^\circ 30' \cos 9 \varphi - \dots \right\} \quad (10)$$

Wenn man hier alles Konstante ausrechnet, so findet man für Quadratkilometer

$$\left. \begin{array}{ll} G = 12347,58347 \cos \varphi & (\log \text{ Coëff.} = 4.091\,5819\,705) \\ - & 41,37468 \cos 3\varphi \quad (\quad \quad = 1.616\,7346\,5) \\ + & 0,103911 \cos 5\varphi \quad (\quad \quad = 9.016\,662 - 10) \\ - & 0,000232 \cos 7\varphi \quad (\quad \quad = 6.365\,28 - 10) \\ + & 0, \dots \cos 9\varphi \quad (\quad \quad = 3.678 - 10) \end{array} \right\} \quad (10a)$$

Die Messtischblätter der Preussischen Topographie im Massstab 1:25 000 haben in der Breite $\Delta \varphi = 6'$ und in der Länge $10'$, und hierfür wird:

$$G' = \frac{b^2 \pi}{540} \left\{ A \sin 3' \cos \varphi - B \sin 9' \cos 3\varphi + C \sin 15' \cos 5\varphi - D \sin 21' \cos 7\varphi \right\} \quad (11)$$

oder mit ausgerechneten Coëfficienten, für Quadratkilometer:

$$G' = 205,79564 \cos \varphi - 0,689656 \cos 3\varphi + 0,001732 \cos 5\varphi - 0,0000039 \cos 7\varphi \quad (12)$$

Die Logarithmen dieser Coëfficienten sind:

$$\begin{array}{llll} 2.313\,4361\,8 & 9.838\,6325 & 7.238\,647 & 4.5874 \end{array} \quad (12a)$$

Anmerkung zu § 36.

Wir haben in der vorstehenden Entwicklung die Integration (4) sofort in einer Reihe behandelt, weil wir dadurch am kürzesten zu den Formeln (8), (10) und (11) geführt worden sind, welche zum praktischen Rechnen die bequemsten sind.

Indessen kann man die Integration von (4) auch in geschlossener Form, streng, ausführen; und um zu zeigen, dass man auf diesem Wege zwar eine mathematisch elegantere Formel erhält, welche aber für die numerische Anwendung unbequemer ist als unsere bereits entwickelten Reihen, soll die strenge Integration hier angegeben werden.

Nach (4) ist der allgemeine Ausdruck für die Zonenfläche:

$$Z = 2b^2 \pi \int \frac{\cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} d\varphi \quad (13)$$

Zu dieser Integration hat die Integralrechnung eine Umformung, welche wir später als Einführung der reduzierten Breite ψ für weitere geodätische Zwecke kennen lernen werden, welche jedoch hier nur als algebraisches Hilfsmittel auftritt. Es wird nämlich ein Winkel ψ eingeführt, entsprechend der Gleichung:

$$\tan \psi = \tan \varphi \sqrt{1 - e^2} \quad (14)$$

damit wird (13) auf folgende Form gebracht:

$$Z = \frac{2b^2 \pi}{\sqrt{1 - e^2}} \int \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}}{\sqrt{1 - e^2}} \cos \psi d\psi \quad (15)$$

Setzt man hier weiter $\sin \psi = \xi$, also $\cos \psi d\psi = d\xi$, und $\frac{e^2}{1 - e^2} = e'^2$, so hat man eine Integration von der Form:

$$\int \sqrt{1 + e'^2 \xi^2} d\xi = \frac{\xi}{2} \sqrt{1 + e'^2 \xi^2} + \frac{1}{2e'} \ell \left(\xi + \frac{1}{e'} \sqrt{1 + e'^2 \xi^2} \right)$$

Wenn man nach der Integration wieder auf die Veränderliche ψ zurückgeht, und zugleich die Integrations-Grenzen einführt, so erhält man die Zonenfläche:

$$Z \Big|_0^\varphi = \frac{b^2}{\sqrt{1 - e^2}} \pi \left\{ \sin \psi \sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \psi} + \frac{1}{e'} \ell (e' \sin \psi + \sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \psi}) \right\}$$

Wenn man endlich nach (14) von der reduzierten Breite wieder zur geographischen Breite φ zurückkehrt, so erhält man:

$$Z \Big|_0^{\varphi} = b^2 \pi \left\{ \frac{\sin \varphi}{W^2} + \frac{1}{e} \iota \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{W} \right) \right\} \quad (16)$$

Dieses ist der gesuchte *geschlossene* Ausdruck, welcher dasselbe bedeutet wie die frühere Reihe (5); und da der geschlossene Ausdruck (16) selbst zur Rechnung unbequem ist, kann man denselben auch in eine Reihe entwickeln, nämlich:

$$\frac{1}{W^2} = 1 + e^2 \sin^2 \varphi + e^4 \sin^4 \varphi + e^6 \sin^6 \varphi + \dots$$

$$\iota \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{W} \right) = e \sin \varphi + \frac{e^3}{3} \sin^3 \varphi + \frac{e^5}{5} \sin^5 \varphi + \frac{e^7}{7} \sin^7 \varphi$$

und damit geht (16) leicht in das frühere (5) über.

Man hat also durch Reihen-Entwicklung *nach* der Integration auf einem Umweg dasselbe erhalten, was die Reihen-Entwicklung *vor* der Integration auf kürzestem Wege gegeben hat.

Ausser zum klaren Erkennen dieses Verhältnisses mag indessen die strenge Integration mit der Formel (16) in einzelnen Fällen Dienste leisten, z. B. mit $\varphi = 90^\circ$ giebt dieselbe die Gesantoberfläche des Erd-Ellipsoids, nach einer kleinen Umformung:

$$2Z \Big|_0^{90} = E = 2a^2 \pi \left\{ 1 + \frac{1-e^2}{2e} \frac{1}{\mu} \log \frac{1+e}{1-e} \right\}$$

Dieses muss übereinstimmen mit der Formel (5), wenn man daselbst $\varphi = 90^\circ$ setzt, wodurch man erhält:

$$E = 4b^2 \pi \left(1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{3}{5} e^4 + \frac{4}{7} e^6 + \frac{5}{9} e^8 + \dots \right) \quad (17)$$

Die Ausrechnung giebt nach beiden Formeln übereinstimmend:

$$E = 509\,950\,714,2 \text{ Quadrat-Kilometer} \quad (18)$$

Denkt man sich nun eine Kugel vom Halbmesser f , welche gleiche Oberfläche E haben soll, so bestimmt sich f dadurch:

$$f = \sqrt{\frac{E}{4\pi}} = 6\,370\,289,511^m \quad (19)$$

§ 37. Mittlerer Halbmesser der Erde als Kugel.

Die letzte Betrachtung leitet uns noch über zu einer Frage, welche kaum geodätischer Natur ist, welche aber in diesem Zusammenhange wohl zu stellen ist, nämlich welchen Halbmesser man einer *Kugel* zuteilen soll, welche zu manchen Näherungsberechnungen u. s. w. der ellipsoidischen Erde substituiert werden kann.

Der nächste Gedanke ist, das arithmetische Mittel der drei Halbaxen des Ellipsoids zu diesem Zwecke zu benutzen, d. h. zu setzen:

$$\frac{a + a + b}{3} = r \quad (1)$$

Die Ausrechnung giebt:

$$\left. \begin{array}{l} a = 6\,377\,397,155^m \\ a = 6\,377\,397,155 \\ b = 6\,356\,078,963 \end{array} \right\} \frac{a + a + b}{3} = 6\,370\,291,091^m \quad (2)$$

Zur Vergleichung mit dem folgenden kann man auch den Wert r nach (1) in eine Reihe entwickeln, nämlich:

$$r = \frac{2a + a\sqrt{1-e^2}}{3} = \frac{a}{3} \left(2 + 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \dots \right)$$

$$r = a \left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{1}{24}e^4 - \frac{1}{48}e^6 \right) \quad (3)$$

Nach diesem kann man die am Schlusse des vorigen § 36. S. 228 eingeführte Kugel betrachten, welche mit dem Erd-Ellipsoid gleiche Oberfläche E hat. Aus der Reihe für E (17) S. 228) folgt, dass der Halbmesser f der fraglichen Kugel sein muss:

$$f = a\sqrt{1-e^2} \sqrt{1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \dots}$$

$$f = a \left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8} - \frac{e^6}{16} \right) \left(1 + \frac{1}{3}e^2 + \frac{11}{45}e^4 + \frac{193}{945}e^6 \right)$$

$$f = a \left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{17}{360}e^4 - \frac{67}{3024}e^6 \right) \quad (4)$$

Die Vergleichung mit (3) giebt:

$$f = r \left(1 - \frac{1}{180}r^4 - \frac{17}{7560}r^6 \right) \quad (5)$$

Die Ausrechnung hiernach giebt:

$$f = 6\,370\,291,091^m - 1,577^m - 0,004^m = 6\,370\,289,510^m \quad (6)$$

Dieses stimmt genügend mit dem früher auf zwei anderen Wegen berechneten Werte (19) § 36. S. 228.

Als dritter Mittelwert bietet sich der Halbmesser k derjenigen Kugel, welche mit dem Erd-Ellipsoid gleichen körperlichen Inhalt hat.

Der Inhalt des Umdrehungs-Ellipsoids wird bekanntlich dadurch gefunden, dass man eine Kugel mit dem Äquator-Halbmesser a , also mit dem Inhalt $\frac{4}{3}\pi a^3$, in der Richtung der Umdrehungsaxe im Verhältnis $b:a$ zusammengedrückt denkt, d. h. es ist:

$$\text{Körperinhalt des Erd-Ellipsoids} = \frac{b}{a} \left(\frac{4}{3}\pi a^3 \right) = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

Wenn eine Kugel vom Halbmesser k denselben Inhalt haben soll, so muss sein:

$$k^3 = a^2 b \quad \text{oder} \quad k = \sqrt[3]{a^2 b} = a \sqrt[3]{1 - e^2} \quad (7)$$

Dieses kann man entwickeln:

$$k = a \left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{5}{72}e^4 - \frac{55}{1296}e^6 \right) \quad (8)$$

Nimmt man wieder das arithmetische Mittel r der 3 Halbaxen nach (3) zur Vergleichung, und entwickelt, so erhält man:

$$k = r \left(1 - \frac{1}{36}e^4 - \frac{17}{648}e^6 \right) \quad (9)$$

Die Ausrechnung giebt:

$$k = 6\,370\,291,091^m - 7,8828^m - 0,0497^m = 6\,370\,283,158^m \quad (10)$$

Dieses ist auch in Übereinstimmung mit einer unmittelbaren Ausrechnung nach (7).

Zur Übersicht stellen wir nochmals die drei gefundenen Werte zusammen:

$$1) \text{ Arithmetisches Mittel } \frac{a + a + b}{3} = r = 6\,370\,291,091^m$$

$$2) \text{ Halbmesser für gleiche Oberfläche } f = 6\,370\,289,510^m$$

$$3) \text{ Halbmesser für gleichen Inhalt } \sqrt[3]{a^2 b} = k = 6\,370\,283,158^m$$

Wie man sieht, sind diese Werte nahezu gleich, und für viele Zwecke auch gleich geeignet.

Im Anschluss hieran sind noch einige Untersuchungen zu erwähnen, welche sich auf verschiedene Mittelwerte von Erdhalbmessern in Hinsicht auf Krümmung beziehen:

Dienger, Abbildung krummer Oberflächen, Braunschweig 1858, S. 41.

Grunert. Über die Normalschnitte des Ellipsoids u. s. w., *Grunerts Archiv der Mathematik u. Physik*, 40. Teil 1863, S. 259–354, insbesondere S. 312 und: Wichtiger allgemeiner Satz von den Flächen, *Grunerts Archiv* 41. Teil 1864, S. 241–296, insbesondere S. 292.

Helmert. Die mathem. u. physikal. Theorien der höheren Geodäsie I. Leipzig 1880, S. 63–68.

Czuber. Mittelwerte, die Krümmung ebener Kurven und Krümmungsflächen betreffend, *Grunert-Hoppes Archiv der Math. u. Ph.* Zweite Reihe. 6. Teil 1888, S. 294–304.

§ 38. Hilfstafeln zu geodätischen Berechnungen mit den *Besselschen* Erddimensionen.

Auf die *Besselschen* Angaben für die Erddimensionen sind schon zahlreiche Tabellen-Berechnungen gegründet worden, wie die folgende Zusammenstellung zeigt:

Encke. Über die Dimensionen des Erdkörpers nebst Tafeln nach *Bessels* Bestimmung. Berl. astr. Jahrb. für 1852 S. 318–381 und Separatabdruck: *Enckes* astr. Abhandlungen 2. Band, Berlin 1866. Diese *Enckeschen* Tafeln sind zunächst für astronomische Parallelaxenberechnungen bestimmt, und geben daher zuerst die *geocentrische* Breite und den *geocentrischen* Halbmesser (entsprechend φ und OP in unserer Fig. 1. S. 205), d. h. Grössen, welche in der Geodäsie selten gebraucht werden. Ausserdem giebt *Encke* auch Zahlenwerte für geodätischen Gebrauch, namentlich Tafel II, Meridianbogen vom Äquator bis zur Breite φ , mit Intervall $\Delta\varphi = 10'$ von $\varphi = 0^\circ$ bis $\varphi = 90^\circ$, in Toisen-Maas, auf 0,001 Toise.

Steinhauser. Neue Berechnung der Dimensionen des Erdsphäroids. *Petermanns geogr. Mitteilungen* 1858 S. 465–468.

Bremiker. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit 6 Dezimalstellen. S. 520–624.

Bremiker. Studien über höhere Geodäsie. Berlin 1869. S. 70–81.

Börsch. Anleitung zur Berechnung der rechtwinkligen Coordinaten u. s. w. Cassel 1869 und Tafeln für geodätische Berechnungen zwischen den geographischen Breiten von 35° und 71° . Cassel 1869. Zweite Auflage Anleitung mit Tafeln. Cassel 1885.

Projektions tables for the use of the United States navy, Bureau of navigation. Washington, Government printing office, 1869.

Wagner. Die Dimensionen des Erdsphäroids nach *Bessels* Elementen. Geographisches Jahrbuch, herausgegeben von *Behm*. III. Band. Gotha 1870. S. 1–131.

F. G. Gauss. Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst. Berlin 1876. Zweiter Teil.

Schreiber. Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme. Formeln und Tafeln zur Berechnung der geographischen Coordinaten aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten. Erste Ordnung. Berlin 1878. Im Selbstverlage; zu beziehen durch die Königliche Hofbuchhandlung von *H. S. Müller & Sohn*, Kochstrasse 69. 70. *log* [1]

und $\log [2]$ von $\varphi = 47^\circ 0'$ bis $57^\circ 0'$ mit Intervall $\Delta\varphi = 1'$ auf 0.1 genau. Entsprechende Tafeln für zweite Ordnung 7stellig und für dritte Ordnung 6stellig.

Albrecht. Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, nebst kurzer Anleitung zur Ausführung derselben, von Prof. Dr. Th. Albrecht, Sektionschef im Königl. Preuss. Geodätischen Institut. Zweite Auflage. Berlin 1879. S. 197–213.

Helmert. Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. I. Teil. Leipzig 1880. Anhang S. 621–631 giebt $\log W = \log \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$ von $\varphi = 47^\circ 0'$ bis $57^\circ 0'$ mit Intervall $\Delta\varphi = 5'$ auf 0.0001, d. h. 11stellig, ferner $\log W$ 8stellig (auf 0.1 genau), durch den ganzen Quadranten mit $\Delta\varphi = 10'$.

Bick-Tillo. Russische Übersetzung von *Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde, 2. Auflage, übersetzt von A. Bick, Oberlehrer der Geodäsie am Messinstitut des Grossfürsten Constantin. Moskau 1881. Buchhändler N. J. Mamontowa. Diese Übersetzung giebt, an Stelle der Tafel S. 424–427 des Originals, nun ihrerseits auf S. 652–665 eine von dem Obersten des Russischen Generalstabs A. A. Tillo berechnete Tafel der Coefficienten für die *Gauss'schen* Mittelbreiten-Formeln; insbesondere $\log [1]$ und $\log [2]$ für $\varphi = 34^\circ 0'$ bis $\varphi = 70^\circ 0'$ mit $\Delta\varphi = 10'$, auf 0.1 genau. Es ist jedoch hierbei eine andere Längeneinheit als die *Besselsche* zu Grunde gelegt, denn die russischen $\log [1]$ und $\log [2]$ haben gegen unsere mit *Besselschen* Erddimensionen berechneten $\log [1]$ und $\log [2]$ eine konstante Differenz von 371.6, welche zu berücksichtigen ist.

Behm. Mitteilungen des K. K. militär-geographischen Instituts, herausgegeben auf Befehl des K. K. Reichs-Kriegs-Ministeriums. III. Band, 1883. Wien 1883. Im Selbstverlage des K. K. militär-geogr. Instituts. S. 137–177. Tafeln der Krümmungs-Halbmesser des *Besselschen* Erdsphäroids für die Breiten von $\varphi = 40^\circ 0'$ bis $51^\circ 30'$ mit Intervall $\Delta\varphi = 1'$ auf 0.0001, d. h. auf 11 Logarithmenstellen genau.

Schols. Geodetische Formules en Tafels, ten gebruike bij de Triangulatie van het eiland Sumatra. Utrecht, J. van Boekhoven, 1884. Diese Tafeln geben von $\varphi = 0^\circ 0'$ bis $6^\circ 0'$ die Krümmungs-Halbmesser auf 0.1 genau, nebst weiteren Zahlenwerten.

Dr. Hermann Wagner's Tafeln der Dimensionen des Erdsphäroids, auf Minuten-Dekaden erweitert von A. Steinhilber. K. K. Regierungsrat. Wien 1885. Eduard Hölzel.

Helmert. Veröffentlichung des Kgl. Preuss. Geodätischen Instituts. Lotabweichungen. Heft I. Formeln und Tafeln u. s. w. Berlin, Druck und Verlag von P. Stankiewicz' Buchdruckerei. 1886. Tafeln im Anhang S. 6–26; hievon giebt S. 18–24 für $\varphi = 30^\circ$ bis 71° 8stellige Werte $\log [1]$ und $\log [2]$, welche bzw. die dekadischen Ergänzungen unserer $\log [2]$ und $\log [1]$ sind.

Im Anhang unseres Buches, S. [2] und folgende, sind zahlreiche Hilfstafeln mitgeteilt, welche grösstenteils für diesen Zweck von uns neu und unabhängig berechnet, oder wenigstens vor der teilweisen Entlehnung gründlich revidiert worden sind.

Über unsere grosse Haupttafel Seite [2]–[23] ist der Berechnungs-Nachweis bereits in § 33. S. 212–213 gegeben; doch wurde die *Helmert'sche* 10stellige Tafel für $\log W$ von 47° bis 57° , sowie die Tafeln von *Behm* und *Schols* nur von 1° zu 1° nachgerechnet, im übrigen als durch ihre eigenen Differenzen interpoliert angenommen.

Die Tafel Seite [24]–[25] für die Längen- und Breitengrade und für die Grad-Abteilungsflächen ist zunächst nach *Bremiker* und *Wagner* angesetzt, dann aber eingehend nachgerechnet; die hierbei gefundenen wenigen Fehler sind in dem geographischen Jahrbuch von *Behm*, VI. Band, 1876, S. 703 mitgeteilt.

Die Meridianbogen-Tafel Seite [26] ist nur ein ergänzter Auszug aus der grösseren Tafel von *F. G. Gauss*.

Kapitel IV.

Sphärische Dreiecksberechnung.

§ 39. Wahl eines Kugelhalbmessers.

Die Dreiecke einer Haupt-Triangulierung werden in der Regel als *sphärische* Dreiecke berechnet, indem man als zugehörigen Kugelhalbmesser den *mittleren* Krümmungs-Halbmesser nach der schon früher (in (22) § 33. S. 211) gegebenen Definition nimmt, nämlich:

$$r = \sqrt{MN} = \frac{a(1-e^2)}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \quad \text{oder} \quad = \frac{c}{1+e'^2 \cos^2 \varphi} \quad (1)$$

d. h. es ist r das *geometrische* Mittel der beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser M und N des Ellipsoids in der Breite φ , wobei φ als *Mittelbreite*, etwa für den Schwerpunkt des Dreiecks genommen wird.

Dieser durch die Gleichung (1) bestimmte Wert r bietet sich von selbst als bequemster dar, wenn man für *logarithmische* Rechnung überhaupt einen Mittelwert aus $\log M$ und $\log N$ haben will, denn es ist dann:

$$\log r = \frac{\log M + \log N}{2} \quad (2)$$

Für diese Wahl spricht auch der von *Grunert* (vgl. die Literaturangaben am Schlusse von § 37. S. 230) gefundenen Satz, dass der mittlere Krümmungs-Halbmesser $r = \sqrt{MN}$ zugleich das *arithmetische* Mittel aller Normalschnitts-Krümmungshalbmesser R in einem Punkte ist.

Man hat nämlich die Summe aller Werte R nach (1) § 34. S. 213:

$$[R] = \int_0^{2\pi} \frac{MN}{M \sin^2 \alpha + N \cos^2 \alpha} d\alpha$$

und die Anzahl derselben ist entsprechend $n = 2\pi$, also der Mittelwert:

$$\frac{[R]}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{MN}{M \sin^2 \alpha + N \cos^2 \alpha} d\alpha$$

Zur Integration führt man eine neue Veränderliche ein:

$$\sqrt{\frac{M}{N}} \tan \alpha = v, \quad \text{also} \quad \sqrt{\frac{M}{N}} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = dv$$

wodurch die Integration sich reduziert auf:

$$\int \frac{dv}{1+v^2} = \arctan v$$

Und setzt man noch die Grenzen ein, so findet man:

$$\frac{[R]}{n} = \sqrt{MN} = r \quad (3)$$

Als weitere Begründung der Annahme von $r = \sqrt{MN}$ kann auch die Differential-Formel für die Ellipsoidfläche (2) § 36. S. 224 dienen, in welcher derselbe Wert r vorkommt.

Indessen liegt die beste Begründung der *sphärischen* Dreiecks-Berechnung mit irgend einem nach Gutdünken angenommenen Kugel-Halbmesser r zunächst in dem Umstande, dass man bei den Dreiecks-Berechnungen meist nur einen Näherungswert von $\frac{1}{r^2}$ auf wenige Stellen genau braucht, so dass es augenscheinlich ziemlich gleichgültig ist, welchen der verschiedenen überhaupt in Frage kommenden Halbmesser-Werten man nimmt, und deswegen nimmt man sich auch oft nicht die Mühe, für jedes Dreieck einen besonderen, der jeweiligen Breite q entsprechenden Wert r zu berechnen, sondern man nimmt oft sogar für ganze Triangulierungsgebiete einen *konstanten* Kugel-Halbmesser r an. (Bestimmteres hieüber wird sich erst später mit der Theorie der geodätischen Linie sagen lassen.)

§ 40. Der sphärische Excess.

Die Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks ist stets grösser als 180° ; der Überschuss der Winkelsumme über 180° heisst der *sphärische Excess*. Bezeichnen wir die Winkel mit α, β, γ und den sphärischen Excess mit ε , so haben wir also die Gleichung:

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ \quad (1)$$

Wenn die drei Winkel α, β, γ gemessen sind, so findet man hiernach auch den Excess ε , jedoch offenbar mit den Messungsfehlern der α, β, γ behaftet; es ist deswegen erwünscht, eine unabhängige scharfe Bestimmung von ε zu haben, welche von den kleinen Messungsfehlern der Winkel α, β, γ unabhängig ist, und im Gegenteil dazu dienen soll, diese Winkel α, β, γ in ihrer Summe zu kontrollieren.

Eine solche unabhängige Bestimmung des Excesses ε erhält man durch den Satz, dass der Excess der *Dreiecksfläche* F proportional ist, nämlich:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2} Q \quad (2)$$

Man kann diesen Satz mit Hilfe der sphärischen Zweiecke beweisen, und wegen der Wichtigkeit desselben setzen wir den bekannten elementaren Beweis des Satzes hier her:

Unter *Zwei-Eck* versteht man die Fläche zwischen zwei grössten Kreisen, z. B. nach Fig. 1. die Fläche:

$$\text{Zwei-Eck } A C A' B A = (\alpha, \alpha)$$

da nun die Gesamt-Oberfläche der Kugel $= 4\pi r^2$ ist, so ist offenbar die Fläche:

$$\text{Zwei-Eck } (\alpha, \alpha) = \frac{\alpha}{360} (4\pi r^2)$$

Wenden wir entsprechende Zeichen auch für die beiden anderen in dem Dreieck ABC zusammenstossenden Zwei-Ecke an, so haben wir:

$$\text{Zwei-Eck } (\beta, \beta) = \frac{\beta}{360} (4\pi r^2)$$

$$\text{Zwei-Eck } (\gamma, \gamma) = \frac{\gamma}{360} (4\pi r^2)$$

folglich die Summe:

$$(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{360} (4\pi r^2) \quad (a)$$

Indem man nun die Fläche F des sphärischen Dreiecks ABC einführt, hat man nach dem Anblick von Fig. 1:

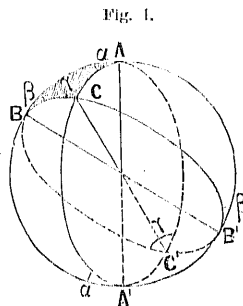


Fig. 1.

$$(\alpha, \alpha) = F + A'BC$$

$$(\beta, \beta) = F + B'AC$$

$$(\gamma, \gamma) = F + C'AB$$

$$(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) = 3F + A'BC + B'AC + C'AB$$

Nun ist aber das auf der jenseitigen Kugelfläche von Fig. 1. liegende Dreieck $C'AB$ flächengleich mit seinem diesseits liegenden Scheiteldreieck $CA'B$; man hat also nun, indem man zugleich $3F = 2F + F$ schreibt:

$$(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) = 2F + F + A'BC + B'AC + C'AB$$

Die 4 letzten Glieder dieser Gleichung geben zusammen die halbe Kugelfläche $= 2\pi r^2$, es ist also:

$$(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) = 2F + 2\pi r^2 \quad (b)$$

Nun geben die Gleichungen (a) und (b) zusammen:

$$F = (\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ) \frac{\pi}{180^\circ} r^2 \quad (c)$$

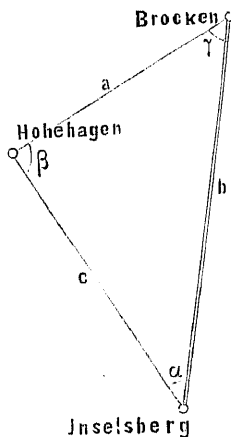
Wenn man also die Bezeichnung ε nach (1) anwendet, so hat man aus (c), wenn man zugleich $\frac{180^\circ}{\pi} = Q$ schreibt, dieselbe Gleichung wie (2), nämlich:

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = \varepsilon = \frac{F}{r^2} Q \quad (d)$$

Unter F ist streng genommen die *krumme* (kugelförmige) Oberfläche des Dreiecks zu verstehen, indessen kann man statt dessen mit genügender Annäherung auch die Fläche \triangle eines *ebenen* Dreiecks benutzen, das aus den Seiten des sphärischen Dreiecks berechnet wird, d. h. man hat:

$$\text{Annäherung } \varepsilon = \frac{\triangle}{r^2} Q \quad (3)$$

Fig. 2.
(Massstab 1 : 2 000 000.)



Zu einem Zahlenbeispiele wollen wir das hannoversche Dreieck benutzen, welches in den klassischen Abhandlungen von Gauss mehrfach als Beispiel dient, nämlich das in Fig. 2. dargestellte Dreieck:

Inselsberg — Hohehagen — Brocken*).

Es sei gegeben:

$$\text{die Seite Inselsberg—Brocken } b = 105\,972,85'' \quad (4)$$

ferner die Dreieckswinkel, genähert, und die geographischen Breiten q der Eckpunkte, ebenfalls genähert:

Punkt	Dreiecks-Winkel	Geogr. Breite
Inselsberg .	$\alpha = 40^\circ 39' 30'' (25'')$	$50^\circ 51' 9''$
Hohehagen .	$\beta = 86 \quad 13 \quad 59 (54'')$	$51 \quad 28 \quad 31$
Brocken . .	$\gamma = 53 \quad 6 \quad 46 (41'')$	$51 \quad 48 \quad 2$

$$\text{Summe } 180^\circ \quad 0' \quad 15'' (0'') \quad q = 51^\circ 22' 34''$$

Mittel (5)

Die auf $1''$ genau angegebenen Dreieckswinkel gehen die Summe $180^\circ 0' 15''$, d. h. einen Überschuss von $15''$

*) Die Seiten und Winkel dieses Dreiecks werden an verschiedenen Stellen nicht übereinstimmend angegeben: Gauss, Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie erste Abhandlung, 1843, Art. 14. und zweite Abhandlung 1846, Art. 35. Gerling, Beiträge zur Geographie Kurhessens 1839, S. 183. Generalbericht der europ. Gradm. für 1865, S. 48—50. Unsere Berechnung hat aus diesen verschiedenen Angaben eine willkürliche Auswahl getroffen, zum Zweck eines formellen Rechenbeispiels.

über 180° . Ohne zu wissen, ob das der sphärische Excess ist, oder von Messungs-Fehlern herrührt, verteilen wir, um wenigstens vorläufig eine in sich übereinstimmende ebene Dreiecks-Berechnung zu haben, diese $15''$ auf die drei Mittel und erhalten dadurch die oben bei (5) in Klammern beigesetzten Sekundenwerte ($25''$), ($54''$), ($41''$) für die drei Winkel.

Mit diesen Winkeln und der schon bei (4) angegebenen Basisseite b macht man eine genäherte vorläufige Dreiecks-Berechnung nach dem Sinussatz der ebenen Trigonometrie:

$$a = \frac{b}{\sin \beta} \sin \alpha, \quad c = \frac{b}{\sin \beta} \sin \gamma$$

Dabei rechnet man nur etwa mit 5- oder 6-stelligen Logarithmen:

$\log b$	5.025 195	$\log b$	5.025 195
<i>Erg.</i> $\log \sin \beta$	0.000 940	<i>Erg.</i> $\log \sin \beta$	0.000 940
$\log \sin \alpha$	9.813 933	$\log \sin \gamma$	9.902 983
$\log a$	4.840 068	$\log c$	4.929 118

Man hat also nun zusammen:

$$\left. \begin{array}{ll} \alpha = 40^\circ 39' 25'' & \log a = 4.840 068 \\ \beta = 86^\circ 13' 54'' & \log b = 5.025 195 \\ \gamma = 53^\circ 6' 41'' & \log c = 4.929 118 \end{array} \right\} \quad (6)$$

Nun kann man auch die Dreiecksfläche dreifach berechnen, denn es ist bekanntlich:

$$\text{Dreiecksfläche } \triangle = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

$\log a$	4.840 068	oder	$\log a$	4.840 068
$\log b$	5.025 195		$\log c$	4.929 118
$\log \sin \gamma$	9.902 983	10	$\log \sin \beta$	9.999 060 — 10
$\log 0,5$	9.698 970	10	$\log 0,5$	9.698 970 — 10
$\log \triangle$	9.467 216		$\log \triangle$	9.467 216

(7)

Nach diesem braucht man den mittleren Krümmungsradius für die Mittelbreite des Dreiecks. Diese Mittelbreite wurde schon unter (5) angegeben $q = 51^\circ 22' 34''$, und damit entnimmt man aus der Tafel Seite [14] des Anhanges durch Interpolation den Wert $\log r$ oder auch sofort:

$$\begin{array}{ll} \log \frac{1}{r^2} & 6.390 076 - 20 \\ \text{hiezum } \log q & 5.314 425 \\ \text{und von (7) } \log \triangle & 9.467 216 \\ \hline \log s & 1.171 717 \end{array} \quad s = 14,850'' \quad (8)$$

Damit sind die oben unter (5) gegebenen Winkel, insofern sie nur auf $1''$ genau angesetzt sind, in ihrer Summe bestätigt. Die genaueren Winkel und die genauere Berechnung der Dreiecksseiten werden wir in § 41. — § 42. kennen lernen.

Zu der einfachen Excess-Berechnung, welche im vorstehenden Beispiele in aller Ausführlichkeit gegeben ist, kann man noch einige Bemerkungen machen. Für ein Dreieck mit den Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel γ ist der Excess:

$$s = \frac{Q}{2r^2} ab \sin \gamma \quad (9)$$

und deswegen schreibt man für häufigeren Gebrauch die Logarithmen von $\frac{Q}{2r^2}$ tabellarisch heraus; zur Übersicht stellen wir zusammen:

$$\left. \begin{array}{ll} \varphi & \log \frac{Q}{2r^2} \\ 45^\circ & 1.40411 - 10 \\ 50^\circ & 1.40361 - 10 \\ 55^\circ & 1.40312 - 10 \end{array} \right\} \quad (9a)$$

Man kann solche Werte stets durch unsere Hilfstafel von Seite [2] — [23] des Anhangs finden, man kann aber auch den konstanten Logarithmus der in (9) gebraucht wird, durch eine besondere Reihe entwickeln, nämlich:

$$\log \frac{Q}{2r^2} = 1.407\,0165\,697 - [4\,763\,2247\,31 - 10] \sin^2 \varphi \left. \begin{array}{l} - [2\,286\,6051 - 10] \sin^4 \varphi \\ - [9\,93492 - 10] \sin^6 \varphi \\ - [7\,63439 - 10] \sin^8 \varphi \end{array} \right\} \quad (10)$$

Dabei bedeutet [...] die Logarithmen der Coefficienten. Dieses ist im Anschluss an unsere Reihen in § 33. S. 211 berechnet, und stimmt auch mit der Reihe, welche angegeben ist in dem Werke „die königl. preuss. Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, zweiter Teil, zweite Abteilung, Berlin 1874, S. 607“.

Zur weiteren Übersicht der Verhältnisse kann man auch berechnen:

Fläche des Dreiecks	Sphärischer Excess
1 Quadrat-Kilometer	$\epsilon = 0,00507''$
1 Quadrat-Meile	$\epsilon = 0,279$
gleichseitiges Dreieck mit Seiten von 1° = 15 geogr. Meilen = 111 ^{km}	$\epsilon = 27''$

Die letzte Annahme eines Dreiecks von 111^{km} Seite ist wohl das äusserste für Landes-Vermessungen; schon das Gauss'sche Dreieck Inselsberg-Hohelagen-Brocken, das wir bei (8) als Beispiel benützten, mit rund $\epsilon = 15''$, ist eines der grössten deutschen Dreiecke, das wir deswegen auch schon in der Zusammenstellung Seite 24 erwähnt haben.

Die grössten Dreiecke, welche die Geodäsie bis heute überhaupt kennt, nämlich die auf Seite 25 dargestellten Verbindungsdreiecke zwischen Spanien und Algier über das mittelländische Meer hinweg, haben sphärische (bzw. sphäroidische) Excesse von bzw. rund: 54'', 1' 11'', 44'', 1' 0''. (Zeitschr. f. Verm. 1882, S. 306.)

§ 41. Der Legendresche Satz.

Wir betrachten ein geodätisches Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ , wie in Fig. 1. dargestellt ist.

Fig. 1.
Sphärisches Dreieck.

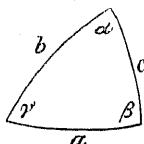
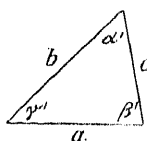


Fig. 2.
Ebenes Dreieck.



Wenn das sphärische Dreieck auf einer Kugel vom Halbmesser r liegt, so entsprechen den Seiten a b c gewisse Erd-Centriwinkel, wie aus folgender Übersicht zu ersehen ist:

$$\left. \begin{array}{lll} \text{Seiten-Längen (in Meternmass} & a, & b, & c \\ \text{Erd-Centriwinkel in analytischem Mass . .} & \frac{a}{r}, & \frac{b}{r}, & \frac{c}{r} \\ \text{„ „ „ geometrischem Mass . .} & \frac{a}{r} \varrho, & \frac{b}{r} \varrho, & \frac{c}{r} \varrho \end{array} \right\} \quad (1)$$

Man könnte nun mit diesen Erd-Centriwinkeln und den Winkeln α , β , γ , welche die Bögen a , b , c auf der Kugelfläche unter sich bilden, das sphärische Dreieck nach den bekannten strengen Formeln der sphärischen Trigonometrie auflösen; man thut das aber im allgemeinen nicht, weil die Erd-Centriwinkel sehr *klein* sind, und deswegen sich viel bequemer in Reihen-Entwicklungen und Näherungs-Formeln behandeln lassen.

Die älteste und beliebteste dieser Verfahrensarten ist der von *Legendre* in Paris im Jahre 1787 gefundene und nach ihm benannte Satz, welcher heisst:

Ein kleines sphärisches Dreieck kann näherungsweise wie ein ebenes Dreieck mit denselben Seiten berechnet werden, wenn man als Winkel des ebenen Dreiecks die um je ein Drittel des sphärischen Excesses verminderten Winkel des sphärischen Dreiecks nimmt.

Diesem Satze entspricht das oben in Fig. 2. gezeichnete *ebene* Dreieck, das dieselben Seiten a , b , c wie das sphärische Dreieck Fig. 1. hat, und dessen Winkel α' , β' , γ' zunächst noch unbestimmt gelassen, sich nachher bzw. $\alpha' = \alpha - \frac{\epsilon}{3}$, $\beta' = \beta - \frac{\epsilon}{3}$, $\gamma' = \gamma - \frac{\epsilon}{3}$ ergeben werden.

Um dieses zu beweisen, schreiben wir für das sphärische Dreieck den Cosinus-Satz an:

$$\begin{aligned} \cos \frac{a}{r} &= \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} + \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \cos \alpha \\ \text{oder} \quad \cos \alpha &= \frac{\cos \frac{a}{r} - \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r}}{\sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r}} \end{aligned}$$

Nun werden alle kleinen Winkel nach Potenzen entwickelt (vgl. die Reihen-Formeln für $\sin x$ und $\cos x$ (30) und (31) § 30. S. 199, nämlich bis zur 4. Potenz einschliesslich:

$$\cos \alpha = \frac{\left(1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{24r^4}\right) - \left(1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{24r^4}\right)}{\left(\frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3}\right) \left(\frac{c}{r} - \frac{c^3}{6r^3}\right)}$$

Wenn man die hier vorkommenden Klammern ausmultipliziert, dabei immer die Glieder von höherer als der 4. Ordnung vernachlässigt, so hat man:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{24r^4}\right) &= 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4} - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{b^2 c^2}{4r^4} + \frac{c^4}{24r^4} \\ &= 1 - \frac{b^2 + c^2}{2r^2} + \frac{b^4 + c^4}{24r^4} + \frac{b^2 c^2}{4r^4} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2r^2} + \frac{a^4 - b^4 - c^4}{24r^4} - \frac{b^2 c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2} \left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6r^2}\right)}$$

Der Nenner $\left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6r^2}\right)$ wird hinreichend genähert dadurch berücksichtigt, dass man statt dessen in dem Zähler einen Faktor $\left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6r^2}\right)$ zusetzt, d. h.:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2 c^2}{24r^2 bc} \right) \left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6r^2} \right) \\ \cos \alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2 c^2}{24r^2 bc} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \frac{b^2 + c^2}{6r^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Nun giebt das *ebene* Dreieck Fig. 2. nach dem Cosinus-Satz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha' \quad \text{oder} \quad \cos \alpha' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (3)$$

Dieses mit (2) zusammen giebt:

$$\cos \alpha = \cos \alpha' + \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2 c^2}{24r^2 bc} + \frac{b^4 + c^4 + 2b^2 c^2 - a^2 b^2 - a^2 c^2}{12r^2 bc}$$

Die beiden Teile zusammen gefasst und etwas umgeformt, geben:

$$\cos \alpha = \cos \alpha' + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 - 2a^2 c^2 - 2b^2 c^2}{24r^2 bc} \quad (4)$$

Der Zähler in diesem Ausdrucke rechts steht nun in sehr naher Verwandtschaft zu dem Inhalte \triangle des ebenen Dreiecks. Es ist bekanntlich:

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

wo $s = \frac{a+b+c}{2}$, also $s-a = \frac{-a+b+c}{2}$ u. s. w., folglich:

$$\triangle^2 = \left(\frac{a+b+c}{2} \right) \left(\frac{-a+b+c}{2} \right) \left(\frac{a-b+c}{2} \right) \left(\frac{a+b-c}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Hiebei ist: } (a+b+c)(-a+b+c) &= -a^2 + b^2 + c^2 + 2bc \\ (a-b+c)(a+b-c) &= a^2 - b^2 - c^2 + 2bc \end{aligned}$$

Folglich:

$$\begin{aligned} 16\triangle^2 &= (-a^2 + b^2 + c^2 + 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) \\ 16\triangle^2 &= -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Man hat also aus (4) und (5):

$$\cos \alpha - \cos \alpha' = -\frac{16\triangle^2}{24r^2 bc} \quad (6)$$

Nun ist aber in erster Näherung:

$$\cos \alpha - \cos \alpha' = -(\alpha - \alpha') \sin \alpha' + \dots \quad (7)$$

was man entweder geradezu als Differential-Formel nach (47) § 30. S. 202 einsehen, oder etwa auch goniometrisch so begründen kann:

$$\cos \alpha - \cos \alpha' = -2 \sin \frac{\alpha - \alpha'}{2} \sin \frac{\alpha + \alpha'}{2}$$

d. h. wenn α und α' sehr nahe gleich sind:

$$\cos \alpha - \cos \alpha' = -(\alpha - \alpha') \sin \alpha' \quad (7a)$$

Setzt man dieses (7) bzw. (7a) in (6), so erhält man:

$$\alpha - \alpha' = \frac{2}{3} \frac{\Delta^2}{r^2 b c \sin \alpha'} \quad (8)$$

Es ist aber auch andererseits:

$$b c \sin \alpha' = 2 \Delta \quad (9)$$

und damit wird (8):

$$\alpha - \alpha' = \frac{1}{3} \frac{\Delta}{r^2} \text{ bzw. } \alpha - \alpha' = \frac{1}{3} \frac{\Delta}{r^2} \varrho \quad (10)$$

Die erste hier in (10) geschriebene Form gilt für analytisches Mass, die zweite für geometrisches Mass.

Oder wenn man nach (3) § 40. S. 234 den sphärischen Excess ε einführt, hat man:

$$\alpha - \alpha' = \frac{1}{3} \varepsilon \quad (11a)$$

$$\text{und entsprechend: } \beta - \beta' = \frac{1}{3} \varepsilon \quad (11b)$$

$$\gamma - \gamma' = \frac{1}{3} \varepsilon \quad (11c)$$

$$\text{Summe: } \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = \varepsilon \quad (12)$$

Damit ist der oben in Worten ausgesprochene Satz bewiesen.

Zu einem Zahlen-Beispiele nehmen wir wieder das klassische Dreieck, das wir schon im vorigen § 40. S. 234 benützt haben, nämlich nun mit scharfen Winkel-Werten:

	sphärisch	eben (Leg.-Satz.)	
Inselsberg	$\alpha = 40^\circ 39' 30,380''$	$\alpha' = 40^\circ 39' 25,430''$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad (13)$
Hohchagen	$\beta = 86 \quad 13 \quad 58,840$	$\beta' = 86 \quad 13 \quad 53,890$	
Brocken	$\gamma = 53 \quad 6 \quad 45,630$	$\gamma' = 53 \quad 6 \quad 40,680$	
Summe:	$180^\circ \quad 0' \quad 14,850''$	$180^\circ \quad 0' \quad 0,000''$	
	$\varepsilon = 14,850''$		
	$\frac{\varepsilon}{3} = 4,950''$		

Die eine gegebene Seite sei $b = 105 \, 972,850^m$. (14)

Damit macht man eine Berechnung, wie wenn das Dreieck eben wäre, wieder nach dem Sinus-Satze der ebenen Trigonometrie (vgl. (6) § 40. S. 235), diesesmal aber scharf mit 7–8stelligen Logarithmen, weshalb wir die ganze Rechnung hersetzen wollen:

$\log b$	5.025 1946.1	oder	$\log b$	5.025 1946.1
$\log \sin \beta'$	9.999 0600.0		$\log \sin \beta'$	0.000 9400.0
$\log (b : \sin \beta')$	5.026 1346.1		$\log (b : \sin \beta')$	5.026 1346.1
$\log \sin \alpha'$	9.813 9344.8		$\log \sin \gamma'$	9.902 9830.6
$\log a$	4.840 0690.9		$\log c$	4.929 1176.7
$a = 69194,105^m$			$c = 84941,060^m$	

(15)

Bemerkung über die Schärfe der Rechnung.

Das vorstehende Beispiel ist mit 3 Dezimalen der Sekunde, d. h. auf $0,001''$ genau gerechnet. Es geschieht dieses häufig, wenn auch die Messungen selbst viel

weniger sicher sind. Hierbei soll die letzte Dezimale keine selbständige Bedeutung haben, sondern nur die vorletzte Dezimale vor Abrundungs-Fehlern schützen. Namentlich bei langen Ausgleichungs-Rechnungen kann man genötigt sein, von vorn herein auf 0,001'' genau zu rechnen, wenn man am Schlusse 0,01'' noch sicher haben will, bei kürzeren trigonometrischen Berechnungen genügt 0,01'' als letzte Rechenstelle.

Entsprechende Genauigkeit ist bei der logarithmischen Rechnung anzuwenden. Unsere Zahlen-Beispiele sind meist 8stellig, d. h. mit 0,000 0000·1 als letzter logarithmischer Rechenstelle geführt; die letzte Stelle 0·1 ist teils mit Hilfe des 10stelligen „Thesaurus logarithmorum“, teils auch nur durch Benützung der Abrundungs-Merkmale in der *Schrönschen* Logarithmen-Tafel erhalten, und dient dann (ebenso wie 0,001'' bei den Winkeln) nur als Sicherung für die vorhergehende 7 Stelle.

§ 42. Die Additamenten-Methode.

Ein zweites Näherungs-Verfahren zur Berechnung sphärischer Dreiecke, deren Seiten im Vergleich zu dem Kugel-Halbmesser klein sind, ist am Anfang dieses Jahrhunderts zuerst in Bayern eingeführt, und dann auch bei den übrigen süddeutschen Landes-Vermessungen allgemein angewendet worden. Das Verfahren wurde allgemein mit dem Namen „*Additamenten-Methode*“ bezeichnet, weil kleine Korrekturen (Größen häufig zu den Logarithmen addiert (allerdings umgekehrt auch subtrahiert) werden.

Während beim *Legendreschen* Satz ein ebenes Hilfsdreieck benützt wurde, dessen Seiten denen des sphärischen Dreiecks gleich sind, und dessen Winkel verschieden von den Winkeln des sphärischen Dreiecks angenommen werden mussten,

Fig. 1.
Sphärisches
Dreieck.

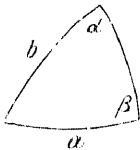
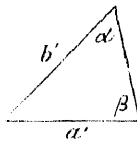


Fig. 2.
Ebenes
Hilfs-Dreieck.



gehen wir nun umgekehrt darauf aus, ein ebenes Hilfsdreieck zu suchen, welches zwei Winkel mit dem sphärischen Dreieck gemein, dafür aber andere Seiten hat. Mit Beziehung auf Fig. 1. und Fig. 2. denken wir uns ein sphärisches Dreieck gegeben mit den Seiten a und b und den Gegenwinkeln α und β , und konstruieren hiezu ein ebenes Hilfsdreieck, welches dieselben Winkel α und β hat wie das sphärische Dreieck, aber damit notwendig andere Seiten a' , b' haben muss.

Nach dem Sinus-Satze für das sphärische Dreieck und nach dem Sinus-Satze für das ebene Dreieck haben wir die zwei Gleichungen:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \frac{a}{r}}{\sin \frac{b}{r}} \quad \text{und} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a'}{b'} \quad (1)$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\sin \frac{a}{r}}{\sin \frac{b}{r}} = \frac{a - \frac{a^3}{6r^2} + \dots}{b - \frac{b^3}{6r^2} + \dots} \quad (2)$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a - \frac{a^3}{6r^2} + \dots}{b - \frac{b^3}{6r^2} + \dots} \quad (3)$$

Diese Gleichung ist befriedigt, wenn man setzt:

$$a' = a - \frac{a^3}{6r^2} \quad \text{und} \quad b' = b - \frac{b^3}{6r^2}$$

oder allgemein für irgend eine Dreiecks-Seite s hat man:

$$s' = s - \frac{s^3}{6r^2} \quad (4)$$

Der so bestimmte Wert $\frac{s^3}{6r^2}$ ist das lineare Additament für die Seite s , und wenn man den Halbmesser r kennt, kann man eine Tafel der Werte $\frac{s^3}{6r^2}$ berechnen, z. B. für die Mittelbreite $\varphi = 50^\circ$ hat man:

$$\log r = 6.804\,894 \quad \log \frac{s}{6r^2} = 5.612\,062$$

Damit ist zur Übersicht folgendes berechnet:

$$\left. \begin{array}{l} s = 10\,000^m \quad 20\,000^m \quad 30\,000^m \quad 40\,000^m \quad 50\,000^m \quad 60\,000^m \quad 80\,000^m \quad 100\,000^m \\ \frac{s^3}{6r^2} = 0,004^m \quad 0,033^m \quad 0,111^m \quad 0,262^m \quad 0,512^m \quad 0,884^m \quad 2,096^m \quad 4,093^m \end{array} \right\} \quad (5)$$

Wenn also z. B. eine Dreiecksseite $s = 40\,000^m$ vorliegt, so wird das zugehörige $s' = 40\,000 - 0,262 = 39\,999,738^m$, und darauf könnte man eine Dreiecks-Berechnung mit sphärischen Winkeln gründen, welche nun ganz die Form einer ebenen Rechnung hat.

Indessen thut man dieses in dieser Form gewöhnlich nicht geradezu, sondern da man doch logarithmisch rechnet, bringt man auch die Additamente in *logarithmische* Form.

Um diese logarithmische Form zu bekommen, gehen wir nochmals auf (1) und (3) zurück und finden als allgemeine Beziehung zwischen einer Dreiecks-Seite s und der mit Sinus-Additament reduzierten Seite s' folgendes:

$$s' = r \sin \frac{s}{r}, \quad \text{oder} \quad \frac{s'}{r} = \sin \frac{s}{r} \quad (6)$$

also logarithmisch:

$$\log \frac{s'}{r} = \log \sin \frac{s}{r} = \log \left(\frac{s}{r} - \frac{s^3}{6r^3} + \frac{s^5}{120r^5} - \dots \right) \quad (7)$$

Dabei haben wir noch die 5. Ordnung in der Reihe beibehalten, um nachher beurteilen zu können, ob das Glied 5. Ordnung noch von Einfluss ist.

Entwickelt man den letzten Ausdruck nach der logarithmischen Reihe, so erhält man:

$$\begin{aligned} \log \sin \frac{s}{r} &= \log \frac{s}{r} + \log \left(1 - \frac{s^2}{6r^2} + \frac{s^4}{120r^4} \right) \\ \log \sin \frac{s}{r} &= \log \frac{s}{r} + \mu \left(-\frac{s^2}{6r^2} + \frac{s^4}{120r^4} \right) - \frac{\mu}{2} \left(-\frac{s^2}{6r^2} + \dots \right)^2 \\ \log \sin \frac{s}{r} &= \log \frac{s}{r} - \frac{\mu s^2}{6r^2} + \frac{\mu s^4}{180r^4} \end{aligned}$$

Oder wenn man wieder s' nach (6) benützt:

$$\log s - \log s' = \frac{\mu s^2}{6r^2} + \frac{\mu s^4}{180r^4} \quad (8)$$

Für die Mittelbreite $\varphi = 50^\circ$ hat man hierfür (nach Seite [14] des Anhangs):

$$\log \frac{\mu}{6r^2} = 5.24985 - 20 \quad \log \frac{\mu}{180r^4} = 0.16294 - 40$$

oder für Einheiten der 7. Logarithmen-Decimale:

$$\log \frac{\mu}{6r^2} = 2.24985 - 10 \quad \log \frac{\mu}{180r^4} = 7.16294 - 30$$

Für $s = 100\,000^m$ oder $\log s = 5.00000$ giebt dieses:

$$\frac{\mu}{6r^2} s^2 = 0.000\,0177.8 \quad \frac{\mu}{180r^4} s^4 = 0.000\,0000.001$$

Daraus folgt, dass für gewöhnliche Dreiecks-Seiten das zweite Glied der Formel (8) unmerklich ist, und dass man deswegen bei dem ersten Gliede von (8) stehen bleiben kann.

Indem wir das logarithmische Additament mit A bezeichnen, schreiben wir mit Weglassung des zweiten Gliedes, zur Zusammenfassung:

$$A = \log s - \log s'$$

$$\text{oder } A = \log \frac{s}{r} - \log \sin \frac{s}{r} = \frac{\mu}{6r^2} s^2 \quad \text{wo } \log \frac{\mu}{6r^2} = 2.249846 - 10 \text{ für } \varphi = 50^\circ \quad (9)$$

Damit ist die Hilfstafel auf Seite [30] des Anhangs berechnet, und zwar in zweifacher Form, I. als Funktion von $\log s$, mit der Annahme $\log r = 6.804894$ für $\varphi = 50^\circ$ und II. als Funktion von $\log \frac{s}{r}$.

Die erste Tafel I., d. h. der obere Teil von Seite [30], ist die bequemere für Dreiecks-Berechnung, weil man geradezu mit $\log s$ (für s in Metern) einzugehen hat, während man im Falle II., d. h. im unteren Teile von Seite [30], zuvor $\log \frac{s}{r}$ bilden muss, das man sonst nicht braucht. Die Tafel II. ist aber andererseits allgemeiner brauchbar, weil sie nicht wie I. an eine bestimmte Annahme für den Halbmesser r gebunden ist, und weil sie auch noch für anderes Mass als Meter (z. B. Fusse, Toisen, Ruten u. s. w. bei älteren Triangulierungen) anwendbar ist.

Zu einem Zahlen-Beispiel nehmen wir wieder das Dreieck des vorigen § 41. S. 234:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Inselberg} & \alpha = 40^\circ 39' 30,380'' \\ \text{Hochhagen} & \beta = 86 \quad 13 \quad 58,840 \\ \text{Brocken} & \gamma = 53 \quad 6 \quad 45,630 \\ \hline & 180^\circ 0' 14,850'' \end{array} \right\} \quad (10)$$

$$\text{Basis } b = 105\,972,850^m \quad \log b = 5.025\,1946.1 \quad (11)$$

Hiezu braucht man das logarithmische Additament, das aus der Hilfstafel I. von Seite [30] des Anhangs für $\log s = 5.0252$ durch Interpolation $= 199.7$ entnommen werden kann. Da jedoch jene Hilfstafel I. Seite [30] für die Mittelbreite $\varphi = 50^\circ$ gilt, während unser Dreieck die Mittelbreite $\varphi = 51^\circ 22,6'$ hat, mit $\log r = 6.804962$, und da unsere Dreiecks-Seiten sehr gross sind, so berechnen wir diesmal das Additament A besonders:

$$\begin{array}{r|l}
 \log b^2 & 10.05039 \\
 \log \frac{\mu}{6r^2} & 2.24971 \\
 \hline
 \log A_b & 2.30010 \quad A_b = 199.57
 \end{array} \quad (12)$$

Dieses ist nur ein klein wenig verschieden von dem aus der Tafel entnommenen 199.7.

Nun hat man eine logarithmische Berechnung im wesentlichen wie in der Ebene, nämlich nach (10), (11), (12):

$$\begin{array}{r|l}
 \log b & 5.025\ 1946.1 \\
 \text{Logar. Additament} & \quad - 199.6 \\
 \hline
 \log b' & 5.025\ 1746.5 \\
 \log \sin \beta & 9.999\ 0606.9 \quad \text{oder } \text{Erg. } \log \sin \beta & 5.025\ 1746.5 \\
 \log (b' : \sin \beta) & 5.026\ 1139.6 & \log b' & 5.025\ 1746.5 \\
 \log \sin \alpha & 9.813\ 9466.1 & \log \sin \gamma & 5.026\ 1139.6 \\
 \log a' & 4.840\ 0605.7 & \log b' & 4.929\ 1048.4 \\
 \text{Logar. Additament} & \quad + 85.1 & \text{Logar. Add.} & \quad + 128.2 \\
 \hline
 \log a & 4.840\ 0690.8 & \log c & 4.929\ 1176.6 \\
 a = 69\ 194,105^m & & b = 84\ 941,060^m &
 \end{array} \quad (13)$$

Dieses stimmt hinreichend mit (15) § 41. S. 239.

Die soeben bei (13) gebrauchten Additamente entnimmt man wieder aus der Hilfstafel I. von Seite [30] des Anhangs, oder, wenn man die letzte Stelle ganz scharf haben will, berechnet man dieselben ebenso wie vorher bei (12).

Vergleicht man die Rechnung nach dieser Additamenten-Methode mit der Rechnung nach dem *Legendreschen* Satze, in Hinsicht auf Bequemlichkeit, Übersichtlichkeit und dergl., so wird man etwa sagen können:

Der *Legendresche* Satz empfiehlt sich bei einem einzelnen Dreieck oder bei seltener Anwendung, durch seine Unabhängigkeit von allen besonderen Hilfen, denn den Excess ϵ muss man der Winkelprobe wegen bei dem anderen Verfahren doch auch kennen, und der *Legendresche* Satz selbst, d. h. die Verteilung $\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}$ ist immer im Gedächtnis.

Dagegen bei ganzen Dreiecks-Netzen, mit vielen zusammenhängend zu rechnenden Dreiecken, ist die Additamenten-Methode vorteilhafter. Man reduziert zunächst nur den Logarithmus der Basis des Netzes ($\log b' = \log b - A_b$), dann rechnet man das ganze Dreiecks-Netz mit den sphärischen Winkeln durch und erhält dadurch allerdings lauter reduzierte Werte $\log a'$, $\log c'$ u. s. w., die man dann aber nachher alle auf einmal mit der Additamenten-Tafel auf $\log a$, $\log c$ u. s. w. reduzieren kann.

Ein Vorteil des Additamenten-Verfahrens besteht auch darin, dass man nur eine Tabelle der Dreiecks-Winkel α , β , γ ... führen muss, während für den *Legendreschen* Satz eine zweite Tabelle der α' , β' , γ' nötig ist, welche nicht nur die Akten vermehrt, sondern auch Veranlassung zu Irrtümern geben kann, wenn nachher zur Koordinaten-Berechnung u. dgl. wieder die sphärischen Winkel selbst gebraucht werden.

Zusammenhang zwischen dem Legendreschen Satze und der Additamenten-Methode.

Diese beiden Rechnungs-Arten beruhen auf Reihen-Entwicklungen sphärischer Formeln bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$, und es muss deshalb möglich sein, beide Rechnungen in ihren Formeln gegenseitig auseinander abzuleiten, was wir nun noch zeigen wollen:

Mit Annahme der bisherigen Bezeichnungen hat man nach dem Legendreschen Satze:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\right)}{\sin\left(\beta - \frac{\varepsilon}{3}\right)} = \frac{\sin\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\cos\alpha}{\sin\beta - \frac{\varepsilon}{3}\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\cotg\alpha\right)}{\sin\beta\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\cotg\beta\right)} \quad (15)$$

Nun ist $\varepsilon = \frac{\Delta}{r^2}$, und wenn man in den Korrekptions-Gliedern ebene und sphärische Winkel vertauscht, so hat man:

$$\begin{aligned} 2bc\cos\alpha &= b^2 + c^2 - a^2 \\ bc\sin\alpha &= 2\Delta \\ \text{also } \cotg\alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\Delta}, \quad \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\Delta}{3r^2} \\ \frac{\varepsilon}{3}\cotg\alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{12r^2} \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon}{3}\cotg\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{12r^2} \end{aligned} \quad (16)$$

Damit giebt (15):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \left(\frac{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{12r^2}}{1 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{12r^2}} \right) = \frac{a}{b} \left(1 + \frac{1}{12r^2} (2b^2 - 2a^2) \right)$$

Dieses kann man auch so schreiben:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \left(1 - \frac{a^2}{6r^2} \right) \left(1 + \frac{b^2}{6r^2} \right) = \frac{a}{b} \frac{1 - \frac{a^2}{6r^2}}{1 - \frac{b^2}{6r^2}}$$

Dieses stimmt nach (1), (3) § 42. S. 240 mit der Additamenten-Methode überein; es ist also der oben angegebene Zusammenhang bewiesen.

Die „Additamenten-Methode“ wurde in Bayern eingeführt durch *Soldner*. Weiteres hierüber findet man in dem amtlichen Werke: „Die Bayerische Landes-Vermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, herausgegeben von der K. Stenor-Kataster-Kommission in Gemeinschaft mit dem topogr. Bureau des Generalstabs“. München 1873, S. 203 u. ff. (auf S. 202 u. ff. Abdruck einer Abhandlung, welche *Soldner* am 5. Mai 1810 der bayerischen Kataster-Kommission übergeben hat). Vgl. auch: *Bohnenberger*, „De computandis dimensionibus trigonometricis in superficiei terrae sphaeroidica institutis“. Tübingae 1826, § 11.

Ausführlichere Additamenten-Tafeln als unsere Tafel Seite [30] des Anhangs sind:

Bremiker, Studien über höhere Goodäste, Berlin 1809. Anhang Tafel III., Reduktion von Bogen auf Sekunde, d. h. $\frac{1}{4} A$, wenn A der Wert unserer Tafel II. Seite [30].

Bremiker, Tafel zur Verwandlung von Log. Bogen in Log. Tangente. Wissenschaftliche Begründung der Rechnungs-Methoden des Centralbureaus der Europäischen Gradmessung, als Manuscript gedruckt. Beilage zum Generalbericht d. Europ. Gr. für 1870 (giebt $T' - 2 A$).

P. G. Gauss, Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst, Berlin 1876, zweiter Teil, S. 39–48.

Bremiker und Schrön. Auch die Zahlen S , welche in der *Bremikerschen* und *Schrönschen* 7-stelligen Logarithmentafel am Fuss jeder Seite der Logarithmen der natürlichen Zahlen angegeben sind, stehen in einfacher Beziehung zu unseren Additamenten. Es ist nämlich dieses S :

$$S = \log \frac{1}{Q''} - A = \log \sin 1'' - A$$

z. B. in *Schrön* S. 29 findet man für $0^\circ 36' 0''$ $S = 4,685\,56693$. Dabei ist $\log \frac{1}{Q''} = 4,685\,57487$ und unsere Tafel II. auf Seite [30] giebt für den Centriwinkel $0^\circ 36' 0''$ den Wert $A = 79,4$, was die Differenz der beiden soeben geschriebenen Zahlen ist. Für die Zahlen T der Logarithmentafeln gilt die entsprechende Gleichung:

$$T = \log \frac{1}{Q''} + 2A = \log \sin 1'' + 2A$$

§ 43. Verschiedene sphärische Aufgaben.

Nachdem wir die Reduktion eines sphärischen Dreiecks auf ein ebenes Hilfsdreieck in zweifacher Weise kennen gelernt haben, können wir auch andere Aufgaben als die zuerst behandelte Berechnung eines Dreiecks aus einer Seite und allen Winkeln lösen.

Wir wollen hier noch die Bestimmung eines sphärischen Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel und dann die sphärisch-pothenotische Aufgabe vornehmen.

I. Bestimmung eines sphärischen Dreiecks b, c, α nach dem Legendreschen Satz.

Wenn zwei Seiten b, c und der eingeschlossene Winkel α gegeben sind, so kann man daraus sofort den Excess ε berechnen:

$$\varepsilon = bc \sin \alpha \frac{Q}{2r^2} \quad (1)$$

Damit hat man auch die Summe der beiden andern Winkeln β und γ :

$$\beta + \gamma = 180^\circ + \varepsilon - \alpha \quad (2)$$

Betrachtet man nun das *Legendresche* ebene Hilfsdreieck und berücksichtigt, dass:

$$\left(\beta - \frac{\varepsilon}{3} \right) - \left(\gamma - \frac{\varepsilon}{3} \right) = \beta - \gamma$$

so findet man nach den *Gauss'schen* Gleichungen der ebenen Trigonometrie:

$$\tan \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{(b - c) \cos \frac{\alpha - 1/3 \varepsilon}{2}}{(b + c) \sin \frac{\alpha - 1/3 \varepsilon}{2}} = \frac{Z}{N} \quad (3)$$

$$a = \frac{Z}{\sin \frac{\beta - \gamma}{2}} = \frac{N}{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}} \quad (4)$$

Aus (2) und (4) hat man also $\beta + \gamma$ und $\beta - \gamma$, folglich auch β und γ und mit Probe a aus (4), womit die Aufgabe gelöst ist.

II. Bestimmung eines sphärischen Dreiecks b, c, α nach der Additamenten-Methode.

Wenn b und c logarithmisch gegeben sind, so ist folgende Rechnung bequemer als die vorige:

Für ein ebenes Dreieck mit den Seiten b' und c' und den Winkeln β und γ hat man, mit Einführung eines Hilfswinkels μ folgendes:

$$\begin{aligned}\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} &= \frac{b'}{c'} = \frac{1}{\tan \mu} \\ \frac{\sin \beta - \sin \gamma}{\sin \beta + \sin \gamma} &= \frac{1 - \tan \mu}{1 + \tan \mu} \\ \tan \frac{\beta - \gamma}{2} &= \tan \frac{\beta + \gamma}{2} \cotg (\mu + 45^\circ)\end{aligned}$$

Für das sphärische Dreieck setzen wir entsprechend:

$$\log b' = \log b - A_b, \quad \log c' = \log c - A_c$$

wobei A_b und A_c die Additamente von b und c sind. Man rechnet nun den Hilfswinkel μ nach der Formel:

$$\cotg \mu = \frac{b'}{c'} \quad (5)$$

dann bestimmt man den sphärischen Excess ε durch eine vorläufige Dreiecks-Berechnung, und hat dann:

$$\begin{aligned}\beta + \gamma &= 180^\circ + \varepsilon - \alpha \\ \tan \frac{\beta - \gamma}{2} &= \tan \frac{\beta + \gamma}{2} \cotg (\mu + 45^\circ)\end{aligned} \quad (6)$$

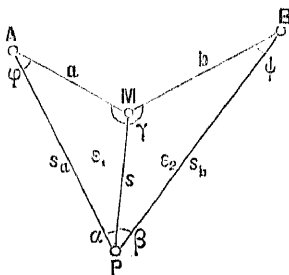
Aus $\frac{\beta + \gamma}{2}$ und $\frac{\beta - \gamma}{2}$ erhält man β und γ .

Die dritte Seite a kann man sodann sowohl nach dem Legendreschen Satz als auch nach der Additamenten-Methode bestimmen.

III. Sphärisch pothenotische Aufgabe.

Wir nehmen in Fig. 1. dieselben Berechnungen wie früher für die ebene pothenotische Aufgabe in Band II S. 240, und haben auch nur wenig an der früheren Rechnung zu ändern.

Fig. 1.
Pothenotische Aufgabe.



Drei Punkte A, M, B sind gegenseitig festgelegt durch die Seiten $AM = a$, $MB = b$ und den Winkel $BMA = \gamma$; ein Punkt P soll durch Messung der Winkel α und β gegen A, M, B festgelegt werden.

Man löst diese Aufgabe zunächst vorläufig genähert auf, indem man die Figur als eben behandelt (d. h. man rechnet zuerst nach Band II S. 240—242). Dann hat man so viel Anhalt, um die sphärischen Excesse ε_1 und ε_2 der beiden Dreiecke PAM und PMB zu berechnen, damit ist auch die Summe $\varphi + \psi$ bestimmt, nämlich:

$$\varphi + \psi = 360^\circ + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - (\alpha + \beta + \gamma) \quad (7)$$

Mit den logarithmischen Additamenten A_a und A_b berechnet man:

$$\log a - A_a = \log a' \quad \text{und} \quad \log b - A_b = \log b'$$

dann lässt sich die Rechnung wie für ein ebenes Viereck weiterführen; man setzt:

$$\frac{a'}{\sin \alpha} : \frac{b'}{\sin \beta} = \tan \mu$$

und findet:

$$\tan \frac{\varphi - \psi}{2} = \tan \frac{\varphi + \psi}{2} \cotg (\mu + 45^\circ) \quad (8)$$

Nachdem somit durch (7) und (8) die beiden Winkel φ und ψ bestimmt sind, können alle Dreiecks-Seiten nach dem *Legendreschen* Satze oder nach der Additamenten-Methode weiter berechnet werden.

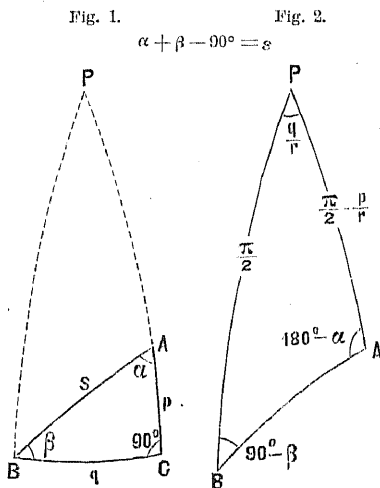
§ 44. Sphärisch-trigonometrische Reihen-Entwicklungen bis zur Ordnung $\frac{1}{r^4}$ einschliesslich.

Der *Legendresche* Satz und die Additamenten-Methode beruhen auf sphärisch-trigonometrischen Reihen-Entwicklungen, die wir beim *Legendreschen* Satze (§ 41.) nur bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich genau im Schluss-Ergebnis behandelt haben. Bei der Additamenten-Methode haben wir in (8) § 42. S. 241 noch ein Glied von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$ hinzugenommen, weil sich das ohne besondere Mühe nebenbei ergab; und es hat sich gezeigt, dass dieses höhere Glied bei den praktischen Berechnungen mit Dreiecks-Seiten bis 100 000^m und darüber unmerklich ist.

Obgleich dadurch die Wahrscheinlichkeit nahe gelegt wird, dass auch in den übrigen verwandten Entwicklungen die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ genügen, müssen wir doch, um ein sicheres Urteil zu haben, die höheren Glieder kennen lernen.

Allerdings ist dabei zu berücksichtigen, dass eine sehr weit und fein geführte *sphärische* Berechnung für die Geodäsie zunächst wenig reellen Wert hat, solange die sphärische Berechnungs-Art überhaupt nicht strenger begründet wird als dieses in unserem § 39. S. 233 geschehen ist; denn statt höhere Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$ zu berücksichtigen, wobei $r = \sqrt{MN}$ sich aus den beiden Haupt-Krümmungshalbmessern M und N berechnet, sollte man vorher daran denken, den Einfluss der *Ungleichheit* von M und N und die von der geographischen Breite abhängigen Änderungen der Krümmungen zu untersuchen.

Dieses können wir erst später thun, und wenn wir jetzt die höheren Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$ untersuchen, so hat das zunächst den Sinn, dass wir uns überzeugen, ob die Entwicklungen bis $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich, hinreichend sind, um die *geschlossenen* sphärischen Formeln, welche man ja auch anwenden könnte, zu ersetzen, und zweitens sollen durch die nachfolgenden Entwicklungen unsere späteren Entwicklungen mit der geodätischen Linie zweckmässig vorbereitet werden.



I. Der sphärische Excess.

Wir betrachten in Fig. 1. das rechtwinklige sphärische Dreieck ABC mit der Hypotenuse s , mit den Katheten p und q und mit den Winkeln 90° , β und α . Da einer der Winkel $= 90^\circ$ ist, ist der sphärische Excess:

$$\varepsilon = \alpha + \beta - 90^\circ \quad (1)$$

Wir ergänzen das Dreieck ABC zu einem gleichschenkligen rechtseitigen Dreieck BPC , so dass BP und CP Quadranten werden, und der Winkel oben bei P der Kathete q entspricht. Dieses haben wir in Fig. 2. noch deutlicher ausgedrückt, indem

$$\text{die zwei Seiten } BP = \frac{\pi}{2} \text{ und } AP = \frac{\pi}{2} - \frac{p}{r},$$

sowie der Winkel bei $P = \frac{q}{r}$, alle diese in

analytischem Masse, eingeschrieben sind,

während der Winkel bei B sich $= 90^\circ - \beta$ und der Winkel bei A sich $= 180^\circ - \alpha$, in geometrischem Masse findet. *)

Wendet man auf das Ergänzungsdreieck ABP Fig. 2., eine der *Gauss'schen* bzw. *Neper'schen* Gleichungen, (13) S. 196, an, so findet man:

$$\begin{aligned} \tan \frac{(180^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta)}{2} &= \frac{\cos \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{p}{r} \right) \right)}{\cos \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{p}{r} \right) \right)} \cot \frac{q}{2r} \\ \tan \frac{180^\circ - (\alpha + \beta - 90^\circ)}{2} &= \frac{\cos \frac{p}{2r}}{\sin \frac{p}{2r}} \cot \frac{q}{2r} \end{aligned}$$

Also wegen (1), wenn man zugleich Zähler und Nenner umstellt:

$$\tan \frac{\varepsilon}{2} = \tan \frac{p}{2r} \tan \frac{q}{2r} \quad (2)$$

Die Anwendung der Tangenten-Reihe (19) S. 199, giebt hiefür, wenn man nur bis zur 4. Ordnung geht:

*) Wir unterscheiden geometrisches und analytisches Mass (z. B. der Quadrant $= 90^\circ$ oder $= \frac{\pi}{2}$ vgl. (16) S. 198) entsprechend den Bedeutungen, in welchen die Winkel hauptsächlich gebraucht werden; wenn jedoch in derselben Entwicklung die Bedeutung sich ändert, z. B. zuerst $\varepsilon = \alpha + \beta - 90^\circ$ geometrisch, nachher in der Reihen-Entwicklung $\varepsilon = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}$ analytisch zu denken ist, so soll dieses ohne Änderung der Bezeichnung, nötigenfalls in Worten bemerkt, oder auch, als gewissermassen selbstverständlich, dem Leser überlassen werden.

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} + \dots &= \left(\frac{p}{2r} + \frac{p^3}{24r^3} + \dots \right) \left(\frac{q}{2r} + \frac{q^3}{24r^3} + \dots \right) \\ \frac{\varepsilon}{2} &= \frac{pq}{4r^2} + \frac{pq^3 + p^3q}{48r^4} \\ \varepsilon &= \frac{pq}{2r^2} + \frac{pq}{24r^4} (p^2 + q^2) \end{aligned} \quad (3)$$

Wir wollen für dieselbe Formel noch eine *zweite* Entwicklung angeben, welche zwar nicht so unmittelbar vor sich geht, wie die vorstehende Entwicklung (2) — (3), welche aber dafür keine besondere Figur wie Figur 2. verlangt, und auch wegen der dabei auftretenden strengen Formel (4) erwünscht ist.

Das rechtwinklige Dreieck ABC Fig. 1. giebt:

$$\begin{aligned} \cotg \alpha \cotg \beta &= \cos \frac{s}{r} = 1 - 2 \sin^2 \frac{s}{2r} \\ 2 \sin^2 \frac{s}{2r} &= 1 - \cotg \alpha \cotg \beta = \frac{\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \\ 2 \sin^2 \frac{s}{2r} &= - \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin \varepsilon \sin^2 \frac{s}{r}}{\sin \frac{p}{r} \sin \frac{q}{r}} \end{aligned}$$

oder

$$\sin \varepsilon = \frac{\sin \frac{p}{r} \sin \frac{q}{r}}{2 \cos^2 \frac{s}{2}} \quad (4)$$

Wenn man dieses entwickelt, und in den Gliedern zweiter Ordnung $s^2 = p^2 + q^2$ setzt, so bekommt man wieder die Formel (3).

II. Die Katheten-Formeln.

Das rechtwinklige sphärische Dreieck Fig. 3 giebt nach (3)
S. 194:

$$\sin \frac{q}{r} = \sin \frac{s}{r} \sin \alpha, \quad \tan \frac{p}{r} = \tan \frac{s}{r} \cos \alpha$$

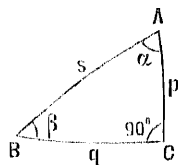
oder entwickelt:

$$q - \frac{q^3}{6r^2} = \left(s - \frac{s^3}{6r^2} \right) \sin \alpha, \quad p + \frac{p^3}{3r^2} = \left(s + \frac{s^3}{3r^2} \right) \cos \alpha \quad (5)$$

Um diese Gleichungen nach q bzw. nach p aufzulösen, benützt man zunächst die ersten Näherungen:

$$\begin{aligned} q &= s \sin \alpha + \frac{1}{r^2} \dots & p &= s \cos \alpha + \frac{1}{r^2} \dots \\ \frac{q^3}{6r^2} &= \frac{s^3 \sin^3 \alpha}{6r^2} + \frac{1}{r^4} \dots & \frac{p^3}{3r^2} &= \frac{s^3 \cos^3 \alpha}{3r^2} + \frac{1}{r^4} \dots \\ q &= s \sin \alpha - \frac{s^3}{6r^2} \sin \alpha + \frac{s^3}{6r^2} \sin^3 \alpha & p &= s \cos \alpha + \frac{s^3}{3r^2} \cos \alpha - \frac{s^3}{3r^2} \cos^3 \alpha \\ q &= s \sin \alpha - \frac{s^3}{6r^2} \sin \alpha \cos^2 \alpha & p &= s \cos \alpha + \frac{s^3}{3r^2} \sin^2 \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (6)$$

Fig. 3.



Wir werden diese Entwicklungen noch um ein Glied weiter treiben, wollen dieses aber nur noch an der Formel für q ausführlich zeigen. Statt (5) hat man dann:

$$q - \frac{q^3}{6r^2} + \frac{q^5}{120r^4} = \left(s - \frac{s^3}{6r^2} + \frac{s^5}{120r^4} \right) \sin \alpha \quad (7)$$

hiez u hat man nach (6):

$$q^3 = s^3 \sin^3 \alpha - \frac{3}{6} \frac{s^5}{r^2} \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha + \dots$$

$$q^5 = s^5 \sin^5 \alpha + \dots$$

Wenn man diese beiden Ausdrücke für q^3 und q^5 in (7) einsetzt, so bekommt man:

$$\begin{aligned} q &= s \sin \alpha - \frac{s^3}{6r^2} \sin \alpha + \frac{s^5}{120r^4} \sin \alpha \\ &\quad + \frac{s^3}{6r^2} \sin^3 \alpha - \frac{s^5}{12r^4} \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha \\ &\quad - \frac{s^5}{120r^4} \sin^5 \alpha \end{aligned}$$

Wenn man dieses ordnet und berücksichtigt, dass:

$$s^4 = s^4 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2$$

so findet man:

$$q = s \sin \alpha - \frac{s^3}{6r^2} \sin \alpha \cos^2 \alpha - \frac{s^5}{120r^4} \sin \alpha \cos^2 \alpha (8 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \quad (8)$$

Dieses ist die Weiterentwicklung der ersten Formel der Gruppe (6); die Weiterentwicklung der zweiten Formel der Gruppe (6) wird ebenso gemacht und giebt:

$$p = s \cos \alpha + \frac{s^3}{3r^2} \sin^2 \alpha \cos \alpha + \frac{s^5}{15r^4} \sin^2 \alpha \cos \alpha (2 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \quad (9)$$

Umkehrung der Reihen (8) und (9).

Man kann die Reihen (8) und (9) auch umkehren, d. h. man kann $s \sin \alpha$ und $s \cos \alpha$ in Potenzen von q und p ausdrücken. (Man könnte hiez u das allgemeine Verfahren anwenden, das wir in § 30. S. 202—203 angedeutet haben; wir ziehen es aber hier vor, ohne alle Vorbereitungs-Hilfsmittel zu verfahren.)

Jedenfalls hat man in erster Näherung aus (8) und (9):

$$s \sin \alpha = q + \dots \quad s \cos \alpha = p + \dots$$

folglich sofort in zweiter Näherung aus (8) und (9):

$$s \sin \alpha = q + \frac{q^3 p^2}{6r^2} + \dots \quad s \cos \alpha = p - \frac{q^2 p^3}{3r^2} + \dots$$

folglich zum Einsetzen in die höheren Glieder von (8) und (9):

$$s^2 \sin^2 \alpha = q^2 + \frac{q^2 p^2}{3r^2} + \dots \quad s^2 \cos^2 \alpha = p^2 - 2 \frac{q^2 p^2}{3r^2} + \dots$$

$$s^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha = \left(q^2 + \frac{q^2 p^2}{3r^2} \right) \left(p - \frac{q^2 p^3}{3r^2} \right) = q^2 p + \frac{q^2 p^3}{3r^2} - \frac{q^4 p}{3r^2} + \dots$$

$$s^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha = \left(q + \frac{q p^2}{6r^2} \right) \left(p^2 - 2 \frac{q^2 p^2}{3r^2} \right) = q p^2 + \frac{q p^4}{6r^2} - 2 \frac{q^3 p^2}{3r^2} + \dots$$

Setzt man dieses in (8) so bekommt man:

$$s \sin \alpha = q + \frac{q p^2}{6 r^2} + \frac{q p^4}{36 r^4} - \frac{q^3 p^2}{9 r^4} - \frac{1}{120 r^4} (q p^4 - 8 q^3 p^2) + \dots$$

Dieses giebt geordnet:

$$s \sin \alpha = q + \frac{q p^2}{6 r^2} - \frac{q p^2}{360 r^4} (16 q^2 - 7 p^2) \quad (10)$$

und auf gleiche Weise bekommt man aus (9):

$$s \cos \alpha = p - \frac{q^2 p}{3 r^2} - \frac{q^2 p}{45 r^4} (q^2 + 2 p^2) \quad (11)$$

III. Die Hypotenusen-Formel.

Aus den soeben gewonnenen Formeln (10) und (11) kann man auch eine Formel für s^2 herstellen, indem man $s \sin \alpha$ und $s \cos \alpha$ quadriert und addiert. Wenn man dabei die höheren Glieder wie bisher vernachlässigt, so bekommt man:

$$s^2 \sin^2 \alpha = q^2 + \frac{q^2 p^4}{36 r^4} + \frac{q^2 p^2}{3 r^2} + \frac{q^2 p^2}{180 r^4} (-16 q^2 + 7 p^2)$$

$$s^2 \cos^2 \alpha = p^2 + \frac{q^4 p^2}{9 r^4} - 2 \frac{q^2 p^2}{3 r^2} - 2 \frac{q^2 p^2}{45 r^4} (q^2 + 2 p^2)$$

Wenn man dieses zusammennimmt und ordnet, so findet man:

$$s^2 = q^2 + p^2 - \frac{q^2 p^2}{3 r^2} - \frac{q^2 p^2}{45 r^4} (q^2 + p^2) \quad (12)$$

Man kann diese Formel auch unmittelbar finden durch Entwicklung von

$$\cos \frac{s}{r} = \cos \frac{q}{r} \cos \frac{p}{r}.$$

IV. Der erweiterte Legendresche Satz.

Nach Andeutung von Fig. 4. verbinden wir zwei rechtwinklige sphärische Dreiecke zu einem allgemeinen sphärischen Dreieck ABC , indem die beiden Katheten q und q' nun die Seite $CB = a$ bilden, zu welcher die gemeinschaftliche Kathete p als Höhe gehört.

Fig. 4.

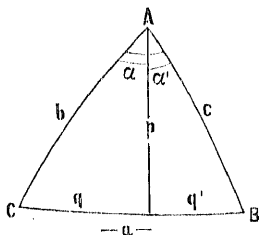
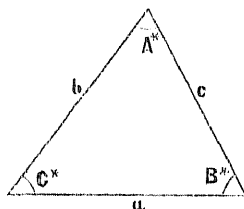


Fig. 5. *)



) Die Winkel A^ , B^* , C^* des oberen Dreiecks, deren Summe $A^* + B^* + C^* = 180^\circ$ ist, entsprechen den Winkeln α' , β' , γ' in der früheren Fig. 2. § 41. S. 236.

Der Dreiecks-Winkel A setzt sich nun aus den beiden Winkeln α und α' der beiden rechtwinkligen Dreiecke so zusammen:

$$A = \alpha + \alpha', \text{ also } \cos A = \cos \alpha \cos \alpha' - \sin \alpha \sin \alpha' \quad (13)$$

Nun hat man nach (11):

$$b \cos \alpha = p - \frac{p q^2}{3 r^2} - \frac{p q^2}{360 r^4} (16 p^2 + 8 q^2) \quad (14)$$

$$c \cos \alpha' = p - \frac{p q'^2}{3 r^2} - \frac{p q'^2}{360 r^4} (16 p^2 + 8 q'^2) \quad (15)$$

$$b \sin \alpha = q + \frac{p^2 q}{6 r^2} + \frac{p^2 q}{360 r^4} (7 p^2 - 16 q^2) \quad (16)$$

$$c \sin \alpha' = q' + \frac{p^2 q'}{6 r^2} + \frac{p^2 q'}{360 r^4} (7 p^2 - 16 q'^2) \quad (17)$$

Wenn man (14) und (15) multipliziert, dabei die höheren Glieder vernachlässigt, und dann nach gleichen Potenzen ordnet, so bekommt man:

$$\begin{aligned} b c \cos \alpha \cos \alpha' &= p^2 - \frac{p^2 q^2}{3 r^2} - \frac{p^2 q^2}{360 r^4} (16 p^2 + 8 q^2) \\ &\quad - \frac{p^2 q'^2}{3 r^2} + \frac{p^2 q^2 q'^2}{9 r^4} \\ &\quad - \frac{p^2 q'^2}{360 r^4} (16 p^2 + 8 q'^2) \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise findet man auch aus (16) und (17):

$$\begin{aligned} b c \sin \alpha \sin \alpha' &= q q' + \frac{p^2 q q'}{6 r^2} + \frac{p^2 q q'}{360 r^4} (7 p^2 - 16 q^2) \\ &\quad + \frac{p^2 q q'}{6 r^2} + \frac{p^4 q q'}{36 r^4} \\ &\quad + \frac{p^2 q q'}{360 r^4} (7 p^2 - 16 q'^2) \end{aligned}$$

Diese beiden Ausdrücke zusammen geben:

$$\begin{aligned} b c (\cos \alpha \cos \alpha' - \sin \alpha \sin \alpha') &= b c \cos (\alpha + \alpha') = b c \cos A = p^2 - q q' - \frac{p^2}{3 r^2} (q^2 + q'^2 + q q') \\ &\quad - \frac{p^2}{360 r^4} (16 p^2 q^2 + 16 p^2 q'^2 + 24 p^2 q q' + 8 q^4 + 8 q'^4 - 40 q^2 q'^2 - 16 q^3 q' - 16 q' q^3) \quad (18) \end{aligned}$$

Nun hat man nach der Hypotenusen-Formel (12):

$$\left. \begin{aligned} b^2 &= p^2 + q^2 - \frac{p^2 q^2}{3 r^2} - \frac{p^2 q^2}{45 r^4} (p^2 + q^2) \\ c^2 &= p^2 + q'^2 - \frac{p^2 q'^2}{3 r^2} - \frac{p^2 q'^2}{45 r^4} (p^2 + q'^2) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\text{und unmittelbar } a^2 = (q + q')^2 = q^2 + 2 q q' + q'^2 \quad (20)$$

Zugleich wird in Fig. 5. ein *ebenes* Dreieck eingeführt, dessen Seiten a, b, c gleich sind den Seiten des sphärischen Dreiecks, und dessen Winkel A^*, B^*, C^* bestimmt werden sollen. Für das ebene Dreieck hat man bekanntlich die Gleichung:

$$2 b c \cos A^* = b^2 + c^2 - a^2$$

und wenn man hier die Werte (19) und (20) einsetzt, so bekommt man:

$$bc \cos A^* = p^2 - q q' - \frac{p^2}{6 r^2} (q^2 + q'^2) - \frac{p^2}{90 r^4} (p^2 q^2 + p^2 q'^2 + q^4 + q'^4) \quad (21)$$

Dieses (21) wird mit dem früheren (18) verglichen, wodurch man nach einiger algebraischer Umformung finden wird:

$$bc (\cos A^* - \cos A) = \frac{p^2}{6 r^2} (q + q')^2 + \frac{p^2 (q + q')^2}{90 r^4} (3 p^2 + (q + q')^2 - 8 q q') \quad (22)$$

Das hier vorkommende Produkt $p (q + q')$ steht in naher Beziehung zu $bc \sin A$, denn wir haben aus (16) und (15) mit Weglassung der letzten Glieder:

$$bc \sin \alpha \cos \alpha' = p q + \frac{p^3 q}{3 r^2} - \frac{p q q'^2}{3 r^2}$$

Entsprechend geben auch (14) und (17):

$$bc \cos \alpha \sin \alpha' = p q' + \frac{p^3 q'}{3 r^2} - \frac{p q^2 q'}{3 r^2}$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen giebt:

$$bc (\sin \alpha \cos \alpha' + \cos \alpha \sin \alpha') = bc \sin A = p (q + q') + \frac{p (q + q')}{6 r^2} (p^2 - 2 q q')$$

also:
$$p (q + q') = bc \sin A \left(1 - \frac{1}{6 r^2} (p^2 - 2 q q') \right) \quad (23)$$

Das Ziel dieser Entwicklung ist die kleine Winkel-Differenz zwischen A und A^* , und wir wollen deshalb setzen:

$$A - A^* = x \quad (24)$$

folglich in erster Näherung:

$$\cos A = \cos (A^* + x) = \cos A^* - x \sin A^* + \dots \quad (25)$$

Setzt man dem entsprechend $\cos A^* - \cos A = x \sin A^*$ in (22), und berücksichtigt (23) genähert, mit $A = A^*$, so erhält man:

$$x = \frac{p}{6 r^2} (q + q') \quad (26)$$

Damit entwickelt man eine zweite Annäherung:

$$A = A^* + \frac{p}{6 r^2} (q + q') \quad , \quad \sin A = \sin A^* + \frac{p}{6 r^2} (q + q') \cos A^* + \dots$$

$$\sin A = \sin A^* \left(1 + \frac{p}{6 r^2} (q + q') \cotg A^* \right) \quad (26a)$$

oder mit Ersetzung von $\cotg A^*$ aus (21) und (23) genähert:

$$\cotg A^* = \frac{p^2 - q q'}{p (q + q')}$$

Dieses in (26a) gesetzt giebt:

$$\sin A = \sin A^* \left(1 + \frac{1}{6 r^2} (p^2 - q q') \right) \quad (27)$$

Damit kann man in (23) die Funktion $\sin A$ durch $\sin A^*$ ersetzen, und dadurch bekommt man:

$$p (q + q') = bc \sin A^* \left(1 + \frac{1}{6 r^2} (p^2 - q q') - \frac{1}{6 r^2} (p^2 - 2 q q') \right)$$

$$p (q + q') = bc \sin A^* \left(1 + \frac{1}{6 r^2} q q' \right) = 2 \triangle \left(1 + \frac{1}{6 r^2} q q' \right) \quad (28)$$

Hier haben wir die Fläche \triangle des ebenen Dreiecks eingeführt, nämlich:

$$\frac{bc \sin A^*}{2} = \triangle \quad (29)$$

Nun gehen wir zum zweiten Male auf (22) zurück, und bilden durch Einsetzung von (28):

$$bc(\cos A^* - \cos A) = \frac{2}{3} \frac{\triangle^2}{r^2} \left(1 + \frac{q q'}{3 r^2}\right) + \frac{4}{90} \frac{\triangle^2}{r^2} \left(\frac{3 p^2 + (q + q')^2 - 8 q q'}{r^2}\right)$$

Hier ist nach Fig. 4. zu berücksichtigen:

$$p^2 + q^2 = b^2, \quad p'^2 + q'^2 = c^2 \quad \text{und} \quad (q + q')^2 = a^2$$

womit man finden wird:

$$bc(\cos A^* - \cos A) = \frac{2}{3} \frac{\triangle^2}{r^2} + \frac{2}{90} \frac{\triangle^2}{r^2} \left(\frac{3 b^2 + 3 c^2 - a^2}{r^2}\right) \quad (30)$$

Nun wird die frühere Entwicklung (25) noch um ein Glied weiter geführt, nämlich mit $A - A^* = x$:

$$\cos A = \cos(A^* + x) = \cos A^* - x \sin A^* - \frac{x^2}{2} \cos A^*$$

$$\cos A - \cos A^* = -\sin A^* \left(x + \frac{x^2}{2} \cotg A^*\right)$$

Dieses in (30) gesetzt, zugleich mit Rücksicht auf (29) gibt:

$$x + \frac{x^2}{2} \cotg A^* = \frac{\triangle}{3 r^2} + \frac{1}{90} \frac{\triangle}{r^4} (3 b^2 + 3 c^2 - a^2) \quad (30a)$$

Die erste Näherung für x ist:

$$x = \frac{\triangle}{3 r^2} + \frac{1}{r^4} \dots$$

Dazu hat man aus dem ebenen Dreieck:

$$\cos A^* = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 b c} \quad \sin A^* = \frac{2 \triangle}{b c}$$

also

$$\frac{x^2}{2} \cotg A^* = \frac{\triangle^2 b^2 + c^2 - a^2}{9 r^4} \frac{2 \triangle}{2 \triangle} = \frac{\triangle}{72 r^4} (b^2 + c^2 - a^2)$$

Dieses in (30a) gesetzt gibt:

$$x = \frac{\triangle}{3 r^2} + \frac{\triangle}{360 r^4} (7 b^2 + 7 c^2 + a^2) \quad (31)$$

Hiebei ist die Winkelreduktion $A - A^* = x$ in analytischem Masse dargestellt; um auf Sekunden überzugehen, muss man den Faktor ϱ zusetzen. Thut man dieses und schreibt zugleich auch die zwei anderen entsprechenden Formeln für $B - B^*$ und $C - C^*$, so hat man:

$$x = A - A^* = \frac{\triangle}{3 r^2} \varrho + \frac{\triangle}{360 r^4} \varrho (a^2 + 7 b^2 + 7 c^2) \quad (31a)$$

$$y = B - B^* = \frac{\triangle}{3 r^2} \varrho + \frac{\triangle}{360 r^4} \varrho (7 a^2 + b^2 + 7 c^2) \quad (32a)$$

$$z = C - C^* = \frac{\triangle}{3 r^2} \varrho + \frac{\triangle}{360 r^4} \varrho (7 a^2 + 7 b^2 + c^2) \quad (33a)$$

$$\text{Summa } \varepsilon = \frac{\triangle}{r^2} \varrho + \frac{\triangle}{24 r^4} \varrho (a^2 + b^2 + c^2) \quad (34)$$

Unter \triangle ist hier die Fläche des ebenen Dreiecks verstanden, das aus den drei Seiten a, b, c konstruiert werden kann, und die vorstehenden Formeln sind immer nur Näherungs-Formeln, weil noch höhere Glieder vernachlässigt sind. Wenn man dagegen die kugelförmige Oberfläche F des sphärischen Dreiecks benützt, so hat man die schon früher in (2) § 40. S. 233 aufgestellte strenge Formel:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2} Q \quad (35)$$

Durch Vergleichung von (35) und (34) hat man auch eine Vergleichung zwischen F und \triangle , nämlich:

$$F = \triangle \left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24 r^2} \right) \quad (36)$$

Hiefür kann man auch noch eine andere Form finden, indem man nach (31a) schreibt:

$$\sin A = \sin A^* + \frac{\triangle}{3 r^2} \cos A^* = \sin A^* \left(1 + \frac{\triangle}{3 r^2} \cotg A^* \right)$$

Nimmt man hiezu die einfachen Beziehungen, $2bc \cos A^* = b^2 + c^2 - a^2$ und $2\triangle = bc \sin A^*$, so findet man:

$$\frac{\sin A}{\sin A^*} = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{12 r^2}$$

dieses auch auf die beiden andern Winkel angewendet giebt für (36):

$$F = \triangle \sqrt[3]{\frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin A^* \sin B^* \sin C^*}} \quad (37)$$

Von ähnlicher Bedeutung wie (36) ist auch die aus (34) folgende Gleichung:

$$\frac{\triangle}{r^2} = \varepsilon \left(1 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24 r^2} \right) \quad (38)$$

Setzt man dieses noch in (31a), (31b), (31c), so wird überall \triangle durch ε ersetzt und man hat:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180} \left(\frac{-2a^2 + b^2 + c^2}{r^2} \right) \quad (39a)$$

$$B - B^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180} \left(\frac{a^2 - 2b^2 + c^2}{r^2} \right) \quad (39b)$$

$$C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180} \left(\frac{a^2 + b^2 - 2c^2}{r^2} \right) \quad (39c)$$

$$\text{Summe} \quad \varepsilon = \varepsilon \quad (\text{Probe}) \quad (40)$$

Endlich kann man hier noch eine kleine Form-Veränderung vornehmen dadurch, dass man den Mittelwert m^2 von a^2, b^2 und c^2 einführt, nämlich:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = m^2 \quad (41)$$

Damit werden die vorstehenden Formeln:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{60} \frac{m^2 - a^2}{r^2} \quad (42a)$$

$$B - B^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{60} \frac{m^2 - b^2}{r^2} \quad (42b)$$

$$C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{60} \frac{m^2 - c^2}{r^2} \quad (42c)$$

Für ein gleichseitiges Dreieck verschwinden die zweiten Glieder, was auch an sich klar ist.

Nimmt man ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit den Katheten a und a , also $c^2 = 2 a^2$, so wird:

$$\varepsilon = \frac{a^2}{2r^2}, \quad 3m^2 = a^2 + a^2 + 2a^2, \quad m^2 = \frac{4}{3}a^2.$$

Setzt man $a = 100\,000^m$, so werden die zweiten Glieder in (42 a), (42 b) und (42 c) bzw.:

$$+ \frac{a^4}{40r^4} \varrho = + 0,0003''$$

$$+ \frac{a^4}{40r^4} \varrho = + 0,0003''$$

$$- \frac{a^4}{20r^4} \varrho = - 0,0006''$$

Zu einer Anwendung der vorstehenden Formeln auf ein Zahlen-Beispiel nehmen wir wieder das klassische Dreieck Inselsberg, Hohehagen, Brocken, das wir schon mehrfach, in § 40.—42 benützt haben.

Mit Zugrundlegung der hier als vorläufig zu betrachtenden Berechnungen § 41. S. 239 erhalten wir:

$$\log r = 6.804\,9621, \quad \log \triangle = 9.467\,2168, \quad \log F = 9.467\,2271$$

und dann nach (31 a), (31 b), (31 c):

$$A - A^* = 4,949\,900'' + 0,000\,136'' = 4,950\,036''$$

$$B - B^* = 4,949\,900 + 0,000\,096 = 4,949\,996$$

$$C - C^* = 4,949\,900 + 0,000\,121 = 4,950\,021$$

$$\varepsilon = 14,849\,700'' + 0,000\,353'' = 14,850\,053''$$

Dasselbe bekommt man auch nach den Formeln (42 a), (42 b), (42 c), nämlich:

$$A - A^* = 4,950\,018'' + 0,000\,018'' = 4,950\,036''$$

$$B - B^* = 4,950\,018 - 0,000\,021 = 4,949\,997$$

$$C - C^* = 4,950\,018 + 0,000\,003 = 4,950\,021$$

$$\varepsilon = 14,850\,054'' + 0,000\,000'' = 14,850\,054''$$

Damit hat man folgende sphärische und ebene Winkel:

$$\text{Inselsberg } A = 40^\circ 39' 30,380\,000'' \quad A^* = 40^\circ 39' 25,429\,964''$$

$$\text{Hohehagen } B = 86 \ 13 \ 58,840\,000 \quad B^* = 86 \ 13 \ 53,890\,004$$

$$\text{Brocken } C = 53 \ 6 \ 45,630\,053 \quad C^* = 53 \ 6 \ 40,680\,032$$

$$\text{Summe} \quad 180^\circ \ 0' \ 14,850\,053'' \quad 180^\circ \ 0' \ 0,000\,030''$$

Wenn man mit diesen Winkeln die frühere Berechnung (13)—(15) S. 239 wiederholt, so muss man mindestens 10stellig rechnen, um den Unterschied noch wahrnehmbar zu machen; indessen auch in den 10stelligen Logarithmen ist der Unterschied höchstens eine letzte Stelle, d. h. = 0.001, und z. B. an der Dreiecks-Seite $a = 69194,105^m$ bringt die neue schärfere Rechnung nur einen Unterschied von 0,00002^m oder 0,02^{mm}.

Da das benützte Dreieck eines der grössten in der deutschen Geodäsie ist, können wir hiernach mit Ruhe die höheren Glieder vernachlässigen.

Zum Schlusse dieser Entwicklungen wollen wir noch eine 1 berechnen für die Werte des Korrektions-Gliedes 4. Ordnung zum *Legé* d. h. nach (42a) für das Glied:

$$\Delta A_4 = \frac{\varepsilon}{60 r^2} (m^2 - a^2) \quad , \quad \text{wo } m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

Die beiden Faktoren ε und $(m^2 - a^2)$ desselben sind von einander unabhängig; der Excess ε misst die Fläche des Dreiecks und der Faktor $(m^2 - a^2)$ ist ein Mass für die Unsymmetrie und Ungleichseitigkeit des Dreiecks. Wenn ein Dreieck sehr lang aber schmal ist, so kann ε klein und $(m^2 - a^2)$ gross sein; wenn ein Dreieck sehr gross und nahezu gleichseitig ist, so wird ε gross und $(m^2 - a^2)$ klein; man kann also alle denkbaren Fälle am besten umfassen durch eine Tabelle für ΔA_4 mit zwei unabhängigen Eingängen ε und $m^2 - a^2$, wie im folgenden gegeben wird:

Winkel-Korrektion 4. Ordnung, ΔA_4 , zum Legendreschen Satz.

Unsymmetrie des Dreiecks		Sphärischer Excess ε des Dreiecks					
$\sqrt{m^2 - a^2}$	$m^2 - a^2$	$\varepsilon = 10''$	$\varepsilon = 20''$	$\varepsilon = 50''$	$\varepsilon = 100''$	$\varepsilon = 200''$	$\varepsilon = 300''$
10 ^{km}	100 ^{qkm}	0,00000''	0,00000''	0,00000''	0,00000''	0,00001	0,00001''
20	400	0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00003	0,00005
50	2 500	0,00001	0,00002	0,00005	0,00010	0,00021	0,00031
100	10 000	0,00004	0,00008	0,00021	0,00041	0,00082	0,00123
200	40 000	0,00016	0,00033	0,00081	0,00164	0,00329	0,00493
400	160 000	0,00066	0,00131	0,00325	0,00657	0,01314	0,01972

Indem wir noch eine allgemeinere Betrachtung über das Fehler-Glied des *Legendreschen* Satzes anstellen, schreiben wir nach (39a) mit Zuziehung des Ausdrucks \triangle nach (5) § 41. S. 238:

$$\Delta A_4 = \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{720 r^4} \sqrt{a^2 (2b^2 + 2c^2 - a^2) - (b - c)^2}$$

Wenn hier $b = c$, also das Dreieck gleichschenkelig genommen wird, so fällt $(b - c)^2$ fort, und der Ausdruck wird ein Maximum in Hinsicht auf das Verhältnis zwischen b und c . Indem man den an der Seite a anliegenden Winkel β einführt, kann man, mit $c = b$, das Fehler-Glied zweifach ausdrücken:

$$\Delta A_4 = \frac{a^4}{1440 r^4} \frac{1 - 4 \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta} \tan \beta \quad (a)$$

oder

$$\Delta' A_4 = \frac{b^4}{180 r^4} (1 - 4 \cos^2 \beta) \sin 2 \beta \quad (b)$$

Im Falle (a) entsteht ein Maximum mit $\beta = 45^\circ$ und im Falle (b) entstehen Maxima mit $\beta = 26^\circ 49'$ und $\beta = 73^\circ 44'$ und daraus folgt:

$$(\beta = 45^\circ), \quad (\Delta A_4) \text{ max} = 0,001389 \frac{a^4}{r^4}$$

$$(\beta = 73^\circ 44'), \quad (\Delta' A_4) \text{ max} = 0,002050 \frac{b^4}{r^4}$$

Setzt man hier bzw. a oder $b = 100\,000$ Meter, so wird das betreffende Fehler-Glied $= 0,000\,017''$ oder $0,000\,026''$.

Man sieht hieraus, dass bei messbaren Dreiecken die Korrektion 4. Ordnung immer zu vernachlässigen ist.

Der einfache *Legendresche* Satz mit Entwicklung bis $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich, erschien in den Pariser „Mémoires de l'académie des sciences“, Jahrgang 1787, und hat inzwischen zahlreiche Beweisformen gefunden.

Die Entwicklung bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$ ist zuerst von *Buzengeiger* gegeben, in der „Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften“, herausgegeben von *Lindemann* und *Bahnenberger*, 6. Band, S. 264–270, Tübingen 1818“. Dieses wird auch von *Bessel* zitiert in „Astr. Nachr. 19. Band, 1841, S. 103“. *Bayer*, „Das Messen auf der sphäroidischen Erd-Oberfläche, Berlin 1862“, giebt auf S. 70–74 den *Legendreschen* Satz „mit einer Erweiterung nach *Bessel*“, wovon in unserer vorigen Auflage, 1878, § 26. S. 126–130 entlehnt war.

Unsere neue Behandlungsweise (im vorstehenden § 44.) ist hervorgerufen durch die entsprechenden Entwicklungen für Dreiecke mit geodätischen Linien in *Gauss'* „Disquisitiones generales circa superficies curvas, art. 24–28“. Wir betrachten unseren § 44. als Vorbereitung für unsere späteren analogen Entwicklungen für Dreiecke auf dem Ellipsoid.

Über den Maximal-Einfluss der sphärischen Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$ giebt schon *Bayer* (Messen auf d. sphär. Oberfl. S. 73–74) eine Erörterung.

In unserer vorigen Auflage, 1878, S. 131, hatten wir eine solche Untersuchung mit der Nebenbedingung konstanter Dreiecks-Fläche. *Helmert* untersucht in seinen math. u. phys. Theor. d. h. G. I. § 16 den Maximal-Einfluss der höheren Glieder mit der Nebenbedingung, dass die Quadratsumme der Seiten, d. h. $a^2 + b^2 + c^2 = 3m^2$ konstant sei.

Kapitel V.

Sphärische Coordinaten.

§ 45. Übersicht der Coordinaten-Systeme.

Wir betrachten in der Folge die Erde als Kugel von gegebenem Halbmesser.

Bei dieser Betrachtungsweise werden manche Formeln und Rechen-Verfahren gefunden werden (mit kleinen Gliedern von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$), welche man sofort auch auf das Ellipsoid, bzw. auf Messungen an der Erd-Oberfläche anwenden kann, wenn man nur den Kugel-Halbmesser r der Erd-Krümmung an der betreffenden Stelle einigermaßen anpasst. Andere der in diesem Kapitel zu entwickelnden Formeln (mit Gliedern von der Ordnung $\frac{1}{r}$) werden keine so unmittelbare Übertragung auf das Ellipsoid zulassen, und daher nur als Vorbereitungs-Formeln in irgend welchem Sinne zu betrachten sein.

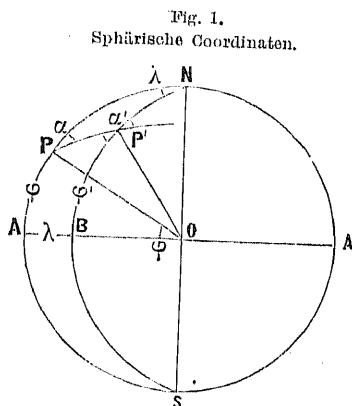
Indem wir nähere Betrachtungen dieser Art auf die besonderen Fälle verschieben, betrachten wir jetzt die einzelnen Arten der Punkt-Bestimmung auf der Kugel.

I. Geographische Coordinaten.

In Fig. 1. ist O der Mittelpunkt einer Kugel, welche, als Darstellung der Erde, den Nordpol N , Südpol S , also die Axe NS und den Äquator AA' hat.

NAS und NBS sind zwei Meridiane mit darauf liegenden Punkten P und P' ; die gegenseitige Lage zweier Meridiane wird durch den Längen-Unterschied λ bestimmt, welcher entweder als Winkel λ am Pol N oder als Bogen AB auf dem Äquator dargestellt werden kann.

Auf einem Meridian NA wird ein Punkt P bestimmt durch seine geographische Breite φ ; welche entweder als Erd-Centriwinkel $AOP = \varphi$ oder als Meridian-Bogen AP (für den Halbmesser = 1) dargestellt werden kann.



II. Polar-Coordinaten.

Wenn P als fester Punkt gilt, so kann man einen zweiten Punkt P' dagegen festlegen durch Angabe des Entfernungsbogens PP' und des Azimutes $NP P' = \alpha$. Die Azimute werden meist von Norden über Osten gezählt, wie in Fig. 1. mit α bei P eingeschrieben ist.

Ein zweites Azimut α' hat der Bogen PP' im Punkte P' und zwar erscheint in Fig. 1. der Winkel α' entweder als nordöstliches Azimut von $P'P$ in der Verlängerung über P' , oder als südwestliches Azimut von $P'P$.

Die Differenz der beiden Azimute α und α' führt den Namen „Meridian-Konvergenz“, d. h.

$$\text{Meridian-Konvergenz} = \alpha' - \alpha \quad (1)$$

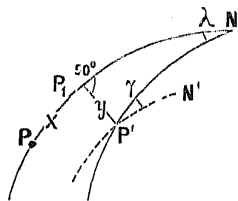
Dabei ist der dem Äquator zugewendete Winkel α' der grössere, also die Meridian-Konvergenz in dem Sinne der Gleichung (1) gezählt, positiv.

III. Rechtwinklige Coordinaten.

In Fig. 2., welche einen besonderen Fall von Fig. 1. darstellt, ist $P'P_1$ ein Grosskreisbogen, rechtwinklig zu PN , und der Punkt P' wird in Bezug auf P bestimmt, durch die Abscisse $PP_1 = x$, auf dem Meridian PN gemessen, und durch die Ordinate $P_1P' = y$, rechtwinklig zum Meridian gemessen.

Als Meridian-Konvergenz bei rechtwinkligen Coordinaten gilt der Winkel γ , welcher in P' liegt zwischen dem Meridiane $P'N$ und dem Bogen $P'N'$, welcher eine Parallele zu P_1N ist.

Fig. 2.
Rechtwinklige Coordinaten
 x, y .



Dieses ist nur eine andere Ausdrucksweise für die schon bei II. gegebene allgemeinere Erklärung der Meridian-Konvergenz, denn wenn das Azimut bei P_1 den be-

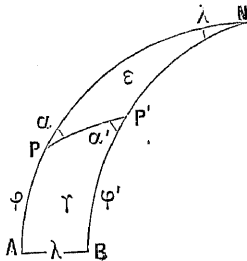
sonderen Wert 90° annimmt, so ist die Meridian-Konvergenz für die Punkte P_1 und P' die Differenz:

$$PP_1P' - P_1P'N = 90^\circ - (90^\circ - \gamma) = \gamma \quad (2)$$

Dabei kommt der Ursprungs-Punkt P und die Abscisse x gar nicht in Betracht, sondern nur der Fusspunkt P_1 .

Bemerkungen zur Meridian-Konvergenz.

Fig. 3.
Meridian-Konvergenz
 $\alpha' - \alpha = \gamma$.



Die Meridian-Konvergenz $\alpha' - \alpha$ ist gleich dem sphärischen Excesse γ des Vierecks $ABP'P$ Fig. 3., denn da dieses Viereck bei A und B rechte Winkel hat, besteht die Gleichung:

$$90^\circ + 90^\circ + (180^\circ - \alpha) + \alpha' - 360^\circ = \gamma$$

d. h. $\alpha' - \alpha = \gamma$ (3)

Bezeichnet man ferner mit ε den sphärischen Excess des Dreiecks $PP'N$, welches bei N den Längen-Unterschied λ enthält, so hat man:

$$\lambda + \alpha + (180^\circ - \alpha') - 180^\circ = \varepsilon$$

d. h.: $\lambda = (\alpha' - \alpha) + \varepsilon$ oder $\alpha' - \alpha = \lambda - \varepsilon$ (4)

Das letzte ist auch unmittelbar klar, indem λ der Excess des ganzen Dreiecks ABN sein muss.

Diese beiden Gleichungen (3) und (4) sind sphärisch streng richtig; man kann daran auch eine Näherungs-Formel knüpfen, indem man die Fläche des Vierecks $ABP'P$ für den Fall eines kleinen Bogens PP' ausdrückt. In diesem Falle sind auch die Breiten φ und φ' nahezu gleich, und dann ist diese Vierecks-Fläche (nach § 36. Fig. 1. S. 224) für den Halbmesser r :

$$\text{Fläche } ABP'P = (r\lambda)(r\sin\varphi) = r^2\lambda\sin\varphi$$

also der Excess:

$$\gamma = \frac{r^2\lambda\sin\varphi}{r^2} = \lambda\sin\varphi$$

$$\text{oder: } \alpha' - \alpha = \lambda\sin\varphi \text{ genähert.} \quad (5)$$

Wenn φ' und φ genau gleich sind, so ist diese Gleichung (5) für beliebig grossen Bogen PP' streng richtig, was man dann durch Betrachtung der beiden Meridian-Tangenten in P und P' leicht einsehen kann.

Anmerkung. Ohne praktische Bedeutung, aber für die zusammenfassende Darstellung nützlich, ist die Bemerkung, dass alle die im vorstehenden einzeln behandelten Coordinaten-Systeme auch von einem Gesichtspunkt aus als drei Arten von Polar-Systemen betrachtet werden können, nämlich so:

	Pol	Richtungswinkel	Strahlenlänge
I	N	λ	$90^\circ - \varphi'$
II	P	α	PP'
III	Pol zu PN	x	$90^\circ - \eta$

§ 46. Rechtwinklige sphärische (*Soldnersche*) Coordinaten.

Der schon im vorigen § 45. an Fig. 2. S. 258 erläuterte einfache Grundgedanke der rechtwinkligen sphärischen Coordinaten ist etwa um 1809 von *Soldner* zur Vermessung des Königreichs Bayern angewendet worden, und da dieser Vorgang allgemeine Nachahmung bei den übrigen deutschen Vermessungen gefunden hat, werden diese Coordinaten noch heute nach *Soldner* benannt.

Wir denken uns in Fig. 1. einen Meridian NOS der kugelförmigen Erde als Anfangsmeridian des Systems angenommen, und darauf einen Punkt O als Ursprung oder Nullpunkt.

Um einen Punkt A durch Coordinaten zu bestimmen, legen wir einen Grosskreisbogen $Q'A_1AQ$ durch den Punkt A , rechtwinklig zu dem Meridian ON , wobei A_1 auf ON der Fusspunkt der Senkrechten AA_1 ist und Q' sowie Q die sogenannten Pole des Meridians SON sind.

Durch den Fusspunkt A_1 wird bestimmt:

$$\left. \begin{array}{l} OA_1 = x, \text{ die Abscisse von } A \\ A_1A = y, \text{ die Ordinate von } A \end{array} \right\} \quad (1)$$

Wenn noch ein zweiter Punkt B durch Coordinaten bestimmt werden soll, so legt man durch ihn wieder einen Grosskreis $Q'B_1BQ$, welcher den Fusspunkt B_1 liefert, und durch dieselben Polpunkte Q' und Q geht, wie der Bogen für A .

Durch den Fusspunkt B_1 wird dann bestimmt:

$$\left. \begin{array}{l} OB_1 = x' \text{ die Abscisse von } B \\ B_1B = y' \text{ die Ordinate von } B \end{array} \right\} \quad (2)$$

Wir zählen die Abscissen x nördlich positiv und die Ordinaten y östlich positiv.

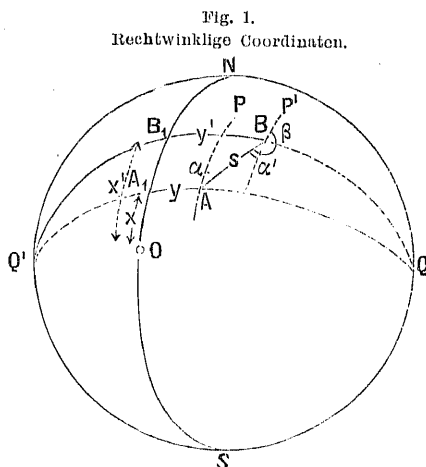
Richtungswinkel.

Ausser den Coordinaten selbst haben wir den Begriff des Richtungs-Winkels festzustellen.

Der Richtungswinkel α , welcher dem Grosskreisbogen AB in A zukommt, ist der Winkel, welchen dieser Bogen AB bildet mit dem zu dem Meridian von O parallel gezogenen Bogen AP (also *nicht* mit dem Meridian AN).

Bei der vorhin angegebenen Lage des Coordinaten-Systems, mit $+x$ nach Norden und $+y$ nach Osten, werden die Richtungswinkel α vom nördlichen x gegen östliches y hin positiv gezählt, wie in Fig. 1. eingeschrieben ist.

Der Winkel α , welcher hier *Richtungswinkel* genannt ist, ist derselbe, wie derjenige, welcher im ebenen rechtwinkligen Coordinaten-Systeme (Band II, S. 186 und 189) von uns *ebenes Azimut* oder kurzweg *Azimut* genannt wurde. So lange wir es nur mit einem *ebenen* Systeme zu thun hatten, wo gar keine Unterscheidung zwischen



dem Azimut (bei Gauss „Azimut in plano“) und sphärischem oder sphäroidischem Azimut vorkam, konnten wir uns jene kurze Ausdrucksweise wohl erlauben; aber nun, wo eine solche Unterscheidung nötig wird, wollen wir das Wort *Azimut* für die Abweichung von dem Meridian vorbehalten, und die Abweichungen von der Parallelen mit *Richtungs-Winkel* bezeichnen*).

In Fig. 1. wäre also der in der Figur *nicht* angezeichnete Winkel zwischen der Parallelen-Tangente AP und AB das *Azimut* von AB in A , und der mit α bezeichnete Winkel zwischen der Parallelen-Tangente AQ und AB ist der *Richtungs-Winkel* von AB in A .

Noch eine kleine Bemerkung ist über den Parallel-Bogen AP zu machen, weil Parallelen keine Seiten sphärischer Dreiecke sein können, während wir doch nachher mit sphärischen Dreiecken rechnen werden. Allein es handelt sich nur um die *Tangente* dieses Parallel-Bogens in A , welche rechtwinklig zu AA_1 ist; man kann den Richtungs-Winkel α auch definieren als Winkel zwischen AB und der Parallelen-Tangente AP , d. h. der Parallel-Bogen AP wird nur zur Abkürzung der Ausdrucksweise benützt, lässt insbesondere das Dreieck ABQ , das wir nachher mehrfach benützen, in seiner Eigenschaft als *sphärisches* Dreieck un geändert.

Nachdem wir so über den Begriff des Richtungs-Winkels α von AB in A völlig aufgeklärt worden sind, ist auch der Richtungs-Winkel β von BA in B bestimmt als Winkel zwischen der Parallelen-Tangente BP' und dem Strahle BA , im positiven Sinne gezählt.

Wir haben ausser β bei B auch noch den Winkel α' eingeschrieben, welcher 180° kleiner ist als β , oder allgemeiner:

$$\alpha' = \beta \pm 180^\circ \quad (3)$$

Dieser Winkel α' bedeutet also im wesentlichen dasselbe wie β , er ist aber in den Formeln meist angenehmer als β selbst, weil $\alpha - \alpha'$ eine kleine Grösse ist, welche in einer Reihen-Entwicklung benützt werden kann. Man nennt auch, nach Analogie der Meridian-Konvergenz, diese kleine Grösse:

$$\alpha - \alpha' = \text{Ordinaten-Konvergenz.} \quad (4)$$

Entwicklung der Grund-Formeln.

Mit Beziehung auf Fig. 1. stellen wir folgende Aufgabe:

Gegeben sind die Coordinaten x und y eines Punktes A , ferner die Länge s des Bogens AB und dessen Richtungs-Winkel α in A .

Gesucht sind die Coordinaten x' und y' des jenseitigen Punktes B und der jenseitige Richtungs-Winkel β des Bogens BA in B , oder statt β selbst die Ordinaten-Konvergenz $\alpha - \alpha'$.

Wir werden diese Aufgabe mit Hilfe des sphärischen Dreiecks ABQ von Fig. 1. lösen können, und haben deshalb dieses Dreieck in Fig. 2. (S. 262) nochmals besonders herausgezeichnet.

Alle Seiten und Winkel dieses Dreiecks stehen in einfacher Beziehung zu den besprochenen Coordinaten und Richtungs-Winkeln, z. B. der Winkel bei A ist $90^\circ - \alpha$ und der Winkel bei B ist $= 90^\circ + \alpha'$, wie die Vergleichung mit Fig. 1. un-

*) Was wir hier Richtungs-Winkel nennen, heisst auch in den Veröffentlichungen der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landes-Aufnahme „*Richtungs-Winkel*“, dagegen bei der preussischen Kataster-Vermessung „*Neigungs-Winkel*“.

mittelbar ergibt; und im übrigen ist nur noch die Bemerkung zu machen, dass die linearen Werte von Fig. 1. nun in Fig. 2., durch Division mit dem Erd-Halbmesser r , auf Erd-Centriwinkel in analytischem Masse gebracht sind, z. B.

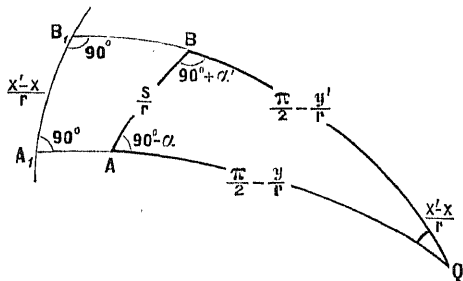
die Entfernung s in Fig. 1. giebt $\frac{s}{r}$

in Fig. 2. u. s. w. Der Wert $\frac{x' - x}{r}$

erscheint in Fig. 2. zweimal, erstens als Bogen $A_1 B_1$ und zweitens als Win-

kel Q , weil $Q A_1$ und $Q B_1$ beide Quadranten, d. h. analytisch $= \frac{\pi}{2}$ sind.

Fig. 2.
Dreieck ABQ von Fig. 1.



Nach dieser Vorbereitung benützen wir drei Formeln der sphärischen Trigonometrie, nämlich:

- 1) eine Cosinus-Formel (von (7) S. 195),
- 2) eine Sinus-Formel (von (8) S. 195),
- 3) eine Gauss'sche Formel (nach (13) S. 196).

Im einzelnen giebt dieses:

$$1) \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y'}{r} \right) = \cos \frac{s}{r} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{r} \right) + \sin \frac{s}{r} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{r} \right) \cos (90^\circ - \alpha)$$

$$2) \quad \frac{\sin \frac{x' - x}{r}}{\sin \frac{s}{r}} = \frac{\sin (90^\circ - \alpha)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y'}{r} \right)}$$

$$3) \quad \frac{\tan \frac{(90^\circ + \alpha') + (90^\circ - \alpha)}{2}}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{r} \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y'}{r} \right) \right)}{\cos \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{r} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y'}{r} \right) \right)} \cotg \frac{x' - x}{2r}$$

Wenn man diese drei Gleichungen, welche sehr ausführlich geschrieben sind, damit ihre Entstehungsweise ersichtlich ist, vereinfacht, so erhält man:

$$1) \text{ für } y': \quad \sin \frac{y'}{r} = \cos \frac{s}{r} \sin \frac{y}{r} + \sin \frac{s}{r} \cos \frac{y}{r} \sin \alpha \quad (5)$$

$$2) \text{ für } x': \quad \sin \frac{x' - x}{r} = \frac{\sin \frac{s}{r}}{\cos \frac{y'}{r}} \cos \alpha \quad (6)$$

$$3) \text{ für } \alpha': \quad \cotg \frac{\alpha - \alpha'}{2} = \frac{\cos \frac{y' - y}{2r}}{\sin \frac{y' + y}{2r}} \cotg \frac{x' - x}{2r} \quad (7)$$

Diese drei Grund-Gleichungen (5) (6) (7) enthalten bereits die streng sphärische Auflösung der gestellten Aufgabe; da aber alle vorkommenden linearen Grössen verhältnismässig klein gegen den Erd-Halbmesser r sind, so empfiehlt sich Reihen-Entwicklung, zu der wir nun übergehen.

Zuerst nehmen wir die Gleichung (5) allein vor:

$$\sin \frac{y'}{r} = \cos \frac{s}{r} \sin \frac{y}{r} + \sin \frac{s}{r} \cos \frac{y}{r} \cos \alpha$$

Auf die hierin vorkommenden \sin und \cos kleiner Grössen werden die Potenz-Reihen für \sin und \cos nach (17) und (18) S. 199 angewendet, jedoch mit Beschränkung auf Glieder dritter Ordnung; dieses giebt:

$$\frac{y'}{r} - \frac{y'^3}{6r^3} = \left(1 - \frac{s^2}{2r^2}\right) \left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3}\right) + \left(\frac{s}{r} - \frac{s^3}{6r^3}\right) \left(1 - \frac{y^2}{2r^2}\right) \sin \alpha$$

Wenn man mit Vernachlässigung der höheren Glieder weiter rechnet, so erhält man:

$$y' - \frac{y'^3}{6r^2} = y \left(1 - \frac{s^2}{2r^2} - \frac{y^2}{6r^2}\right) + s \sin \alpha \left(1 - \frac{s^2}{6r^2} - \frac{y^2}{2r^2}\right) \quad (8)$$

Diese Gleichung soll nach y' aufgelöst werden; man hat es also mit einer cubischen Gleichung zu thun. Da jedoch von vornherein alle Glieder von höherer als der dritten Ordnung vernachlässigt worden sind, so kann auch die Auflösung von (8) entsprechend genähert ausgeführt werden. Man bildet nämlich zuerst eine erste Näherung für y' :

$$y' = y + s \sin \alpha + \frac{1}{r^2} \dots$$

Dieser Näherungs-Wert von y' genügt, um das zweite Glied $\frac{y'^3}{6r^2}$ in (8) auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich genau zu bestimmen. Man hat daher durch Einsetzen der ersten Näherung in jenes zweite Glied:

$$\begin{aligned} y' - \frac{(y + s \sin \alpha)^3}{6r^2} &= y + s \sin \alpha + y \left(-\frac{s^2}{2r^2} - \frac{y^2}{6r^2}\right) + s \sin \alpha \left(-\frac{s^2}{6r^2} - \frac{y^2}{2r^2}\right) \\ y' &= y + s \sin \alpha - \frac{3s^2 y - 3s^2 y \sin^2 \alpha + s^3 \sin \alpha - s^3 \sin^3 \alpha}{6r^2} \\ y' &= y + s \sin \alpha - \frac{s^2 y \cos^2 \alpha}{2r^2} - \frac{s^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{6r^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Damit ist die Gleichung für y' erledigt, und wir gehen über zur Entwicklung für x' .

Zur Bestimmung von $x' - x$ haben wir die Gleichung (6):

$$\sin \frac{x' - x}{r} = \frac{\sin \frac{s}{r}}{\cos \frac{y'}{r}} \cos \alpha$$

Dieses giebt bis zur dritten Ordnung entwickelt:

$$\begin{aligned} \frac{x' - x}{r} - \frac{(x' - x)^3}{6r^3} &= \frac{s}{r} - \frac{s^3}{6r^3} \cos \alpha \\ &\quad 1 - \frac{y'^2}{2r^2} \\ \frac{x' - x}{r} - \frac{(x' - x)^3}{6r^3} &= \left(\frac{s}{r} - \frac{s^3}{6r^3}\right) \left(1 + \frac{y'^2}{2r^2}\right) \cos \alpha \\ \frac{x' - x}{r} - \frac{(x' - x)^3}{6r^2} &= s \cos \alpha \left(1 - \frac{s^2}{6r^2} + \frac{y'^2}{2r^2}\right) \end{aligned}$$

Erste Näherung $x' - x = s \cos \alpha + \dots$

$$\begin{aligned} \text{folglich: } x' - x &= \frac{(s \cos \alpha)^3}{6 r^2} + s \cos \alpha - \frac{s^3 \cos \alpha}{6 r^2} + \frac{s \cos \alpha y'^2}{2 r^2} \\ x' &= x + s \cos \alpha + \frac{s \cos \alpha y'^2}{2 r^2} - \frac{s^3 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{6 r^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Damit ist auch die zweite Gleichung für x' erledigt, und wir gehen zur Entwicklung für die Ordinaten-Konvergenz.

Zur Bestimmung von $\alpha - \alpha'$ haben wir die Gleichung (7), und wenn man in derselben zuerst Zähler und Nenner umkehrt, so hat man:

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha - \alpha'}{2} = \frac{\sin \frac{y' + y}{2 r}}{\cos \frac{y' - y}{2 r}} \operatorname{tang} \frac{x' - x}{2 r}$$

Die Entwicklungen können hier überall schon beim *ersten* Gliede stehen bleiben, weil dadurch schon rechts ein Glied von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ entsteht, über welches wir nicht hinaus gehen. Wir haben daher kurz:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - \alpha'}{2} + \dots &= \frac{\frac{y' + y}{2 r}}{1 - \dots} \frac{x' - x}{2 r} + \dots \\ \alpha - \alpha' &= \frac{y' + y}{2 r^2} (x' - x) \end{aligned} \quad (11)$$

Eine etwas andere Form bekommt man hiefür, wenn man $y' = y + s \sin \alpha + \dots$ nach (9) einsetzt, nämlich:

$$\alpha - \alpha' = (x' - x) \frac{y}{r^2} + \frac{(x' - x) s \sin \alpha}{2 r^2} \quad (12)$$

In (11) und (12) ist zur Reduktion auf Sekunden noch der Faktor $\varrho = 206\,265''$ hinzu zu setzen.

Zusammenfassung.

Zur Übersicht führen wir noch eine abkürzende Bezeichnung ein, indem wir setzen:

$$s \sin \alpha = n \quad \text{und} \quad s \cos \alpha = m \quad (13)$$

Damit geben die Formeln (9), (10) und (12), letztere mit Zusetzung von ϱ :

$$y' = y + n - \frac{m^2 y}{2 r^2} - \frac{m^2 n}{6 r^2} \quad (14)$$

$$x' = x + m + \frac{m y'^2}{2 r^2} - \frac{m n^2}{6 r^2} \quad (15)$$

$$\alpha - \alpha' = m y \frac{\varrho}{r^2} + m n \frac{\varrho}{2 r^2} \quad \text{oder} \quad = m \frac{y + y'}{2} \frac{\varrho}{r^2} \quad (16)$$

Hiezu $\beta = \alpha' \pm 180^\circ$,

$$\text{also: } \beta = \alpha \pm 180^\circ - m y \frac{\varrho}{r^2} - m n \frac{\varrho}{2 r^2} \quad (16a)$$

Die von r abhängigen Coëfficienten dieser Formeln kann man bei gegebener geographischer Breite immer nach der Hilfstafel Seite [2]—[23] des Anhangs bestimmen; für die Breiten $\varphi = 45^\circ$, 50° , 55° sind die Logarithmen dieser Coëfficienten folgender:

φ	$\log \frac{1}{2r^2}$	$\log \frac{1}{6r^2}$	$\log \frac{\varrho}{r^2}$	$\log \frac{\varrho}{2r^2}$
45°	6.08969 — 20	5.61257 — 20	1.70514 — 10	1.40411 — 10
50°	6.08918	5.61206	1.70464	1.40361
55°	6.08869	5.61157	1.70415	1.40312

Wenn man in den Formeln (14), (15), (16) den Halbmesser $r = \infty$ setzt, d. h. wenn man die Kugel in die Ebene übergehen lässt, so bekommt man:

$$y' = y + s \sin \alpha \quad x' = x + s \cos \alpha \quad \alpha' = \alpha$$

Dieses sind die für die ebene Coordinaten-Rechnung gültigen Formeln.

Dasselbe hat man, wenn man nicht $r = \infty$, aber die Entfernung s und damit auch m und n sehr *klein* setzt; man sieht daraus, dass die *Soldnerschen* Formeln *von selbst* in die Formeln der Ebene übergehen, sobald die Entfernungen so klein werden, dass sich das Anbringen der Korrektions-Glieder nicht lohnt.

Unsere Schluss-Formeln (14), (15), (16) werden auch noch in manchen anderen Formen gebraucht, wie für die Ordinaten-Konvergenz (16) schon bei (11) und (12) gezeigt wurde.

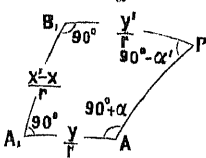
Auch die Ordinaten-Formel (14) kann umgeformt, d. h. etwa so geschrieben werden:

$$y' - y = s \sin \alpha - \frac{2y + y'}{3} \frac{m^2}{2r^2} \quad (18)$$

Man kann auch daran denken, aus der Abscissen-Formel (15) die Grösse y' zu eliminieren; indessen der algebraisch störende Umstand, dass in der Gleichung (15) für x das erst zu bestimmende y' selbst vorkommt, ist für unsere Anwendungen unwesentlich, denn gewöhnlich hat man x' und y' zu berechnen, und bestimmt dann y' zuerst, um es für die Einsetzung in das Korrektions-Glied für x zu haben; sollte ausnahmsweise x allein zu bestimmen sein, so müsste man zum Zweck der Berechnung des ersten Korrektions-Gliedes von x einen Näherungs-Wert von y' nehmen.

Geometrische Bedeutung der Ordinaten-Konvergenz

Fig. 3.
Ordinaten-Konvergenz
 $\alpha - \alpha'$.



Die Formel (11) hat eine sehr einfache geometrische Bedeutung, es ist nämlich $\alpha - \alpha'$ der sphärische Excess des Vierecks APB_1A_1 , dessen Fläche, eben, genähert

$$= \frac{y' + y}{2} (x' - x) \text{ ist.}$$

Man kann diese Bedeutung von $\alpha - \alpha'$ unmittelbar leicht nachweisen, nämlich nach Fig. 3. ist der Excess des Vierecks:

$$90^\circ + 90^\circ + (90^\circ + \alpha) + (90^\circ - \alpha') - 360^\circ = \alpha - \alpha' \quad (19)$$

Dieses ist dieselbe Anschauung, welche schon bei Fig. 3. § 45. S. 260 auf die Meridian-Konvergenz angewendet wurde.

Rechen-Hilfsmittel für die Korrektions-Glieder zweiter Ordnung der Soldnerschen Coordinaten-Formeln.

Wenn man zu häufiger Anwendung dieser Coordinaten-Formeln Schemate lithographiert, und hiebei die konstanten Coëfficienten-Logarithmen $\log \frac{1}{2r^2}$, $\log \frac{Q}{2r^2}$ u. s. w. mit vordruckt, so geht die Rechnung nach den Formeln (14), (15), (16) ziemlich rasch; doch sind auch schon mehrfach besondere Hilfsmittel angewendet worden.

In unserem Anhang Seite [32] haben wir zwei kleine Tabellen I. und II. für die Korrektions-Glieder der Formeln (14), (15), (16) gegeben, insofern alle diese Glieder im wesentlichen die Form $\frac{A^2 B}{2r^2}$ oder $\frac{A B}{r^2} Q$ haben, doch sind diese Tabellen I. und II. auf Seite [32] nicht zum eigentlichen Rechnen bestimmt, sondern nur zur Übersicht, oder als Hauptwerte zu graphischen Darstellungen, oder auch zur Unterstützung von Rechnungen mit dem Rechenschieber (wozu die *Quotien-Formen* $\frac{A^2 B}{81,44}$ und $\frac{A B}{3,95}$ u. s. w. nützlich sind, weil man damit einen solchen Wert auf einmal mit dem Rechenschieber einstellen kann).

Eine ausführlichere, für $\varphi = 51^\circ$ gültige, zum unmittelbaren praktischen Gebrauch bestimmte Tabelle der Werte $\frac{A^2 B}{2r^2}$ ist enthalten in dem Werke: „Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmess-Kunst von F. G. Gauss“, Berlin 1876, II. Teil, S. 54–61.

Graphische Hilfsmittel für die Soldnerschen Korrektions-Glieder sind bei der badischen Landes-Vermessung benützt worden (uns jedoch nicht näher bekannt geworden). Drei Schichten-Tafeln für den vorliegenden Zweck giebt Frank, „Die Grundlehren der trigonometrischen Vermessung“, Leipzig 1879, Anhang Tafel I., II., III.

§ 47. Beispiel der Soldnerschen Coordinaten-Berechnung.

Zu einem zusammenhängenden Zahlen-Beispiel, an welchem der ganze Gang der Soldnerschen Coordinaten-Berechnung gezeigt werden kann, eignet sich sehr gut der nördliche Teil des badischen Netzes, den wir in unserem I. Bande S. 194–203 ausgeglichen haben.

Wir nehmen die Zahlen-Werte von dort S. 203 nebst der Fig. 10. S. 195 nochmals vor, wobei der Punkt Mannheim als Coordinaten-Nullpunkt dient (Fig. 1. S. 268).

Von diesem Ursprung Mannheim aus zählt die amtliche badische Vermessung $+x$ nach Süden und $+y$ nach Westen, während wir nun, dem allgemeineren Gebrauche in Deutschland entsprechend, $+x$ nach Norden und $+y$ nach Osten zählen wollen.

Auf der Sternwarte Mannheim wurde das Azimut nach Speyer astronomisch gemessen, und zwar von Norden über Osten gezählt:

$$\text{Azimut Mannheim-Speyer} = \alpha_0 = 183^\circ 40' 25,291'' \quad (1)$$

Dieses ist nicht nur astronomisches *Azimut*, sondern in diesem Falle auch trigonometrischer *Richtungs-Winkel*, weil der Ausgangs-Punkt Mannheim Ursprung des Coordinaten-Systems ist.

Hiezu haben wir (von Band I. S. 203) auch die Entfernung Mannheim-Speyer, nämlich:

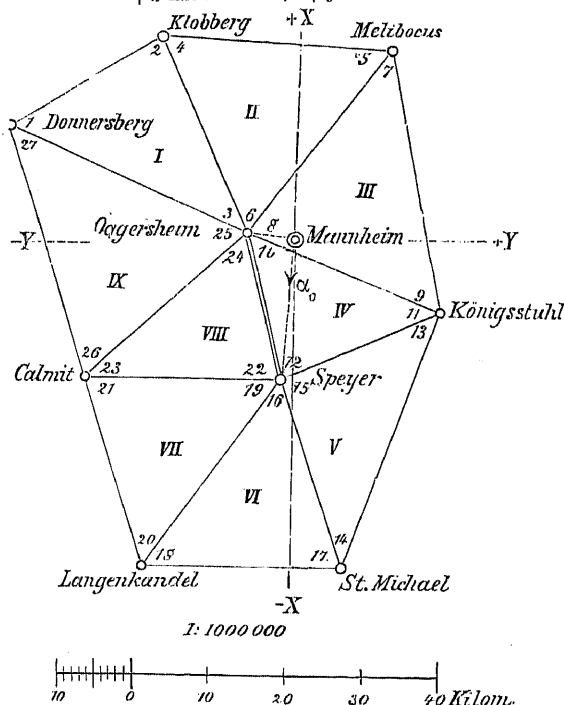
$$\text{Mannheim-Speyer} = s, \quad \log s = 4.275\,4362\,8 \quad (2)$$

Damit können wir sofort die Coordinaten y', x' von Speyer berechnen, und zwar vereinfachen sich diesmal die allgemeinen Formeln deswegen, weil die Ausgangs-Coordinaten y, x für Mannheim beide Null sind. Setzt man also $y = 0$ und $x = 0$ in den Formeln (13)–(16) § 46. S. 265, so bekommt man:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Speyer} \quad \left. \begin{array}{l} s \sin \alpha_0 = n \\ y' = n - \frac{m^2 n}{6 r^2} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} s \cos \alpha_0 = m \\ x' = m + \frac{m n^2}{3 r^2} \end{array} \right\} \quad (3) \\ \alpha' = \alpha_0 - \frac{\rho}{2 r^2} m n \end{array} \right\}$$

Fig. 1.

Badisches Dreiecks-Netz.
Coordinaten-System mit dem Ursprung Mannheim.
+x nach Norden, +y nach Osten.



Der Coordinaten-Nullpunkt hat die geographische Breite rund $\varphi = 49^\circ 30'$, und damit bilden wir nach Seite [14] des Anhangs die für uns nötigen konstanten Coefficienten-Logarithmen:

$$\left. \begin{array}{lll} \log \frac{1}{2 r^2} = 6.08923 & \log \frac{1}{6 r^2} = 5.61211 & \log \frac{1}{3 r^2} = 5.91314 \\ \log \frac{\rho}{r^2} = 1.70469 & \log \frac{\rho}{2 r^2} = 1.40366 & \end{array} \right\} \quad (4)$$

Nun rechnen wir nach (1) und (2), mit 7stelligen Logarithmen (mit einer an sich unsicheren, durch Interpolation nach *Schrön* erhaltenen 8. Kontrollestelle 0.1):

$\alpha_0 = 183^\circ 40' 25.291''$	$\log s$	4.275 4362.8	$\log s$	4.275 4362.8
	$\log \sin \alpha_0$	8.806 6825.0 _n	$\log \cos \alpha_0$	9.999 1066.6 _n
	$\log n$	3.082 1187.8 _n	$\log m$	4.274 5429.4 _n
	$n = -1208,144^m$		$m = -18816,678^m$	(5)

Hiezu die Korrektions-Glieder nach (3):

$\log m^2$	8.5491	$\log m$	4.2745 _n
$\log n$	3.0821 _n	$\log n^2$	6.1642
$\log \left(-\frac{1}{6r^2}\right)$	5.6121 _n	$\log \frac{1}{3r^2}$	5.9131
	7.2433		6.3518 _n

$+ 0,0017$

 $- 0,0002$

(6)

Diese kleinen Beträge zu (5) hinzunehmend hat man:

Speyer $y = -1208,142^m$ $x = -18\,816,678^m$ (7)

Endlich noch die Ordinaten-Konvergenz:

$\log m$	4.2745 _n
$\log n$	3.0821 _n
$\log \left(-\frac{Q}{2r^2}\right)$	1.4037 _n
	8.7603 _n

$- 0,058''$

(8)

Man hat also nun in Zusammenfassung:

Richtungs-Winkel Mannheim-Speyer $\alpha = 183^\circ 40' 25,291''$

hiez u nach (8): $- 0,058$

$\alpha' = 183^\circ 40' 25,233''$

$\pm 180^\circ$

Also Richtungs-Winkel Speyer-Mannheim $\beta = 3^\circ 40' 25,233''$ (9)

Nun kann man die Richtungs-Winkel aller von Speyer ausgehender Strahlen angeben, denn man braucht nur die auf Speyer gemessenen und ausgeglichenen Winkel von Band I, S. 202—203 zu β hinzu zu nehmen, z. B.:

Richtungs-Winkel Speyer-Mannheim = $3^\circ 40' 25,233''$

hiez u — Winkel Oggersheim-Speyer-Mannheim — $17\ 41\ 17,738$

also Richtungs-Winkel Speyer-Oggersheim . . = $345^\circ 59' 7,495''$

Hiez u + Winkel [12] + $79\ 11\ 3,542$

Richtungs-Winkel Speyer-Königsstuhl = $65^\circ 10' 11,037''$ u. s. w.

Oder mit anderen Worten: Man macht mit dem oben bei (9) gefundenen Orientierungs-Werte $\beta = 3^\circ 40' 25,233''$ einen orientierten *Abriss* der Station Speyer. Indem wir dieses vollständig thun, und auch die Seiten-Logarithmen zufügen, erhalten wir:

Station Speyer, orientierter Abriss.

Zielpunkt	Richtungs-Winkel α	Entfernung, $\log s$
Mannheim	$3^\circ 40' 25,233''$	4.358 8019.0
Königsstuhl	$65\ 10\ 11,037$	4.430 2529.8
St. Michael	$161\ 20\ 31,865$	4.275 4362.8
Langenkandel	$215\ 0\ 1,150$	4.502 8974.0
Calmit	$270\ 34\ 57,864$	4.418 4219.3
Oggersheim	$345\ 59\ 7,494$	4.296 5476.9

Hievon wählen wir Speyer-Langenkandel als Beispiel aus, und setzen die zugehörige Coordinaten- und Richtungs-Winkel-Berechnung in aller Ausführlichkeit her.

Speyer-Langenkandel.

$\alpha = 215^{\circ} 0' 1,150''$	$\log s$	4.502 8974·0	$\log s$	4.502 8974·0			
	$\log \sin \alpha$	9.758 5947·8 _n	$\log \cos \alpha$	9.913 3628·3 _n			
	$\log n$	4.261 4921·8 _n	$\log m$	4.416 2602·3 _n			
(7) gegeben:	$n = -18\,259,639$	$m = -26\,077,156$					
	$y = -1\,208,142$	$x = -18\,816,678$					
hiez u Speyer: $y + n = -19\,467,781$		$x + m = -44\,893,834$					
genähert $= y'$		genähert $= x'$					
Korrektions-Glieder für y .		Korrektions-Glieder für α .					
$\log m^2$	8.8325	$\log m^2$	8.8325	$\log m$	4.4163 _n	$\log m$	4.4163 _n
$\log y$	3.0821 _n	$\log n$	4.2615 _n	$\log y'^2$	8.5786	$\log n^2$	8.5230
$\log\left(-\frac{1}{2r^2}\right)$	6.0892 _n	$\log\left(-\frac{1}{6r^2}\right)$	5.6121 _n	$\log\left(-\frac{1}{2r^2}\right)$	6.0892	$\log\left(-\frac{1}{6r^2}\right)$	5.6121 _n
	8.0038		8.7061		9.0841 _n		8.5514
	+ 0,010		+ 0,051		- 0,121		+ 0,036
Zusammenfassung:							
$y + n = -19\,467,781^m$		$x + m = -44\,893,834^m$					
		+ 0,010				- 0,121	
		+ 0,051				+ 0,036	
Langenkandel: $y' = -19\,467,720$							
$x' = -44\,893,919$							

Zusammenfassung: $\alpha = 215^\circ 0' 1,150''$
 - 0,160
 - 1,206

$\alpha' = 214^\circ 59' 59,784''$

$\pm 180^\circ$

$\beta = 34^\circ 59' 59,784'' = \text{Richtungs-Winkel Langenkandel-Speyer.}$

Mit diesem Richtungs-Winkel β und mit den auf Langenkandel gemessenen und ausgeglichenen Dreiecks-Winkeln kann man nun von neuem einen orientierten Abriss für Langenkandel aufstellen.

In dieser Weise wurden die Coordinaten aller Punkte unseres badischen Netzes Fig. 1. 268 berechnet, und zwar jeder Punkt auf mindestens zwei Wegen, z. B. Langenkandel nicht bloss auf dem soeben behandelten Wege Speyer-Langenkandel, sondern auch von St. Michael oder von Calmit aus.

Bei den dadurch erhaltenen zahlreichen Proben zeigte sich, dass die Coordinaten nahezu auf Millimeter übereinstimmten (obgleich nur mit 7stelligen Logarithmen, nach *Schrön*, gerechnet worden war).

Folgendes sind die sämtlichen so erhaltenen Coordinaten (mit $+x$ nach Norden, $+y$ nach Osten).

Punkt	y	x
Mannheim	$\pm 0,000^m$	$\pm 0,000^m$
Oggersheim	— 6 001,777	+ 388,767
Speyer	— 1 208,142	— 18 816,676
Calmit	— 27 414,066	— 18 550,134
Donnersberg	— 38 145,688	+ 15 278,872
Klobberg	— 18 104,628	+ 28 049,296
Melibocus	+ 12 727,470	+ 26 509,100
Königsstuhl	+ 19 525,476	— 9 223,075
St. Michael	+ 7 407,498	— 44 332,386
Langenkandel	— 19 467,721	— 44 893,918

Über die sachliche Bedeutung dieser Coordinaten, welche von den amtlichen badischen Coordinaten unabhängig sind, haben wir schon in unserem I. Bande (1888) S. 203—204 einiges mitgeteilt, und dabei die als Genauigkeits-Beispiele nicht uninteressanten Differenzen unserer Werte gegen die amtlichen badischen Coordinaten angegeben.

Die meisten dieser Punkte, mit Ausnahme von Melibocus und Königsstuhl, gehören auch der *bayerischen* Triangulierung an, und sind als bayerische Punkte ebenfalls mit Coordinaten auf Mannheim als Ursprung bezogen. Die Differenzen der bayerischen Coordinaten gegen unsere Werte sind in unserer vorigen Auflage (1878), II. Band, S. 272 angegeben. Man vergl. auch unsere erste Mitteilung „Über die Genauigkeit der süddeutschen Landes-Triangulierungen“, Astr. Nachr. 75. Band, 1870, Nr. 1795—1796, S. 289—306 u. S. 367. (vgl. auch *Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen“, I. S. 257 und 279.)

Endlich kann man noch eine dritte Vergleichung bilden durch Zuziehung der inzwischen neu berechneten und veröffentlichten bayerischen Coordinaten in dem Werke: „Die bayerische Landes-Vermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, München 1873“, S. 516; dort finden sich für die fraglichen Punkte Coordinaten in bayerischen Ruten, welche in Meter verwandelt, von den früheren Angaben (1869) des bayerischen topographischen Bureau's wieder etwas abweichen, z. B. bei Langenkandel um 0,175 m in y und um 0,558 m in x .

§ 48. Bestimmung von Entfernung und Richtungs-Winkeln aus *Soldnerschen* Coordinaten.

Wir stellen die im Gegensatz zum vorigen § 46.—47. umgekehrte Aufgabe:

Gegeben sind die Coordinaten zweier Punkte P und P' , nämlich:

$$\left. \begin{array}{l} x \text{ und } y \text{ Coordinaten von } P \\ x' \text{ und } y' \text{ „ „ „ } P' \end{array} \right\} \quad (1)$$

Gesucht ist:

$$\left. \begin{array}{l} \text{die Entfernung } PP' = s \\ \text{der Richtungs-Winkel } (PP') = \alpha \\ \text{„ „ „ } (P'P) = \beta = \alpha' \pm 180^\circ \end{array} \right\} \quad (2)$$

Man kann diese Aufgabe lösen durch Umkehrung von (14), (15) § 46. S. 265, wobei in den Korrekptions-Gliedern $m = x' - x$ und $n = y' - y$ gesetzt wird. Auf diese Weise erhält man:

$$s \sin \alpha = (y' - y) + \frac{(x' - x)^2 y}{2 r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)}{6 r^2} = N \quad (3)$$

$$s \cos \alpha = (x' - x) - \frac{(x' - x) y'^2}{2 r^2} + \frac{(x' - x) (y' - y)^2}{6 r^2} = M \quad (4)$$

Die hier geschriebenen Zeichen N und M sollen nur die Zusammenfassung ausdrücken, denn man hat nun weiter:

$$\tan \alpha = \frac{N}{M} \quad (5)$$

$$s = \frac{N}{\sin \alpha} \quad \text{oder} \quad = \frac{M}{\cos \alpha} \quad (6)$$

Um auch β zu finden, braucht man nur die Bezeichnungen für die Punkte P und P' umzukehren, was wir nicht durch besondere Formeln von der Form (5) und (6) anzuzeigen für nötig halten (vgl. das nachfolgende Zahlen-Beispiel (21) und (22)).

Statt dessen kann man aber auch die Formel (16) § 46. S. 265 anwenden:

$$\alpha' = \alpha - (x' - x) (y' + y) \frac{\varrho}{2 r^2} \quad (7)$$

$$\text{oder} \quad \alpha' = \alpha - (x' - x) y \frac{\varrho}{r^2} - (x' - x) (y' - y) \frac{\varrho}{2 r^2} \quad (7a)$$

$$\text{und dann:} \quad \beta = \alpha' \pm 180^\circ \quad (7b)$$

Damit sind alle Bedürfnisse befriedigt; es ist jedoch zu manchen Zwecken erwünscht, die Entfernung s auch *ohne* die Richtungs-Winkel oder andererseits einen oder beide Richtungs-Winkel ohne die Entfernung zu bestimmen.

Wir behandeln zuerst die Aufgabe, die Entfernung s allein aus den Coordinaten abzuleiten. Man kann dieses sofort mit Hilfe der Gleichungen (3) und (4) thun, denn wenn man diese quadriert und addiert, so erhält man:

$$\begin{aligned} s^2 &= \left((y' - y) + \frac{(x' - x)^2 y}{2 r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)}{6 r^2} \right)^2 \\ &\quad + \left((x' - x) - \frac{(x' - x) y'^2}{2 r^2} + \frac{(x' - x) (y' - y)^2}{6 r^2} \right)^2 \\ s^2 &= (y' - y)^2 + \frac{(x' - x)^2 (y' - y) y}{r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)^2}{3 r^2} \\ &\quad + (x' - x)^2 - \frac{(x' - x)^2 y'^2}{r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)^2}{3 r^2} \\ s^2 &= (y' - y)^2 + (x' - x)^2 + \frac{(x' - x)^2}{3 r^2} \left(3 y (y' - y) + 2 (y' - y)^2 - 3 y'^2 \right) \\ s^2 &= (y' - y)^2 + (x' - x)^2 - \frac{(x' - x)^2}{3 r^2} \left(y^2 + y y' + y'^2 \right) \quad (8) \end{aligned}$$

Hier bezeichnen wir die ersten Glieder, welche der Rechnung mit ebenen Coordinaten entsprechen mit s_0^2 , d. h.:

$$(y' - y)^2 + (x' - x)^2 = s_0^2 \quad (9)$$

und da man in den Korrekptions-Gliedern s_0 mit s verwechseln kann, haben wir aus (8):

$$s^2 = s_0^2 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{3 r^2} (y^2 + y y' + y'^2) \right)$$

$$s = s_0 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{6 r^2} (y^2 + y y' + y'^2) \right) \text{ oder } = s_0 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{6 r^2} \frac{y'^3 - y^3}{y' - y} \right) \quad (10)$$

oder logarithmisch:

$$\log s = \log s_0 - \frac{\mu}{6 r^2} \cos^2 \alpha (y^2 + y y' + y'^2) \quad (11)$$

Um auch für α eine unmittelbare Formel zu bekommen, denken wir uns die Formeln (3) und (4) so zerlegt:

$$s \sin \alpha = (y' - y) + dy \quad (12)$$

$$s \cos \alpha = (x' - x) + dx \quad (13)$$

wo die Bedeutung von dy und dx sich durch Vergleichung von (12) mit (3) sowie von (13) mit (4) ergibt. Wir wollen auch α selbst entsprechend zerlegt denken in $\alpha_0 + d\alpha$ und haben dann:

$$\alpha = \alpha_0 + d\alpha = \arctan \frac{(y' - y) + dy}{(x' - x) + dx} \quad (14)$$

Nach dem *Taylor'schen* Satze giebt dieses:

$$\alpha_0 = \arctan \frac{y' - y}{x' - x} \quad (15)$$

und

$$d\alpha = \frac{1}{1 + \left(\frac{y' - y}{x' - x} \right)^2} \frac{dy}{x' - x} - \frac{1}{1 + \left(\frac{y' - y}{x' - x} \right)^2} \frac{y' - y}{(x' - x)^2} dx$$

$$d\alpha = \frac{x' - x}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} dy - \frac{y' - y}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} dx \quad (16)$$

Setzt man die oben bei (12) und (13) erklärten Bedeutungen von dy und dx ein, nämlich:

$$dy = \frac{(x' - x)^2 y}{2 r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)}{6 r^2}$$

$$dx = - \frac{(x' - x) y'^2}{2 r^2} + \frac{(x' - x) (y' - y)^2}{6 r^2}$$

so erhält man aus (16):

$$d\alpha = \frac{(x' - x) y}{2 r^2} \cos^2 \alpha + \frac{(x' - x) (y' - y)}{6 r^2} \cos^2 \alpha + \frac{y'^2}{2 r^2} \cos \alpha \sin \alpha$$

$$- \frac{(x' - x) (y' - y)}{6 r^2} \sin^2 \alpha \quad (17)$$

Dieses kann auch so geschrieben werden:

$$d\alpha = \frac{(x' - x) y}{2 r^2} \cos^2 \alpha + \frac{y'^2}{4 r^2} \sin 2\alpha + \frac{(x' - x) (y' - y)}{6 r^2} \cos 2\alpha \quad (18)$$

Nützlicher ist noch eine andere Umformung von (17), welche nicht auf 2α übergeht, sondern im dritten Gliede von (17) den Faktor $\sin^2 \alpha$ erzeugt, nämlich:

$$d\alpha = \frac{x' - x}{6 r^2} \cos^2 \alpha (2y + y') + \frac{x' - x}{6 r^2} \sin^2 \alpha \left(\frac{3 y'^2}{y' - y} - (y' - y) \right)$$

hier ist $\frac{3y'^2}{y'-y} - (y'-y) = 2y + y' + \frac{y^2 + yy' + y'^2}{y' - y}$

und setzt man dieses in das vorhergehende ein, so bekommt man:

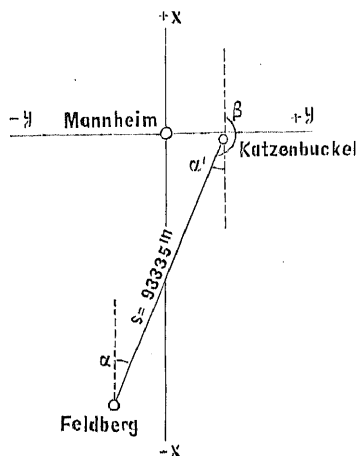
$$d\alpha = \frac{x' - x}{6r^2} (2y + y') + \frac{x' - x}{6r^2 s^2} (y'^3 - y^3) \quad (19)$$

Dieses ist die Verbesserung, welche an dem Näherungswert α_0 von (15) noch anzubringen ist; man kann also im Zusammenhang für den Richtungs Winkel von einem Punkte P (mit x, y) nach P' (mit x', y') schreiben, zugleich mit Zusetzung der nötigen Q :

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{Q}{6r^2} (x' - x) (2y + y') + \frac{Q}{6r^2} \frac{x' - x}{s^2} (y'^3 - y^3) \quad (20)$$

Um alle diese Formeln an einem Zahlen-Beispiele zu veranschaulichen und zu erproben, nehmen wir nach Fig. 1. (mit mittlerer geographischer Breite = 49° , $\log \frac{1}{r^2} = 6.39031$) folgende badische Coordinaten:

Fig. 1.
Maßstab 1 : 5 000 000.



K , Katzenbuckel	$y' = + 42\,176,169^m$	$x' = - 1\,575,546^m$
F , Feldberg	$y = - 34\,075,071$	$x = - 179\,239,479$
	$y' - y = + 76\,251,240$	$x' - x = + 177\,663,933$
Hiezu die Korrekptions-	$- 13,210$	$- 3,881$
glieder nach (3) und (4) }	$+ 9,854$	$+ 4,229$
	$N = + 76247,884$	$M = + 177\,664,281$

damit geben die Formeln (5) und (6):

$$(F, K) = \alpha = 23^\circ 13' 38,920'' \quad \log s = 5.286\,3099\,9 \quad s = 193\,334,779^m \quad (21)$$

Die Umkehrung der Bezeichnungen giebt:

I' , Feldberg	$y' = - 34\,075,071^m$	$x' = - 179\,239,479^m$
K , Katzenbuckel	$y = + 42\,176,169$	$x = - 1\,575,546$
	$y' - y = - 76\,251,240$	$x' - x = - 177\,663,933$
Hiezu die Korrekptions-	$+ 16,350$	$+ 2,534$
glieder nach (3) und (4) }	$- 9,854$	$- 4,229$
	$N = - 76\,244,744$	$M = - 177\,665,628$

damit wieder nach (5) und (6):

$$(K, F) = \beta = 203^\circ 13' 35,275'' \quad \log s = 5.286\,3099\cdot 8 \quad s = 193\,334,778^m \quad (22)$$

Durch (21) und (22) ist also bereits die Entfernung s sicher gestellt.

Um auch die Richtungs-Winkel α und β zu versichern, hat man nach (7) und (7a) die Differenz beider Richtungs-Winkel und zwar bei (7a) abermals doppelt, je nachdem man die Bezeichnungen P und P' entsprechend I' und K , oder umgekehrt, wählt; man bekommt für unser Beispiel:

$$\text{aus (7): } \alpha' - \alpha = - 3,646'' \quad (23)$$

$$\text{aus (7a): } \alpha' - \alpha = + 30,674'' - 34,320'' = - 3,646'' \quad (23a)$$

$$\text{oder " " : } \beta' - \beta = + 37,966'' - 34,320'' = + 3,646'' \quad (23b)$$

Diese 3 Werte stimmen unter sich, und mit der Differenz von (21) und (22), welche $3,645''$ beträgt, hinreichend.

Nun haben wir noch die Formeln (10) und (11), welche zuerst eine Berechnung von s_0 bzw. $\log s_0$ verlangen, d. h. eine Berechnung, welche *ebenen* Coordinaten entspricht; und dabei berechnen wir auch zugleich einen ebenen Wert α_0 :

$$\alpha_0 = 23^\circ 13' 42,356'' \quad \log s_0 = 0.286\,3122\cdot 4 \quad s_0 = 193\,335,782^m \quad (24)$$

Hiezu nach (11) und (10)	$- 22\cdot 6$	$- 1,004$
	$\log s = 5.286\,3099\cdot 8$	$s = 193\,334,778$

$$\quad \quad \quad (25)$$

Dieses stimmt hinreichend mit (21) und (22).

Endlich haben wir noch verschiedene Formeln für $d\alpha$. Die Formel (18) giebt in zweifacher Anwendung:

$\alpha_0 = 23^\circ 13' 42,356''$	$\beta_0 = 203^\circ 13' 42,356''$
$- 12,951$	$- 16,030$
$+ 1,633$	$+ 1,066$
$+ 7,881$	$+ 7,881$
$\alpha = 23^\circ 13' 38,919''$	$\beta = 203^\circ 13' 35,273$

(26)

Endlich giebt die Formel (20) ebenfalls zweifach:

$\alpha_0 = 23^\circ 13' 42,356''$	$\beta_0 = 203^\circ 13' 42,356''$
$- 3,897$	$- 7,543$
$+ 0,460$	$+ 0,460$
$\alpha = 23^\circ 13' 38,919''$	$\beta = 203^\circ 13' 35,273''$

(27)

$$\begin{aligned}
 \log SD = \log a &= 4.061\ 6478\cdot4 & \log MD = \log b &= 4.475\ 7198\cdot1 \\
 (SD) &= 208^\circ\ 35'\ 23,48'' & (MD) &= 30^\circ\ 14'\ 39,09'' \\
 (DS) &= 28^\circ\ 35'\ 23,72'' & (DM) &= 210^\circ\ 14'\ 39,83'' \\
 \gamma &= 178^\circ\ 20'\ 43,89''
 \end{aligned}$$

Nun braucht man die sphärischen Excesse der beiden Dreiecke SDP und MDP , die man mit den vorläufigen Entfernungen und Winkeln findet, nämlich bzw.:

$$\varepsilon_1 = 0,16'' \qquad \varepsilon_2 = 0,41''$$

man hat also:

$$\begin{aligned}
 \alpha + \beta + \gamma &= 326^\circ\ 28'\ 29,46'' \\
 360^\circ + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= 360 \quad 0 \quad 0,57
 \end{aligned}$$

$$\text{folglich: } \varphi + \psi = 33^\circ\ 31'\ 31,11''$$

Nun kommt die Additamentenrechnung:

$$\begin{array}{rcl}
 \log a &= 4.061\ 6478\cdot4 & \log b = 4.475\ 7198\cdot1 \\
 \text{Additamente:} & - 2\cdot3 & - 15\cdot9 \\
 \hline
 \log a' &= 4.061\ 6476\cdot1 & \log b' = 4.475\ 7182\cdot2
 \end{array}$$

Nun zunächst wieder wie bei der ebenen Rechnung:

$$\begin{aligned}
 \text{Hilfswinkel } \mu &= 25^\circ\ 37'\ 22,882'' & \varphi &= 22^\circ\ 48'\ 35,15 & \psi &= 10^\circ\ 42'\ 55,96'' \\
 \log c' &= 4.145\ 1272\cdot6 & \log d' &= 3.746\ 6919\cdot0 & \log e' &= 4.460\ 9151\cdot3 \\
 \text{Additamente:} & + 3\cdot5 & & + 0\cdot5 & & + 14\cdot9 \\
 \hline
 \log c &= 4.145\ 1276\cdot1 & \log d &= 3.746\ 6919\cdot5 & \log e &= 4.460\ 9166\cdot2
 \end{aligned}$$

Die Winkel in den beiden Dreiecken sind:

$$\begin{array}{rcl}
 P = \alpha &= 53^\circ\ 11'\ 18,15'' & P = \beta &= 94^\circ\ 56'\ 27,42'' \\
 S = \varphi &= 22\ 48\ 35,15 & M = \psi &= 10\ 42\ 55,96 \\
 D &= 104\ 0\ 6,86 & D &= 74\ 20\ 37,03 \\
 \hline
 &180^\circ\ 0' 0,16 & &180^\circ\ 0' 0,41''
 \end{array}$$

Die Richtungs-Winkel zur Coordinaten-Berechnung setzt man aus den Richtungs-Winkeln (SD) und (MD) und den Dreiecks-Winkeln zusammen; man findet damit:

$$\begin{aligned}
 (DP) &= 284^\circ\ 35'\ 16,86'' \\
 (SP) &= 231^\circ\ 23'\ 58,63'' & (MP) &= 19^\circ\ 31'\ 43,13''
 \end{aligned}$$

Die Coordinaten-Rechnung für P , nach § 46. ausgeführt, giebt auf allen drei Wegen nahezu auf Millimeter übereinstimmend:

$$\text{Coordinaten von } P: \quad y = + 3508,476^m \qquad x = + 53046,544^m$$

§ 50. Karten-Zeichnung nach rechtwinkligen sphärischen Coordinaten.

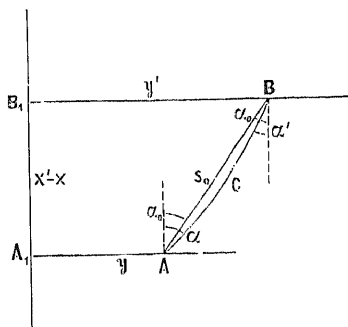
Man benützt die rechtwinkligen *sphärischen* Coordinaten zur Karten-Zeichnung, indem man dieselben wie rechtwinklige *ebene* Coordinaten behandelt.

Dadurch erhält man ein verzerrtes Bild der krummen Erdoberfläche in der Ebene, und es ist unsere Aufgabe, die Verzerrungen, welche hier, wie bei allen anderen ebenen Abbildungen der Erdoberfläche unvermeidlich sind, zu untersuchen.

Hiezu brauchen wir nur die bereits in § 48. entwickelten Formeln anzuwenden.

Wir haben von (10) und (9) § 48. S. 272—273:

Fig. 1.
Soldner'sche Coordinaten in ebener
Darstellung.



$$s = s_0 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{6 r^2} (y^2 + y y' + y'^2) \right) \quad (1)$$

$$s_0 = \sqrt{(y' - y)^2 + x' - x^2} \quad (2)$$

Indem wir in Fig. 1. die Punkte A und B mit ihren Coordinaten x, y und x', y' im ebenen System dargestellt haben, finden wir offenbar die Entfernung s_0 von (2) als *geradlinige* Entfernung A B, und man benützt das Verhältniss dieser geradlinigen Karten-Entfernung s_0 zu der wahren Entfernung s zur Berechnung des Verzerrungs-Verhältnisses, d. h. man setzt:

$$v = \frac{s_0}{s} = 1 + \frac{y^2 + y y' + y'^2}{6 r^2} \cos^2 \alpha \quad (3)$$

Für eine sehr kurze Linie s ist $y' = y$

zu setzen und dann hat man:

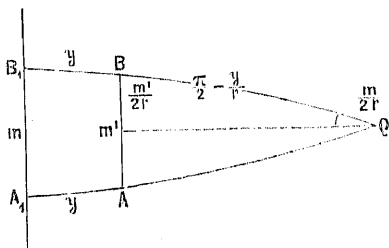
$$v = 1 + \frac{y^2}{2 r^2} \cos^2 \alpha \quad (4)$$

Dieses ist der allgemeine Ausdruck für die Vergrößerung einer kurzen Linie in irgend einem Punkte mit der Ordinate y , in der Richtung α . Die Vergrößerung v ist nicht abhängig von der Abscisse x , sondern nur von der Ordinate y und von der Richtung α . In Bezug auf α erreicht v seine äussersten Werte mit $\alpha = 0^\circ$ oder 180° einerseits und mit $\alpha = 90^\circ$ oder 270° andererseits, nämlich:

$$\alpha = 0^\circ \text{ gibt } v_{\max} = 1 + \frac{y^2}{2 r^2} \quad (\text{Meridian, } x\text{-Axe}) \quad (5)$$

$$\alpha = 90^\circ \quad v_{\min} = 1 \quad (\text{West-Ost, } y\text{-Axe}) \quad (6)$$

Fig. 2.



Diese zwei Ergebnisse sind an und für sich leicht verständlich. In der West-Ost-Richtung werden die Ordinaten sowohl auf der Kugel als auch in der Ebene *gleich* aufgetragen, d. h. es ist $v = 1$; dagegen in der Nord-Richtung müssen die ebenen Masse zu gross erscheinen, weil die in Wirklichkeit konvergierenden Ordinaten y in der ebenen Zeichnung parallel sind.

Hiezu ist Fig. 2. gezeichnet mit dem Masse m in der Abscissen-Axe selbst und einem Masse m' parallel der Abscissen-Axe, im Abstand y . In der Ebene werden aber die Ordinaten y parallel, also m' *gleich* m dargestellt, und das Vergrößerungs-Verhältnis ist daher $= \frac{m}{m'}$, und hiefür findet man aus Fig. 2.:

$$\sin \frac{m}{2r} = \frac{\sin \frac{m'}{2r}}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{r} \right)} = \frac{\sin \frac{m'}{2r}}{\cos \frac{y}{r}}$$

Dieses giebt entwickelt:

$$\frac{m}{2r} = \frac{m'}{2r} \left(1 + \frac{y^2}{2r^2} \right), \quad \frac{m}{m'} = 1 + \frac{y^2}{2r^2} \quad (7)$$

Dieses ist eine Bestätigung von (5).

Zur Übersicht der linearen Verzerrungs-Verhältnisse haben wir nach (5) folgende Zahlen-Werte berechnet:

y	$\frac{y^2}{2r^2}$	$\frac{y^2}{2r^2} 1000^m$	y	$\frac{y^2}{2r^2}$	$\frac{y^2}{2r^2} 1000^m$
10 ^{km}	0,000 0012	0,001 ^m	60 ^{km}	0,000 0442	0,044 ^m
20	0,000 0048	0,005	70	0,000 0602	0,060
30	0,000 0111	0,011	80	0,000 0786	0,079
40	0,000 0196	0,020	90	0,000 0995	0,099
50	0,000 0307	0,031	100	0,000 1228	0,123

Man sieht hieraus, dass man mit $y = 100\,000^m$ eine Verzerrung von rund $0,0001 = 0,01\%$ oder $0,1^m$ auf 1000^m erhält.

Fig. 3.
Rechteckiges Kartenblatt.

Wenn ein rechteckiges Kartenblatt $AB A' B'$ (Fig. 3.) in der beschriebenen Weise behandelt wird, so erscheint zwar der Südrand AA' und der Nordrand BB' in richtiger Grösse, dagegen der Westrand AB und der Ostrand $A'B'$ werden etwas zu gross.

Wir wollen annehmen, der Westrand AB habe die Ordinate $y = 90\,000^m$ und der Ostrand $A'B'$ habe $y' = 100\,000^m$, dann wird nach der Zahlen-Übersicht (8), in der Zeichnung der Westrand um $0,00990\%$ und der Ostrand um $0,123\%$ zu gross, oder wenn $AB = A'B' = 1^m$ Papiergrösse hat, so giebt das hier nur etwa $0,1^{mm}$ Fehler.

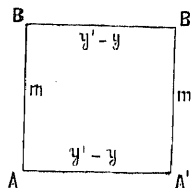
Solche Verzerrungen mögen in der Karten-Zeichnung und auf dem Messtisch unschädlich sein, in der Messung und Berechnung von Polygon-Zügen sind sie es nicht.

Geht ein solcher Zug von 1000^m Länge in der Meridian-Richtung von einem trigonometrischen Punkte zu einem zweiten trigonometrischen Punkt, so wird, wenn gar keine Messungs-Fehler vorkommen, doch der Zug die Entfernung beider Punkte um 10^m kleiner geben als die Coordinaten der Punkte, so lange man nur die ebene Coordinaten-Rechnung anwendet.

Man könnte zwar durch Berücksichtigung der sphärischen Korrekptions-Glieder diesen Widerspruch wieder zum Verschwinden bringen, allein das ist für die Klein-Vermessung zu umständlich. Man beschränkt daher lieber die Ausdehnung der Coordinaten-Systeme, z. B. in Preussen so, dass die Ordinaten y kleiner als $60\,000^m$ werden, womit die Verzerrungen nur noch etwa die Hälfte der soeben betrachteten Verzerrungen für $100\,000^m$ Ordinate betragen.

Wir haben auch noch die Richtungs-Änderungen zu betrachten, wozu die in Fig. 1. eingeschriebenen Winkel α_0 und α die Anleitung geben.

Sind A und B zwei Punkte der rechtwinklig ebenen Coordinaten-Zeichnung, so ist α_0 der Richtungs-Winkel im ebenen System, welcher gegen den sphärischen Richtungs-Winkel α eine Differenz hat, nämlich nach (19) § 48. S. 274:



$$\alpha - \alpha_0 = \frac{x' - x}{6r^2} (2y + y') + \frac{x' - x}{6r^2} \frac{y'^3 - y^3}{s^2} \quad (9)$$

Die Anwendung derselben Formel auf den Punkt *B* giebt:

$$\alpha' - \alpha_0 = \frac{x - x'}{6r^2} (2y' + y) + \frac{x - x'}{6r^2} \frac{y^3 - y'^3}{s^2} \quad (10)$$

Diese beiden Formeln geben subtrahiert:

$$\alpha - \alpha' = \frac{x' - x}{2r^2} (y + y') \quad (11)$$

Dieses ist wieder die Formel für die Ordinaten-Konvergenz nach (11) § 46. S. 265, was auch nach Fig. 1. unmittelbar eingesehen werden kann.

Weitere Ausführungen.

Wenn die Fig. 1. S. 278 nicht bloss eine Abbildung der Punkte *A* und *B* von der Kugel auf die Ebene vorstellen soll, sondern auch eine Abbildung der Linie *AB*, d. h. des auf der Kugel gezogenen Gross-Kreisbogens *AB*, so ist zuerst einzusehen, dass in Fig. 1. die Gerade *AB* = *s*₀ nicht das Abbild jenes Bogens *AB* ist, sondern der Bogen *ACB*.

Allerdings in Hinsicht auf die Länge ist die Gerade *AB* = *s*₀ und der Bogen *ACB* in Fig. 1. bei der von uns überhaupt eingehaltenen Genauigkeit von $\frac{1}{r^2}$, nicht zu unterscheiden, denn die Pfeilhöhe des Bogens *ACB* ist nur von der Ordnung $\frac{s^3}{r^2}$, und daraus kann man schliessen, dass der Krümmungs-Halbmesser der Kurve von der Ordnung $\frac{r^2}{s}$, und endlich dass der Unterschied zwischen dem Bogen *ACB* und der Sehne *AB* nur von der Ordnung $\frac{s^5}{r^4}$ ist, was in allen unseren bisherigen Entwicklungen vernachlässigt wurde.

Dagegen in Hinsicht auf die Richtungen in *A* und *B* ist allerdings der Bogen *ACB* und die Sehne *AB* in Fig. 1. durchaus nicht zu verwechseln, wie aus den eingeschriebenen Winkeln α , α' und α_0 zu ersen ist.

Wir haben bisher stillschweigend angenommen, dass der Bogen *ACB* mit den von der +*x*-Richtung in der Ebene gezählten Richtungs-Winkeln α und α' das richtige Abbild des entsprechenden Gross-Kreisbogens auf der Kugel sei, und man kann dieses wohl geradezu einsehen, wenn man bedenkt, dass für unendlich kleine Abscissen-Unterschiede die Differenzen $\alpha' - \alpha$ verschwinden; indessen gehört doch noch manche Neben-Überlegung hinzu, und wir wollen deswegen die Kurve *ACB* nun schärfer mathematisch untersuchen:

Die Gleichung der Kurve *ACB* in rechtwinkligen ebenen Coordinaten erhält man aus den Soldnerschen Grund-Gleichungen (14) und (15) § 46. S. 265, nämlich:

$$y' - y = s \sin \alpha - \frac{m^2 y}{2r^2} - \frac{m^2 n}{6r^2} \quad (12)$$

$$x' - x = s \cos \alpha + \frac{m y'^2}{2r^2} - \frac{m n^2}{6r^2} \quad (13)$$

wobei in den Korrektions-Gliedern gesetzt werden darf:

$$m = s \cos \alpha \quad \text{oder} \quad m = x' - x \quad (14)$$

$$n = s \sin \alpha \quad \text{oder} \quad n = y' - y \quad \text{oder} \quad n = m \tan \alpha \quad (15)$$

Indem wir nun die Ausgangs-Werte x , y , nebst s und α als konstant betrachten, schreiben wir (12) und (13) in diese Form:

$$\begin{aligned} y' - y &= s \sin \alpha \left(1 - \frac{m}{\tan \alpha} \frac{y}{2r^2} - \frac{m^2}{6r^2} \right) \\ x' - x &= s \cos \alpha \left(1 + \frac{y^2}{2r^2} + \frac{y m \tan \alpha}{r^2} + \frac{m^2 \tan^2 \alpha}{3r^2} \right) \end{aligned}$$

Die Division dieser beiden Gleichungen giebt:

$$y' - y = (x' - x) \tan \alpha \left(1 - \frac{m y}{\tan \alpha} \frac{1}{2r^2} - \frac{m^2}{6r^2} - \frac{y^2}{2r^2} - \frac{y m \tan \alpha}{r^2} - \frac{m^2 \tan^2 \alpha}{3r^2} \right) \quad (16)$$

Hiebei ist α der Richtungs-Winkel der Kurven-Tangente in A (Fig. 1.) von der $+x$ -Axe gegen die $+y$ -Axe gezählt, und durch den Quotienten $(y' - y) : (x' - x)$ wird der Richtungs-Winkel α_0 der Sehne AB in demselben Sinne bestimmt; es wird daher durch die Korrektions-Glieder von (16) die kleine Winkel-Differenz $\alpha - \alpha_0$ bestimmt, in diesem Sinne:

$$d \tan \alpha = \frac{d \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\alpha_0 - \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan \alpha \left(-\frac{m y}{\tan \alpha} \frac{1}{2r^2} - \frac{m^2}{6r^2} \dots \right) \quad (17)$$

Die hier durch ... angedeutete Fortsetzung bezieht sich auf die übrigen Glieder von (16), und wenn man diese in (17) einsetzt und etwas umformt, so kommt man auf:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{m}{6r^2} (2y + y') + \frac{\cos^2 \alpha}{6r^2} \tan \alpha (y^2 + y y' + y'^2) \quad (18)$$

Dieses giebt sich als übereinstimmend mit (10) zu erkennen, und damit ist bewiesen, dass die Kurve ACB in Fig. 1. S. 278 mit den dort eingeschriebenen Richtungs-Winkeln α , α' und α_0 das ebene Abbild des entsprechenden sphärischen Bogens AB ist.

§ 51. Rechtwinklige sphärische konforme Coordinaten (nach Gauss).

Die Betrachtungen des vorigen § 50. über die Verzerrungen, welche bei dem Auftragen rechtwinkliger *sphärischer* Coordinaten in Form rechtwinkliger *ebener* Coordinaten entstehen, gaben Veranlassung zur Gewinnung eines zweiten ähnlichen Coordinaten-Systems, welches Gauss bei der Hannoverischen Landes-Vermessung erfand und anwandte, und das auch neuerdings bei der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landes-Aufnahme in ausgedehnter Weise angewendet wird.

Wir wollen von der fraglichen Theorie hier nur die Entwicklungen bis zur Ordnung $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich behandeln, indem wir von den früheren Formeln für die *Soldnerschen* Coordinaten ausgehen.

Wir haben gefunden, dass bei den rechtwinkligen *Soldnerschen* Coordinaten das Vergrößerungs-Verhältnis in der Ebene nach den verschiedenen Richtungen, welche von einem Punkt ausgehen, selbst verschieden ist, es fand sich nämlich in (5) und (6) § 50. S. 278:

$$v_x = 1 + \frac{y^2}{2r^2} \text{ in der Richtung der } x\text{-Axe} \quad (1)$$

$$v_y = 1 \text{ in der Richtung der } y\text{-Axe (nach Soldner).}$$

Diese Vergrößerungs-Verhältnisse beziehen sich auf eine Zeichnung, in welcher die rechtwinkligen sphärischen Koordinaten als rechtwinklige *ebene* Koordinaten, im übrigen aber unverändert aufgetragen werden.

Wir werden nun eine Projektion betrachten, bei welcher die Koordinaten x, y ebenfalls rechtwinklig eben aufgetragen werden, und zwar die Abscissen x wie vorhin in richtiger Grösse, dagegen sollen nun die Ordinaten y ebenfalls Verzerrungen erleiden, und zwar in derselben Masse, wie die Abscissen x , d. h.:

$$v_x = v_y = 1 + \frac{y^2}{2r^2} \quad (2)$$

Nach Fig. 1. wollen wir die Ordinaten in der neuen Projektion mit η bezeichnen, so dass statt einer Kugel-Ordinate y eine gewisse ebene Ordinate η aufgetragen wird; die bei (2) ausgesprochene Bedingung ist daher:

$$\frac{d\eta}{dy} = 1 + \frac{y^2}{2r^2} \quad (3)$$

Durch Integration findet man hieraus:

$$\eta = y + \frac{y^3}{6r^2} = y \left(1 + \frac{y^2}{6r^2} \right) \quad (4)$$

Dieser Gleichung entsprechend haben wir eine Hilfstafel für die Differenzen $\eta - y$ berechnet, wie auf Seite [33] unseres Anhangs mitgeteilt ist.

Man kann mit dieser Hilfstafel leicht beliebig von y auf η oder umgekehrt übergehen. Z. B. in der Gegend von Hannover, wo die alten *Gauss'schen* konformen Koordinaten x, y mit dem Nullpunkte Göttingen immer noch zu manchen Zwecken gebraucht werden, haben wir wiederholt Umwandlungen nach dieser Tafel [33] des Anhangs gemacht.

Statt der Gleichung (4) kann man auch, mit Genauigkeit von $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich, die andere Form schreiben:

$$y = \eta \left(1 - \frac{\eta^2}{6r^2} \right) \quad (5)$$

Wir können nun leicht alle unsere früheren für *Soldnersche* Koordinaten entwickelten Formeln in Formeln für konforme *Gauss'sche* Koordinaten umwandeln, wenn wir nur überall y durch η vermöge der Gleichung (5) ersetzen.

Nach (9) und (10) § 48. S. 272—273 haben wir:

$$s^2 = \left((y' - y)^2 + (x' - x)^2 \right) \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha (y'^3 - y^3)}{3r^2 (y' - y)} \right) \quad (6)$$

Hierin ist nach (5):

$$y' - y = \eta' - \eta - \frac{\eta'^3 - \eta^3}{6r^2} \quad (7)$$

$$(y' - y)^2 = (\eta' - \eta)^2 - \frac{(\eta' - \eta)(\eta'^3 - \eta^3)}{3r^2} \quad (8)$$

Da Glieder mit r^4 im Nenner durchaus vernachlässigt werden, so kann man in dem Korrektions-Glied von (6) schlechthin y und η vertauschen, und damit giebt nun (6):

$$s^2 = (x' - x)^2 + (\eta' - \eta)^2 - \frac{(\eta'^3 - \eta^3)(\eta' - \eta)^2}{3r^2(\eta' - \eta)} - \frac{(\eta'^3 - \eta^3)}{\eta' - \eta} \frac{s^2 \cos^2 \alpha}{3r^2}$$

$$s^2 = (x' - x)^2 + (\eta' - \eta)^2 - \frac{\eta'^3 - \eta^3}{\eta' - \eta} \frac{s^2}{3r^2} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$s^2 = s_0^2 \left(1 - \frac{\eta'^2 + \eta\eta' + \eta^2}{3r^2} \right)$$

$$\text{oder } s = s_0 \left(1 - \frac{\eta'^2 + \eta\eta' + \eta^2}{6r^2} \right) \quad (9)$$

Dabei soll s_0 die Entfernung bezeichnen, welche man erhält durch Auftragen der Coordinaten x , η und x' , η' in der Ebene nach Fig. 1.

Damit hat man auch das Vergrößerungsverhältnis:

$$v = \frac{s_0}{s} = 1 + \frac{\eta^2 + \eta\eta' + \eta'^2}{6r^2} \quad (9a)$$

Für numerische Rechnung ist es im Falle des Vorkommens grosser Ordinaten η oder η' nützlich, in (9) die Glieder, welche η oder η' selbst enthalten, von denjenigen Gliedern zu trennen, in welchen nur die Differenz $\eta' - \eta$ vorkommt. Zu diesem Zweck kann man schreiben:

$$4(\eta'^2 + \eta\eta' + \eta^2) = 3(\eta' + \eta)^2 + (\eta' - \eta)^2$$

und wenn man zugleich (9) auf logarithmische Form bringt, so hat man hiefür:

$$\log s = \log s_0 - \frac{\mu}{8r^2} (y' + y)^2 - \frac{\mu}{24r^2} (\eta' - \eta)^2 \quad (10)$$

Wenn η' und η nahezu gleich sind, so hat man aus (9a) oder (10):

$$v = \frac{s_0}{s} = 1 + \frac{\eta^2}{2r^2}, \quad \log v = \log \frac{s_0}{s} = \frac{\mu \eta^2}{2r^2} \quad (10a)$$

Hiernach haben wir für genäherte Berechnungen und zur Übersicht eine Hilfstafel auf Seite [33] des Anhangs berechnet.

Übergehend zu den Formeln für Richtungs-Winkel haben wir für *Soldnersche* Coordinaten nach (19) § 48. S. 274:

$$\alpha = \arctan \frac{y' - y}{x' - x} + \frac{(x' - x)}{6r^2} (2y + y') + \frac{(x' - x)y'^3 - y^3}{6r^2 s^2} \quad (11)$$

Setzt man hier $y' - y$ nach (7) ein, so giebt dieses an dem Hauptgliede von (11) eine Änderung, welche zunächst die Form hat:

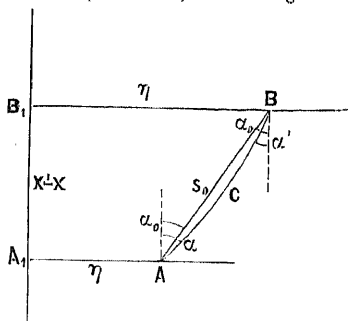
$$d \arctan \left(\frac{y' - y}{x' - x} \right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y' - y}{x' - x} \right)^2} \frac{d(y' - y)}{x' - x} \quad (12)$$

Das Differential $d(y' - y)$ ist aber als zweites Glied von (7) zu setzen, d. h.:

$$d(y' - y) = -\frac{\eta'^3 - \eta^3}{6r^2} \quad (13)$$

Dieses in (12) gesetzt, giebt nach kurzer Umformung gerade den negativen

Fig. 1.
Gauss'sche Coordinaten in ebener (konformer) Darstellung.



Wert des letzten Gliedes von (11), d. h. wenn man die Formel (11) auf Gauss'sche Coordinaten umformt, so fällt das letzte Glied fort, und man erhält:

$$\alpha = \arctan \frac{\eta' - \eta}{x' - x} + \frac{(x' - x)}{6r^2} (2\eta + \eta') \quad (14)$$

oder

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{x' - x}{6r^2} (2\eta + \eta') \quad (15)$$

wobei α_0 den Richtungs-Winkel für ebene Coordinaten x und η bedeutet.

Man kann die Formel (15) auch in dem Sinne umformen, wie bei der Entfernungs-Formel (9) geschehen ist; man schreibt hiezu

$$2(2\eta + \eta') = 3(\eta + \eta') - (\eta' - \eta) \text{ und damit wird (15):}$$

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{x' - x}{4r^2} (\eta + \eta') - \frac{x' - x}{12r^2} (\eta' - \eta) \quad (16)$$

Wenn man diese Formel (16) auch auf die Gegenrichtung anwendet, so bekommt man:

$$\alpha' = \alpha_0 + \frac{x - x'}{4r^2} (\eta' + \eta) - \frac{x - x'}{12r^2} (\eta - \eta') \quad (17)$$

folglich durch Subtraktion von (16) und (17):

$$\alpha - \alpha' = \frac{x' - x}{2r^2} (\eta + \eta') \quad (18)$$

Dieses stimmt mit der entsprechenden Formel für Soldnersche Coordinaten (11) § 50. S. 280, was auch unmittelbar einzusehen ist, denn dieses $\alpha - \alpha'$ ist die gesamte Ordinaten-Konvergenz, welche durch die Verzerrung der η nicht beeinflusst wird.

Wir wollen auch noch unsere ersten Soldnerschen Formeln von § 46. auf η umformen, zunächst nach (14) oder (18) § 46. S. 266:

$$y' - y = s \sin \alpha - \frac{2y + y'}{3} \frac{(x' - x)^2}{2r^2}$$

Wenn man hiezu (7) berücksichtigt, und in den Gliedern zweiter Ordnung überall η statt y schreibt, so hat man:

$$\eta' - \eta = s \sin \alpha - \frac{2\eta + \eta'}{6r^2} (x' - x)^2 + \frac{\eta'^3 - \eta^3}{6r^2} \quad (19)$$

Andererseits ist aber aus Fig. 1. zu entnehmen:

$$\eta' - \eta = s_0 \sin \alpha_0 \quad (20)$$

Es muss möglich sein, die Formen (19) und (20), deren Gleichwertigkeit wir geometrisch eingesehen haben, auch analytisch in einander überzuführen. Dieses ist auch der Fall, wenn man die Bedeutungen von s_0 und α_0 nach (9) und (15) berücksichtigt, nämlich:

$$s_0 = s \left(1 + \frac{\eta'^3 - \eta^3}{6r^2} \right) \quad \text{und} \quad \alpha_0 = \alpha - \frac{x' - x}{6r^2} (2\eta + \eta') \quad (21)$$

Setzt man dieses in (20) ein, so kommt man nach wenigen Umformungen auf (19).

Ähnlich verhält es sich auch mit der Formel für $x' - x$; dieselbe heisst zunächst nach Soldner (15) § 46. S. 265:

$$x' - x = s \cos \alpha + \frac{m y'^2}{2r^2} - \frac{m \eta^2}{6r^2} \quad (22)$$

Eine Umwandlung auf η ist gar nicht nötig, weil die η und η' nur in den Korrektions-Gliedern vorkommen, in welchen y und η als gleich gelten; man kann daher (21) auch so schreiben:

$$x' - x = s \cos \alpha + \frac{m \eta'^2}{2 r^2} - \frac{m(\eta' - \eta)^2}{6 r^2} \quad (23)$$

Dieses muss auf die Form gebracht werden können:

$$x' - x = s_0 \cos \alpha_0 \quad (24)$$

Dieses ist in der That der Fall; man braucht nur die Bedeutungen von s_0 und α_0 von (21) in (24) zu setzen, worauf nach einiger Umformung (23) entstehen wird.

Weitere Ausführungen.

Wir wollen in gleicher Weise wie bei den *Soldner*schen Coordinaten bei (12) bis (18) § 50. S. 281, die Gleichung der ebenen Kurve ACB Fig. 1. S. 283 in ebenen Coordinaten darstellen, und haben dazu nach (19) und (23):

$$\begin{aligned} \eta' - \eta &= s \sin \alpha \left(1 - \frac{3 \eta m^2}{6 r^2} - \frac{m^2}{6 r^2} + \frac{\eta^2 + \eta \eta' + \eta'^2}{6 r^2} \right) \\ x' - x &= s \cos \alpha \left(1 + \frac{\eta'^2}{2 r^2} - \frac{n^2}{6 r^2} \right) \end{aligned}$$

Durch Division findet man:

$$\eta' - \eta = (x' - x) \tan \alpha \left(1 - \frac{3 \eta m}{6 r^2} \frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan \alpha} - \frac{m^2}{6 r^2} (1 + \tan^2 \alpha) \right) \quad (25)$$

In übrigen nach demselben Gedankengang verfahrend, wie bei (16) und (17) des vorigen § 50. S. 281 erhält man:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{m}{6 r^2} (2 \eta + \eta')$$

Dieses ist übereinstimmend mit (15), und damit ist gezeigt, dass die in Fig. 1. gezeichnete ebene Kurve ACB , deren Gleichung (25) ist, in Hinsicht auf die Richtungs-Winkel α und α' das richtige Abbild des entsprechenden sphärischen Bogens ist.

§ 52. Die Konformität des *Gauss*schen Coordinaten-Systems.

Das im vorigen § 51. behandelte System der rechtwinkligen Coordinaten x, y hat die Eigenschaft, dass es von einem Teil der Kugeloberfläche eine ebene Darstellung bietet, welche dem Urbilde in den kleinsten Teilen *ähnlich* ist.

Diese Eigenschaft, welcher *Gauss* die Benennung „*konforme*“ Abbildung gegeben hat, wollen wir durch Vergleichung der Verzerrungsformeln für das *Soldner*sche und für das *Gauss*sche System näher untersuchen. Wir haben nämlich nach (3) § 50. S. 278 und nach (9a) § 51. S. 283:

$$(\text{Soldner}) \quad v = \frac{s_0}{s} = 1 + \frac{y^2 + y y' + y'^2}{6 r^2} \cos^2 \alpha \quad (1)$$

$$(\text{Gauss}) \quad v' = \frac{s_0}{s} = 1 + \frac{\eta^2 + \eta \eta' + \eta'^2}{6 r^2} \quad (2)$$

Nimmt man nur sehr kleine Linien s in Betracht, so hat man, indem man $y' = y$ oder $\eta' = \eta$ setzt:

$$(\text{Soldner}) \quad v = 1 + \frac{\gamma^2}{2\gamma^2} \cos^2 \alpha \quad (3)$$

$$(\text{Gauss}) \quad v' = 1 + \frac{\eta^2}{2\gamma^2} \quad (4)$$

Hier besteht der wesentliche Unterschied, dass v nach verschiedenen Richtungen α verschieden, dagegen v' nach allen Richtungen α gleich ist.

Nimmt man noch die Richtungs-Änderungen $\alpha - \alpha_0$ nach (10) § 50. S. 280 und (15) § 51. S. 284 hinzu, so sieht man, dass diese für unendlich kleine Entfernungen s bzw. m oder n in beiden Fällen verschwinden; und damit ist folgende Betrachtung vorbereitet:

Man denke sich von irgend einem Punkte mit sphärischen Koordinaten x, η das ebene Abbild durch die konformen Koordinaten x, η hergestellt, und von diesem Punkte zwei kurze Linien gezogen, welche auf der Kugel die Längen ds_1 und ds_2 , und dann vermöge (4) in der Ebene die Längen $v'ds_1$ und $v'ds_2$ haben. Der Winkel zwischen den zwei Elementen ds_1 und ds_2 geht, weil diese als unendlich klein gelten, in richtiger Grösse auf das Abbild über; also ist das unendlich kleine Dreieck mit den Seiten $v'ds_1$ und $v'ds_2$ dem unendlich kleinen Dreieck mit den Seiten ds_1 und ds_2 ähnlich.

Man kann das konform *Gauss*sche System x, η mit dem nicht konformen *Soldner*schen System x, y in mehrfacher Beziehung vergleichen:

Die Konformität hat in kartographischer Beziehung den Vorteil, dass man an irgend einem Punkte nach verschiedenen Richtungen immer nur *einen* Massstab anzuwenden hat, dieser Vorzug ist aber bei so kleinen Verzerrungen, die das Auge in der Karte überhaupt kaum wahrnehmen kann, nicht sehr wichtig, denn der Hauptvorteil solcher Koordinaten-Systeme besteht darin, dass innerhalb eines gewissen mässigen Bereiches (z. B. mit y oder η unter 60 000") die Verzerrungen überhaupt *vernachlässigt* werden; und dann ist es gleichgültig, ob die vernachlässigten Korrektions-Glieder die eine oder andere Form oder Bedeutung haben

Man kann deswegen die Vergleichung beider Systeme mit der Frage führen, welches die Gesamt-Verzerrungen innerhalb eines gewissen Gebietes ist, innerhalb dessen man beabsichtigt, alle aus den rechtwinkligen Koordinaten abgeleiteten Grössen *ohne weiteren Korrekturen* zu benützen, wie es in der Kleinvermessung und schon in der Triangulierung vierter und dritter Ordnung geschieht.

Hier erzeugen die vernachlässigten Korrekturen denselben Schaden wie kleine Messungsfehler, und es ist darnach zu trachten, die vernachlässigten Grössen in ihrer Gesamtwirkung möglichst *klein* zu machen, ohne Einführung von Verzerrungen an solchen Stellen, wo sie nicht unumgänglich nötig sind.

In Hinsicht auf den Gesamtbetrag aller Verzerrungen ist also das konforme *Gauss*sche System mit den willkürlich zum Zweck der Konformitäts-Erzeugung hineingelegten Ordinaten-Verzerrungen jedenfalls ungünstiger als das in den Ordinaten unverzerrte *Soldner*sche System.

Die Überlegenheit des konformen Systems für die geodätischen Berechnungen liegt aber in den viel *bequemeren und eleganteren Formeln* mit η , nach welchen sich auch viel leichter Hilfstafeln berechnen lassen, als nach den Formeln mit y , wie aus den Hauptformeln für v und v' , die wir oben unter (1) bis (4) zusammengestellt haben,

sowie aus den Formeln für $\alpha - \alpha_0$ (nach (10) § 50. S. 286 und (15) § 51. S. 284) sich sofort ergibt.

Dieser Vorteil des eleganteren Formelbaus tritt aber zurück und verschwindet nach Umständen völlig, wenn man nicht mehr bei den ersten Näherungen von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ stehen bleibt, wie wir bei allen unseren Entwicklungen von § 51. haben. Wenn man, für Ordinaten y bis 100 000^m und darüber, die Entwicklung weiter führen will, so hat man erstens höhere Potenzen $\frac{1}{r^4}$ und zweitens sphäroidische Glieder mit e'^2 zu berücksichtigen, welche wohl ebenso mühsam zu berechnen sind, als die höheren Glieder der Formeln mit unverzerrten Ordinaten y .

Andererseits ist von Wichtigkeit, dass der *Soldner'sche* Grundsatz des unverzerrten Auftragens von x und y in der Ebene, in seiner theoretischen Weiterführung mit der geodätischen Linie, nur solcher Entwicklungen bedarf, welche man zu vielen anderen geodätischen Zwecken *ohnehin* braucht.

Die konformen rechtwinkligen Coordinaten hat *Gauss* für die Hannover'sche Landesvermessung erfunden. In dem Hannover'schen Coordinaten-Verzeichniss, welches in „*Carl Friedrich Gauss' Werken*, IV. Band, Göttingen 1873“ S. 415–445 veröffentlicht ist, findet sich auf S. 445 eine aus alter Zeit von *Gauss* selbst gemachte Bemerkung mit abgedruckt:

„Es ist dabei schon die Krümmung der Erdoberfläche dergestalt berücksichtigt, dass bei Auftragung dieser Coordinaten auf eine ebene Fläche das Bild ein *konformes*, d. i. in den kleinsten Theilen ähnliches wird. Das Nähere darüber enthalten meine geodätischen Abhandlungen schon jetzt, und spätere Abhandlungen werden dies noch ausführlicher entwickeln.“

Das letztere ist nun nicht mehr geschehen. Zwar die Theorie der konformen Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel ist in *Gauss' Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie* schon 1843–1846 veröffentlicht, aber die Theorie der konformen Abbildung des Ellipsoids auf die Ebene war in Hannover selbst, wo auf Grundlage derselben fortwährend topographische Aufnahmen stattgefunden hatten, so gut wie verloren gegangen, und man arbeitete nur unter dem Einflusse einer Art von Tradition nach überlieferten Schablonen (*Wittstein*, Vorrede zu *Schreiber* 1866). Diesem unsicheren Zustande wurde ein Ende gemacht durch das von dem jetzigen General (damals Hauptmann) *Schreiber* im Jahre 1866 veröffentlichte Werk: „Theorie der Projektionsmethode der Hannover'schen Landesvermessung, von *Oskar Schreiber*, Hauptmann im Königl. Hannov. I. Jäger-Bataillon, Hannover, *Hahn'sche* Buchhandlung 1866“.

Bald darauf erschien auch „Allgemeines Coordinaten-Verzeichniss als Ergebnis der Hannover'schen Landesvermessung aus den Jahren 1821–1844, Hannover 1868“ mit einer Einleitung von *Wittstein*, enthaltend die wichtigsten Coordinaten-Formeln mit Gliedern von der Ordnung $\frac{1}{r^3}$ einschliesslich.

Hierauf gründen sich einige von uns in der „*Zeitschr. f. Verm.* 1874“ S. 246–262 und 1875, S. 27–32 gemachte Bemerkungen, namentlich (1875 S. 32) dass die *Gauss'sche* konforme Projektion im wesentlichen dasselbe ist, wie die bekannte *Merckator-Projektion* in der Nähe des berührenden Bogens (Äquators). Hieran schliesst sich auch an die Entwicklung der „Näherungs-Formeln für die *Gauss'sche* Projektion der Hannover'schen Landesvermessung“, von *Helmert*, „*Zeitschr. für Verm.* 1876“ S. 238–253.

Einige weitere Mittheilungen verdanken wir noch Herrn General *Schreiber*, welcher dieselben veröffentlichte Hess in *Jordan-Steppes*, „*Deutsches Vermessungswesen*, Stuttgart 1882“, I. S. 153–164. An dieser Stelle ist auch mitgeteilt, in welcher Weise die trigonometrische Abtheilung der preussischen Landesaufnahme heute von dem Grundsatz der konformen Flächen-Abbildung Gebrauch macht, noch in anderem Sinne als von dem bisher von uns betrachteten, worauf wir später zurückkommen werden.

$$\cos(90^\circ - \varphi_2) = \cos(90^\circ - \varphi_1) \cos \frac{y}{r}$$

oder:
$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \left(1 - \frac{y^2}{2r^2}\right)$$

$$\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 = \frac{y^2}{2r^2} \sin \varphi_1$$

Nun ist aber in erster Näherung $\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 = (\varphi_1 - \varphi_2) \cos \varphi_1$

also:
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{y^2}{2r^2} \tan \varphi_1 \quad (2)$$

Zweitens giebt das rechtwinklige Dreieck Fig. 2. zur Bestimmung von λ :

$$\tan \lambda = \frac{\tan \frac{y}{r}}{\sin(90^\circ - \varphi_1)} = \frac{\tan \frac{y}{r}}{\cos \varphi_1}$$

$$\lambda + \frac{\lambda^3}{3} = \frac{1}{\cos \varphi_1} \left(\frac{y}{r} + \frac{y^3}{3r^3} \right)$$

in erster Näherung:

$$\lambda = \frac{y}{r \cos \varphi_1} + \dots, \quad \lambda^3 = \frac{y^3}{r^3 \cos^3 \varphi_1}$$

Also:

$$\begin{aligned} \lambda + \frac{y^3}{3r^3 \cos^3 \varphi_1} &= \frac{y}{r \cos \varphi_1} + \frac{y^3}{3r^3 \cos \varphi_1} \\ \lambda &= \frac{y}{r \cos \varphi_1} - \frac{y^3}{3r^3 \cos \varphi_1} \tan^2 \varphi_1 \end{aligned} \quad (3)$$

Drittens giebt das rechtwinklige Dreieck zur Bestimmung von γ :

$$\tan(90^\circ - \gamma) = \frac{\tan(90^\circ - \varphi_1)}{\sin \frac{y}{r}} \quad \text{oder} \quad \tan \gamma = \sin \frac{y}{r} \tan \varphi_1$$

$$\gamma + \frac{\gamma^3}{3} = \left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3} \right) \tan \varphi_1$$

$$\gamma = \frac{y}{r} \tan \varphi_1 + \dots \quad \gamma^3 = \frac{y^3}{r^3} \tan^3 \varphi_1$$

$$\gamma + \frac{y^3}{3r^3} \tan^3 \varphi_1 = \frac{y}{r} \tan \varphi_1 - \frac{y^3}{6r^3} \tan \varphi_1$$

$$\gamma = \frac{y}{r} \tan \varphi_1 - \frac{y^3}{6r^3} \tan \varphi_1 (1 + 2 \tan^2 \varphi_1) \quad (4)$$

Durch diese Gleichungen (1) — (4) ist unsere Aufgabe gelöst, wir wollen aber noch zwei neue Gleichungen bilden, welche (3), (4) entsprechen, aber überall statt der Fusspunkts-Breite φ_1 die Breite φ_2 enthalten sollen. Zur Bestimmung von λ nimmt man dann:

$$\begin{aligned} \sin \lambda &= \frac{\sin \frac{y}{r}}{\sin(90^\circ - \varphi_2)} = \frac{\sin \frac{y}{r}}{\cos \varphi_2} \\ \lambda - \frac{\lambda^3}{6} &= \frac{1}{\cos \varphi_2} \left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3} \right) \end{aligned}$$

$$\lambda - \frac{1}{6} \left(\frac{y}{r \cos \varphi_2} \right)^3 = \frac{y}{r \cos \varphi_2} - \frac{y^3}{6 r^3 \cos \varphi_2}$$

$$\lambda = \frac{y}{r \cos \varphi_2} + \frac{y^3}{6 r^3 \cos \varphi_2} \quad (5)$$

Ferner zur zweiten Formel für γ :

$$\cos(90^\circ - \gamma) = \frac{\tan \frac{y}{r}}{\tan(90^\circ - \varphi_2)} \quad , \quad \sin \gamma = \tan \frac{y}{r} \tan \varphi_2$$

$$\gamma - \frac{\gamma^3}{6} = \left(\frac{y}{r} + \frac{y^3}{3 r^3} \right) \tan \varphi_2$$

$$\gamma - \frac{1}{6} \left(\frac{y}{r} \tan \varphi_2 \right)^3 = \frac{y}{r} \tan \varphi_2 + \frac{y^3}{3 r^3} \tan \varphi_2$$

$$\gamma = \frac{y}{r} \tan \varphi_2 + \frac{y^3}{6 r^3} \tan \varphi_2 (2 + \tan^2 \varphi_2) \quad (6)$$

Endlich kann man auch noch für λ statt der beiden zweigliederigen Formeln (3) und (5) eine eingliedrige Formel bilden, nämlich:

$$\lambda = \frac{y}{r} \sec \frac{\varphi_1 + 2 \varphi_2}{3} \quad (7)$$

Man kann diese bequeme Formel (7) leicht rückwärts begründen, indem man setzt:

$$\frac{\varphi_1 + 2 \varphi_2}{3} = \varphi_1 - \frac{2}{3} (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\cos \frac{\varphi_1 + 2 \varphi_2}{3} = \cos \varphi_1 + \frac{2}{3} (\varphi_1 - \varphi_2) \sin \varphi_1 = \cos \varphi_1 \left(1 + \frac{2}{3} (\varphi_1 - \varphi_2) \tan \varphi_1 \right)$$

$$\sec \frac{\varphi_1 + 2 \varphi_2}{3} = \frac{1}{\cos \varphi_1} \left(1 - \frac{2}{3} (\varphi_1 - \varphi_2) \tan \varphi_1 \right)$$

Wegen (2) giebt dieses:

$$\sec \frac{\varphi_1 + 2 \varphi_2}{3} = \frac{1}{\cos \varphi_1} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y^2}{r^2} \tan^2 \varphi_1 \right)$$

Dieses in (7) gesetzt, führt zurück auf (3), womit (7) bewiesen ist.

Man kann eine Umformung ähnlicher Art auch für die Meridian-Konvergenz machen, denn (4) oder (6) lässt sich auf diese Form bringen:

$$\gamma = \frac{y}{r} \sin \frac{2 \varphi_1 + \varphi_2}{3} \sec \frac{\varphi_1 + 2 \varphi_2}{3} \quad (8)$$

Übergang zu konformen Coordinaten x, η .

Man kann von den vorstehenden Formeln, welche φ, λ, γ in gewöhnlichen (Soldnerschen) rechtwinkligen Coordinaten x, y ausdrücken, auch leicht übergehen zu solchen Formeln, welche φ, λ, γ in konformen (Gauss'schen) Coordinaten x, η ausdrücken, denn man braucht nur überall y durch η zu ersetzen, nämlich nach (5) § 51. S. 282 zu setzen:

$$y = \eta \left(1 - \frac{\eta^2}{6 r^2} \right) \quad (9)$$

Dieses giebt innerhalb der Glieder dritter Ordnung in (2) S. 289 keine Änderung, wir können also geradezu schreiben:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\eta^2}{2r^2} \tan \varphi_1 \quad (10)$$

Ferner die Gleichung (3) S. 289 giebt mit der Einsetzung (9):

$$\lambda = \frac{1}{r \cos \varphi_1} \left(\eta - \frac{\eta^3}{6r^2} \right) - \frac{\eta^3}{3r^2} \frac{\tan^2 \varphi_1}{\cos \varphi_1}$$

und dieses giebt nach kurzer Umformung:

$$\lambda = \frac{\eta}{r \cos \varphi_1} - \frac{\eta^3}{6r^3 \cos^3 \varphi_1} (2 - \cos^2 \varphi_1) \quad (11)$$

Auch bei den übrigen derartigen Umformungen besteht gar keine Schwierigkeit, weshalb wir für dieselben sofort die Ergebnisse hersetzen:

$$\lambda = \frac{\eta}{r \cos \varphi_2} - \frac{\eta^3}{6r^3 \cos^3 \varphi_2} (1 - \tan^2 \varphi_2) \quad (12)$$

$$\gamma = \frac{\eta}{r} \tan \varphi_1 - \frac{\eta^3}{3r^3} \frac{\sin \varphi_1}{\cos^3 \varphi_1} \quad (13)$$

$$\text{oder} \quad \gamma = \frac{\eta}{r} \tan \varphi_2 + \frac{\eta^3}{6r^3} \frac{\sin \varphi_2}{\cos^3 \varphi_2} \quad (14)$$

Die Formeln (10), (11) und (13) stimmen mit den entsprechenden Formeln von § 4. und § 5. der Einleitung von *Wittstein* zu dem *Hannoverschen* Coordinaten-Verzeichniss, wenn man dort y^4 und δ vernachlässigt. (Das von *Gauss* und *Wittstein* gebrauchte δ entspricht unserem $e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2}$).

Bemerkung über die geographischen Längen und Breiten.

Die geographischen Längenunterschiede λ werden theils in *Bogenmass* theils in *Zeitmass* angegeben, zu deren gegenseitiger Verwandlung unsere Hilfstafel auf Seite [31] des Anhangs benützt werden kann.

Als Beispiel wollen wir im System der Preussischen Landesaufnahme nehmen:

	in Bogen	in Zeit
Berlin, Rauenberg $\lambda_0 = 31^\circ 2' 4,9280''$	$= 2^h 4^m 8,328533^s$	
Celle $\lambda = 27^\circ 44' 54,8477''$	$= 1^h 50^m 59,656514^s$	
Differenz $\lambda_0 - \lambda = 3^\circ 17' 10,0803''$	$= 0^h 13^m 8,672019^s$	

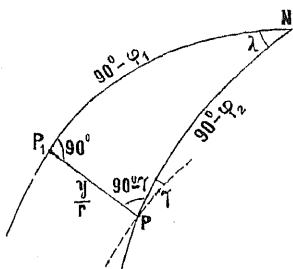
Bei der Benützung der Hilfstafel Seite [31] kann man beliebig viele Dezimalen schreiben, obgleich nur 0,0001^s angegeben ist. Z. B. für vorstehendes $\lambda_0 - \lambda$ hat man:

3 ^o	0 ^h 12 ^m 0 ^s	0 ^h 13 ^m ==	3 ^o 15' 0"
17' ==	1 ^m 8 ^s	8 ^s ==	2' 0"
10'' ==	0,666 667 ^s	0,6 ^s ==	0,90''
0,08'' ==	0,005 333 ^s	0,07 ^s ==	0,105''
0,0003'' ==	0,000 020 ^s	0,002 ^s ==	0,003 0''
Summe	0 ^h 13 ^m 8,672 020 ^s	0,00002 ^s ==	0,000 030''
		Summe	3 ^o 17' 1,008 030'',

Was die Zahlenschärfe solcher Angaben, ebenso wie auch für geographische Breiten, betrifft, so kommt die etwaige astronomische Messung dabei für uns nicht in Betracht. In geodätischer Beziehung gelten Längen und Breiten nur als Mass-Bestimmungen auf der Oberfläche des Ellipsoids; und da z. B. 1'' in Breite rund = 30 Meter ist (vgl. Anhang Seite [27]), so bringt 0,001'' immer noch 0,03^m oder 3 Centimeter, und man muss daher geographische Coordinaten auf 0,0001'' oder gar auf 0,00001'' genau angeben, wenn man die Genauigkeit *geodätischer* Messungen, mit der immer formell etwas übertrieben nöthigen Schärfe, durch geographische Längen und Breiten ausdrücken will.

§ 54. Bestimmung der rechtwinkligen Coordinaten x, y aus den geographischen Coordinaten φ, λ .

Fig. 1.



Die Umkehrung der vorigen Aufgabe in § 53. heisst:

Gegeben sind die geographischen Coordinaten φ_2, λ eines Punktes P , und zwar die Länge λ bezogen auf den Meridian eines gegebenen Coordinaten-Systems, dessen Ursprungs-Breite φ_0 ebenfalls gegeben ist.

Gesucht sind die rechtwinkligen Coordinaten x, y des Punktes P , und die Meridian-Konvergenz γ .

Auch diese Aufgabe lässt sich mittelst des rechtwinkligen Dreiecks, das wir in Fig. 1. wieder haben, leicht lösen.

Zur Bestimmung von $\varphi_1 - \varphi_2$ hat man:

$$\cos \lambda = \frac{\tan(90^\circ - \varphi_1)}{\tan(90^\circ - \varphi_2)} = \frac{\tan \varphi_2}{\tan \varphi_1}$$

$$\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) \tan \varphi_1 = \tan \varphi_2 \quad \text{oder} \quad \tan \varphi_1 - \tan \varphi_2 = \frac{\lambda^2}{2} \tan \varphi_1$$

$$\text{Andererseits ist} \quad \tan \varphi_1 - \tan \varphi_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\cos^2 \varphi_1}$$

$$\text{also:} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda^2}{2} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \quad (1)$$

Bei den Entwicklungen für λ und γ kann man wieder wie im vorigen § 53. entweder alles auf φ_1 oder auf φ_2 beziehen, wir wollen die *beiden* Entwicklungen neben einander hersetzen, ohne Erläuterungen durch Worte, welche nach dem vorhergehenden nicht mehr nötig sein werden.

$$\begin{aligned} \tan \lambda &= \frac{\tan \frac{y}{r}}{\cos \varphi_1} & \sin \lambda &= \frac{\sin \frac{y}{r}}{\cos \varphi_2} \\ \frac{y}{r} + \frac{y^3}{3r^3} &= \left(\lambda + \frac{\lambda^3}{3}\right) \cos \varphi_1 & \frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3} &= \left(\lambda - \frac{\lambda^3}{6}\right) \cos \varphi_2 \\ y &= r \lambda \cos \varphi_1 + \frac{r \lambda^3}{3} \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 & y &= r \lambda \cos \varphi_2 - \frac{r \lambda^3}{6} \cos \varphi_2 \sin^2 \varphi_2 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \gamma) &= \sin \lambda \cos(90^\circ - \varphi_1) & \cos(90^\circ - \varphi_2) &= \cotg \lambda \cotg(90^\circ - \gamma) \\ \sin \gamma &= \sin \lambda \sin \varphi_1 & \tan \gamma &= \tan \lambda \sin \varphi_2 \\ \gamma - \frac{\gamma^3}{6} &= \left(\lambda - \frac{\lambda^3}{6}\right) \sin \varphi_1 & \gamma + \frac{\gamma^3}{3} &= \left(\lambda + \frac{\lambda^3}{3}\right) \sin \varphi_2 \\ \gamma &= \lambda \sin \varphi_1 - \frac{\lambda^3}{6} \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 & \gamma &= \lambda \sin \varphi_2 + \frac{\lambda^3}{3} \sin \varphi_2 \cos^2 \varphi_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Die Doppel-Formeln (2) und (3), welche zweigliedrig sind, kann man auch in je *eine* eingliedrige Formel überführen, in ähnlicher Weise wie dieses bei (7) und (8) des vorigen § 53. S. 290 gezeigt wurde. Man findet:

$$y = r \lambda \cos \frac{\varphi_1 + 2 \varphi_2}{3} \quad (4)$$

$$\gamma = \lambda \sin \frac{2 \varphi_1 + \varphi_2}{3} \quad (5)$$

Der Gang der Auflösung würde nun so sein, dass man zuerst nach (1) aus der gegebenen Breite φ_2 die Fusspunkts-Breite φ_1 ableitet, und daraus, durch die Differenz gegen die Ursprungs-Breite φ_0 , die Abscisse x berechnet, nämlich:

$$x = (\varphi_1 - \varphi_0) r \quad \text{bzw.} \quad = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\rho} r \quad (6)$$

Darauf hat man für y und γ je drei Formeln, nämlich (2) und (4) für y , und (3) und (5) für γ ; dann kann man nach Belieben je zwei Formeln auswählen, um y und γ mit Probe zu berechnen.

Übergang zu konformen Coordinaten x, η .

Wenn man aus gegebenen φ_2 und λ nicht gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten x, y , sondern konforme Coordinaten x, η berechnen will, so kann man das durch die bekannte Beziehung zwischen y und η (§ 53. S. 290.) machen, oder man kann auch unsere Formeln (10)–(14) § 53. S. 291 umgekehrt anwenden. So finden wir durch Umkehrung von (12) § 53. S. 291:

$$\eta = r \lambda \cos \varphi_2 - \frac{r \lambda^3}{6} \cos \varphi_2 (1 - 2 \cos^2 \varphi_2) \quad (7)$$

Dieses stimmt (soweit hier nötig) mit der Formel für y in § 3. der *Wittstein*-schen Einleitung zu dem *Gauss*-schen Coordinaten-Verzeichnis, weshalb wir auch diese Formel (7) hier behandelt haben. Im übrigen aber können wir darauf verweisen, dass man von y zu η und umgekehrt stets numerisch übergehen kann durch die Tabelle auf Seite [33] des Anhangs, so dass man besonderer Formeln für η nicht bedarf.

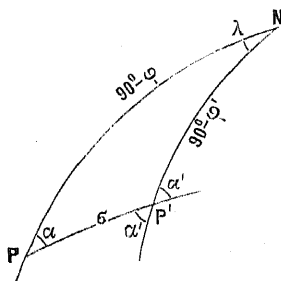
§ 55. Beziehungen zwischen geographischen Coordinaten und Polar-Coordinaten (geodätische Hauptaufgabe).

Wenn zwei Punkte P und P' durch ihre geographischen Breiten φ und φ' nebst ihrem geographischen Längen-Unterschied λ gegeben sind, so wird dadurch nach Fig. 1. ein sphärisches Dreieck NPP' bestimmt, dessen Seite $NP = 90^\circ - \varphi$, dessen Seite $NP' = 90^\circ - \varphi'$ und dessen Winkel bei $N = \lambda$ ist.

Man kennt also von dem Dreieck zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, und daher ist auch die dritte Seite σ und die beiden anderen Dreiecks-Winkel α und $180^\circ - \alpha'$ bestimmt, d. h. man kann dann die Entfernung beider Punkte $PP' = \sigma$ und die beiden Azimute in P und in P' , bzw. $= \alpha$ und $= \alpha'$ berechnen.

Wenn umgekehrt ein Punkt P durch seine Breite φ bestimmt ist, und ausserdem die Entfernung $PP' = \sigma$ und das Azimut α bekannt sind, so ist wieder das

Fig. 1.
Sphärisch-geodätische
Hauptaufgabe.



Dreieck NPP' durch zwei Seiten $NP = 90^\circ - \varphi$, $PP' = \sigma$ und den eingeschlossenen Winkeln α bestimmt, und man kann die fehlenden Stücke $90^\circ - \varphi'$, λ und $180^\circ - \alpha'$ bzw. α' berechnen.

Die beiden hier genannten Aufgaben, namentlich die zweite, spielen in der Geodäsie eine wichtige Rolle, und man nennt sie häufig „geodätische Hauptaufgaben“, oder, da manche Lösungen dieser zwei Aufgaben gegenseitig nahe verwandt sind, und leicht in einander übergehen, betrachtet man auch oft das Ganze nur als *eine* Aufgabe.

Hier beschäftigen wir uns nur mit der rein *sphärischen* Auflösung der fraglichen Aufgaben, und da wir eingesehen haben, dass es sich in beiden Fällen nur darum handelt, ein sphärisches Dreieck aus zwei gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel aufzulösen, liegen im Grundsatz keine Schwierigkeiten vor, und es handelt sich jetzt darum, die verschiedenen Auflösungs-Formen, welche die sphärische Trigonometrie für unsern Fall bietet, zu betrachten, und für unsere Zwecke zurecht zu legen (wozu *Gauss* in den „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“, erste Abhandlung, 1843, art. 16. und 17. die Wege gezeigt hat).

Ehe wir zu unseren Formel-Entwicklungen und zur numerischen Anwendung von sphärischen Formeln übergehen, wollen wir zwei scharf (mit 10stelligen Logarithmen) berechnete Beispiele voraus schicken, welche in verschiedener Weise als Normal-Beispiele dienen können:

Kleines sphärisches Normal-Beispiel.

(Bezeichnungen nach Fig. 1. S. 293.)

$$\left. \begin{array}{lll}
 \varphi = 49^\circ 30' 0'' & \varphi' = 50^\circ 30' 0'' & \lambda = 1^\circ 0' 0'' \\
 \frac{\varphi' + \varphi}{2} = 50^\circ 0' 0'' & \frac{\varphi' - \varphi}{2} = 0^\circ 30' 0'' & \frac{\lambda}{2} = 0^\circ 30' 0'' \\
 \frac{\alpha' + \alpha}{2} = 32^\circ 44' 0,2384'' & \alpha' - \alpha = 0^\circ 45' 57,89393'' & \\
 \frac{\alpha' - \alpha}{2} = 0^\circ 22' 58,9470'' & \frac{\sigma}{2} = 0^\circ 35' 39,74093'' & \\
 \hline
 \alpha' = 33^\circ 6' 59,1854'' & \sigma = 1^\circ 11' 19,48186'' & \\
 \alpha = 32^\circ 21' 1,2914'' & \sigma = 4279,48186'' &
 \end{array} \right\} (1)$$

Grosses sphärisches Normal-Beispiel.

(Bezeichnungen nach Fig. 1. S. 293.)

$$\left. \begin{array}{lll}
 \varphi = 45^\circ 0' 0'' & \varphi' = 55^\circ 0' 0'' & \lambda = 10^\circ 0' 0'' \\
 \frac{\varphi' + \varphi}{2} = 50^\circ 0' 0'' & \frac{\varphi' - \varphi}{2} = 5^\circ 0' 0'' & \frac{\lambda}{2} = 5^\circ 0' 0'' \\
 \frac{\alpha' + \alpha}{2} = 32^\circ 49' 54,6437'' & \alpha' - \alpha = 7^\circ 41' 51,67100'' & \\
 \frac{\alpha' - \alpha}{2} = 3^\circ 50' 55,8355'' & \frac{\sigma}{2} = 5^\circ 55' 51,32153'' & \\
 \hline
 \alpha' = 36^\circ 40' 50,4792'' & \sigma = 11^\circ 51' 42,64306'' & \\
 \alpha = 28^\circ 58' 58,8082'' & \sigma = 42702,64306'' &
 \end{array} \right\} (2)$$

§ 55. Beziehungen zwischen geo

Nach diesem behandeln w.

I. Gegeben φ , τ , λ , σ , α , α'

Ia. Auflösung durch die Gauss'schen Gleichungen der sphärischen Trigonometrie.

Wenn man die Gauss'schen bzw. Neper'schen Gleichungen (12) — (15) § S. 195—196, auf unseren Fall anwendet, so bekommt man:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\sigma}{2} \sin \frac{\alpha' + \alpha}{2} &= \cos \frac{\varphi' + \varphi}{2} \sin \frac{\lambda}{2} \\ \sin \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\alpha' + \alpha}{2} &= \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2} \cos \frac{\lambda}{2} \\ \cos \frac{\sigma}{2} \sin \frac{\alpha' - \alpha}{2} &= \sin \frac{\varphi' + \varphi}{2} \sin \frac{\lambda}{2} \\ \cos \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\alpha' - \alpha}{2} &= \cos \frac{\varphi' - \varphi}{2} \cos \frac{\lambda}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Wenn man die erste und zweite, dann die dritte und vierte dieser Gleichungen dividiert, und zur Abkürzung für das folgende, die Zeichen Z und N , Z' und N' für die Zähler und Nenner der entstehenden Brüche einführt, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{\alpha' + \alpha}{2} &= \frac{\cos \frac{\varphi' + \varphi}{2} \sin \frac{\lambda}{2}}{\sin \frac{\varphi' - \varphi}{2} \cos \frac{\lambda}{2}} = \frac{Z}{N} \\ \sin \frac{\sigma}{2} &= \frac{Z}{\sin \frac{\alpha' + \alpha}{2}} = \frac{N}{\cos \frac{\alpha' + \alpha}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{\alpha' - \alpha}{2} &= \frac{\sin \frac{\varphi' + \varphi}{2} \sin \frac{\lambda}{2}}{\cos \frac{\varphi' - \varphi}{2} \cos \frac{\lambda}{2}} = \frac{Z'}{N'} \\ \cos \frac{\sigma}{2} &= \frac{Z'}{\sin \frac{\alpha' - \alpha}{2}} = \frac{N'}{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Zu einem Zahlen-Beispiel nehmen wir nach (1):

$$\begin{aligned} \varphi &= 49^\circ 30' 0'' & \varphi' &= 50^\circ 30' 0'' & \lambda &= 1^\circ 0' 0'' \\ \text{also } \frac{\varphi' + \varphi}{2} &= 50^\circ 0' 0'', & \frac{\varphi' - \varphi}{2} &= 0^\circ 30' 0'', & \frac{\lambda}{2} &= 0^\circ 30' 0'' \end{aligned} \quad (6)$$

Die logarithmische Rechnung giebt:

$\log Z$	7.748 9093·6	$\log Z'$	7.825 0958·3
$\log N$	7.940 8253·2	$\log N'$	9.999 9669·3
$\log \tan \frac{\alpha' + \alpha}{2}$	9.808 0840·4	$\log \tan \frac{\alpha' - \alpha}{2}$	7.825 1289·0
$\log \sin \frac{\sigma}{2}$	8.015 9282·7	$\log \cos \frac{\sigma}{2}$	9.999 9766·3

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\alpha' + \alpha}{2} = 32^\circ 44' 0,238'' \\ \frac{\alpha' - \alpha}{2} = 0^\circ 22' 58,947'' \\ \hline \alpha' = 33^\circ 6' 59,185'' \\ \alpha = 32^\circ 21' 1,291'' \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \frac{\sigma}{2} = 0^\circ 35' 39,741'' \\ \sigma = 1^\circ 11' 19,482'' \end{array} \quad (7)$$

Von den beiden Bestimmungen für $\frac{\sigma}{2}$, nämlich aus $\sin \frac{\sigma}{2}$ und aus $\cos \frac{\sigma}{2}$ diesem Falle, da σ sehr klein ist, nur die erste scharf, während die zweite, aus der als summarische Probe benützt werden kann.

Ib. Einzel-Formeln für σ , α und α' .

Zur Bestimmung von σ aus φ , φ' und λ , kann man die Cosinus-Formel (7) S. 195) anwenden; dieselbe giebt:

$$\cos \sigma = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos \lambda \quad (8)$$

Da in unseren Fällen immer σ klein ist, kann man nicht geradezu nach $\cos \sigma$ n; indessen kann man die vorstehende Formel leicht umformen, indem man setzt:

$$\cos \sigma = 1 - 2 \sin^2 \frac{\sigma}{2} \quad \text{und} \quad \cos \lambda = 1 - 2 \frac{\sin^2 \lambda}{2}$$

Damit findet man leicht:

$$\sin \frac{\sigma}{2} = \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} + \cos \varphi \cos \varphi' \sin^2 \frac{\lambda}{2}} \quad (9)$$

Man rechnet dann mit einem Hilfswinkel μ ähnlich wie bei der Bestimmung Hypotenuse aus zwei Katheten:

$$\begin{aligned} \tan \mu &= \frac{\sin \frac{\varphi' - \varphi}{2}}{\sin \frac{\lambda}{2} \sqrt{\cos \varphi \cos \varphi'}} \\ \sin \frac{\sigma}{2} &= \frac{\sin \frac{\varphi' - \varphi}{2}}{\sin \mu} \quad \text{oder} \quad = \frac{\sin \frac{\lambda}{2} \sqrt{\cos \varphi \cos \varphi'}}{\cos \mu} \end{aligned}$$

Unser kleines Normal-Beispiel (1) S. 294 giebt:

$$\left. \begin{array}{l} \log \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2} = 7.940\,8418-6 \\ \log \sin \frac{\lambda}{2} \sqrt{\dots} = 7.748\,8693-3 \\ \log \tan \mu = 0.191\,9725-3 \\ \log \sin \frac{\sigma}{2} = 8.015\,9282-7 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \mu = 57^\circ 16' 11,981'' \\ \frac{\sigma}{2} = 0^\circ 35' 39,741'' \\ \sigma = 1^\circ 11' 19,482'' \end{array} \quad (10)$$

Auch für die Azimute α und α' giebt die sphärische Trigonometrie unmittel-
ösungen, nämlich nach (9) § 29. S. 195:

$$\cotg \alpha = \frac{\tan \varphi' \cos \varphi}{\sin \lambda} - \sin \varphi \cotg \lambda \quad (11)$$

$$\cotg (\alpha' \pm 180^\circ) = \frac{\tan \varphi \cos \varphi'}{\sin \lambda} - \sin \varphi' \cotg \lambda \quad (12)$$

Unser grosses Normal-Beispiel (2) giebt hiefür folgende Anwendung:

$$\begin{aligned} \varphi &= 45^\circ 0', & \varphi' &= 55^\circ 0', & \lambda &= 10^\circ 0' \\ \cotg \alpha &= 5,815\,512\,455 - 4,010\,201\,831 = 1,805\,310\,624 \\ \log \cotg \alpha &= 0.256\,5519\cdot4 & \alpha &= 28^\circ 58' 58,808'' \end{aligned} \quad (13)$$

Dagegen giebt das kleine Normal-Beispiel (1):

$$\begin{aligned} \varphi &= 49^\circ 30', & \varphi' &= 50^\circ 30', & \lambda &= 1^\circ 0' \\ \cotg \alpha &= 45,142\,3983 - 43,563\,6286 = 1,578\,7697 \\ \log \cotg \alpha &= 0.198\,3187\cdot8 & \alpha &= 32^\circ 21' 1,290'' \end{aligned} \quad (13a)$$

Wenn φ und φ' nahezu gleich sind, und λ klein ist, so geben die Formeln (11) und (12) keine scharfen Bestimmungen, weil dabei eine Differenz zweier nicht sehr verschiedener Werte auszurechnen ist, wie (13a) mit 45,14 ... — 43,56 ... deutlich zeigt.

Man kann noch manche andere Auflösungs-Formen für die vorgelegte erste Aufgabe I. finden, wie sich aus der Analogie mit der zweiten Aufgabe II. ergeben wird, zu der wir nun übergehen:

II. Gegeben φ, σ, α . Gesucht $\varphi', \lambda, \alpha'$.

IIa. Auflösung durch die Gauss'schen Gleichungen.

Die Anwendung der Gauss'schen bzw. Neper'schen Gleichungen ((13) — (15) § 29. S. 196) auf unseren Fall giebt:

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{\alpha' + \lambda}{2} &= \frac{\sin \frac{90^\circ - \varphi + \sigma}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{90^\circ - \varphi - \sigma}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{Z}{N} \\ \sin \frac{90^\circ - \varphi'}{2} &= \frac{Z}{\sin \frac{\alpha' + \lambda}{2}} = \frac{N}{\cos \frac{\alpha' + \lambda}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{\alpha' - \lambda}{2} &= \frac{\cos \frac{90^\circ - \varphi + \sigma}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{90^\circ - \varphi - \sigma}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{Z'}{N'} \\ \cos \frac{90^\circ - \varphi'}{2} &= \frac{Z'}{\sin \frac{\alpha' - \lambda}{2}} = \frac{N'}{\cos \frac{\alpha' - \lambda}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Bei unserem kleinen Normal-Beispiel (1) ist:

$$\text{Gegeben: } \varphi = 49^\circ 30' 0'' \quad \sigma = 1^\circ 11' 19,482'' \quad \alpha = 32^\circ 21' 1,291''$$

Man hat also zur Anwendung von (14) und (15):

$$\frac{90^\circ - \varphi + \sigma}{2} = 20^\circ 50' 39,741'' \quad \frac{\alpha}{2} = 16^\circ 10' 30,646''$$

$$\frac{90^\circ - \varphi - \sigma}{2} = 19^\circ 39' 20,259''$$

$\log Z$	8.996 1858.3	$\log Z'$	9.415 5449.8
$\log N$	9.509 2708.3	$\log N'$	9.956 3857.0
$\log \tan \frac{\alpha' + \lambda}{2}$	9.486 9150.0	$\log \tan \frac{\alpha' - \lambda}{2}$	9.459 1592.8
$\log \sin \frac{90^\circ - \varphi'}{2}$	9.528 8096.8	$\log \cos \frac{90^\circ - \varphi'}{2}$	9.973 6708.5

$$\frac{\alpha' + \lambda}{2} = 17^\circ 3' 29,592''$$

$$\frac{\alpha' - \lambda}{2} = 16^\circ 3' 29,592''$$

$$\alpha' = 33^\circ 6' 59,184''$$

$$\lambda = 1^\circ 0' 0,000''$$

$$\frac{90^\circ - \varphi'}{2} = 19^\circ 45' 0,000''$$

$$90^\circ - \varphi' = 39^\circ 30' 0,000''$$

$$\varphi' = 50^\circ 30' 0,000''$$

(10)

IIb. Einzel-Formeln für φ' , α' und λ .

Zur Bestimmung von φ' aus φ , σ und α hat man die Cosinus-Formel (7) S. 195, und für α' und λ hat man je eine der Cotangenten-Formeln (9) S. 195 anzuwenden. Man erhält auf diesem Wege folgende drei Auflösungen:

$$\sin \varphi' = \sin \varphi \cos \sigma + \cos \varphi \sin \sigma \cos \alpha \quad (16)$$

$$\cotg \alpha' = \frac{\cos \sigma \cos \alpha - \sin \sigma \tan \varphi}{\sin \alpha} \quad (17)$$

$$\cotg \lambda = \frac{\cotg \sigma \cos \varphi - \sin \varphi \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (18)$$

Zur Anwendung auf unser kleines Normal-Beispiel haben wir:

Gegeben $\varphi = 49^\circ 30' 0''$, $\sigma = 1^\circ 11' 19,482''$, $\alpha = 32^\circ 21' 1,291''$

Die Ausrechnung nach (16), (17) und (18) giebt:

$$\sin \varphi' = 0,760 2423 + 0,011 3823 = 0,771 6246$$

$$\log \sin \varphi' = 9.887 4061 \quad \varphi' = 50^\circ 30' 0,00''$$

$$\cotg \alpha' = 1,578 4299 - 0,045 3947 = 1,533 0352$$

$$\log \cotg \alpha' = 0.185 5521 \quad \alpha' = 33^\circ 6' 9,19''$$

$$\cotg \lambda = \frac{31,297 9570 - 0,642 3847}{\sin \alpha} = \frac{30,655 5723}{\sin \alpha}$$

$$\log \cotg \lambda = 1.758 0785 \quad \lambda = 1^\circ 0' 0,00''$$

An diesen drei Auflösungs-Formeln ist nichts auszusetzen; sie geben φ' , α' und λ einzeln mit gewöhnlicher Schärfe. Der von manchen Rechnern gescheute mehrfache Übergang von den Logarithmen zu den Zahlen und umgekehrt, kann nötigenfalls durch Benützung von Additions- und Subtraktions-Logarithmen vermieden werden.

IIc. Rechtwinklige Projektion des Nordpols auf die Seite σ .

In Fig. 2., welche etwas anders gezogen ist als die frühere Fig. 1., aber im wesentlichen dasselbe darstellt, ist von dem Nordpol N eine Senkrechte NP_0 auf die verlängerte PP' gefällt, wodurch sowohl die Länge m dieser Senkrechten selbst, auch die Länge PP_0 bestimmt ist, welche wir mit $90^\circ - M$ bezeichnen wollen.

Da nun das grosse rechtwinklige Dreieck PNP_0 durch unsere gegebenen φ und α vollständig bestimmt ist, und da durch Abtragen von $PP' = \sigma$ auf PP_0 auch der Punkt P' , und damit das zweite kleinere rechtwinklige Dreieck $P'NP_0$, bestimmt ist, sowie auch damit das schiefwinklige Restdreieck $PP'N$, ist nun unsere ganze Aufgabe auf die Behandlung zweier rechtwinkliger sphärischer Dreiecke zurückgeführt, weshalb wir die nötigen Formeln (die man auch rein goniometrisch aus den Formeln (16), (17), (18) herleiten könnte) sofort in der zur Rechnung nötigen Aufeinanderfolge hier einsetzen.

Zur Bestimmung von M und m hat man:

$$\tan M = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi \cos \alpha} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos m &= \frac{\sin \varphi}{\sin M} & \text{oder} & \quad \cos m = \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{\cos M} \\ \sin m &= \sin \alpha \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Nachdem so M und m bestimmt und versichert sind, hat man weiter:

$$\tan \alpha' = \frac{\tan m}{\cos (M + \sigma)} \quad (21)$$

$$\sin \varphi' = \cos m \sin (M + \sigma) \quad \tan \varphi' = \tan (M + \sigma) \cos \alpha' \quad (22)$$

$$\sin \lambda = \frac{\sin \sigma \sin \alpha'}{\cos \varphi} = \frac{\sin \sigma \sin \alpha}{\cos \varphi'} \quad (23)$$

Die Anwendung auf unser kleines Normal-Beispiel mit den gegebenen Werten φ , α und σ nach (1), führt auf die Hilfwinkel:

$$M = 54^\circ 11' 19,61'' \quad m = 20^\circ 20' 7,75''$$

womit die Werte φ' , α' und λ sich wie früher ergeben.

IIId. Rechtwinklige Coordinaten x , y für den Punkt P' .

In Fig. 3. S. 300 ist der Meridian PN gerade gezogen, und durch $P'P_1$ eine Senkrechte angedeutet, welche von P' auf den Meridian von P gefällt wurde, so dass die rechtwinkligen sphärischen Coordinaten $PP_1 = x$ und $P_1P' = y$ zur Anschauung kommen. Diese Werte x und y sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$\tan x = \tan \sigma \cos \alpha \quad (24)$$

$$\text{und} \quad \sin y = \sin \sigma \sin \alpha, \quad \tan y = \sin x \tan \alpha \quad (25)$$

Mit x hat man auch $\varphi + x$ und $90^\circ - (\varphi + x)$ die Kathete NP_1 des grossen rechtwinkligen Dreiecks NP_1P' , welches φ' und λ giebt, nämlich:

Fig. 2.
Hilfwinkel M und m .

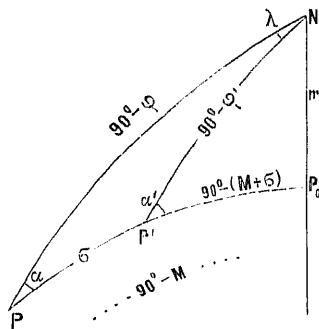
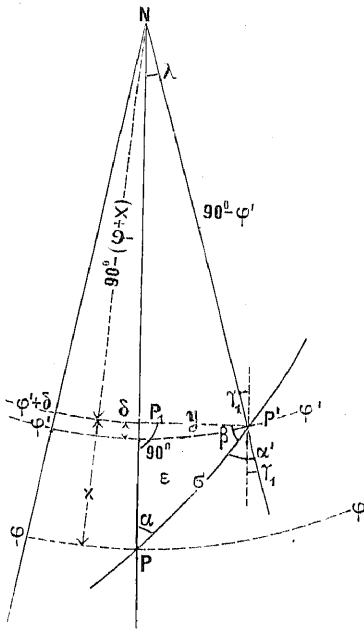


Fig. 3.
Rechtwinklige
Coordinaten
 $PP_1 = x$, $P_1P' = y$.



$$\tan \lambda = \frac{\tan y}{\cos (q - \sigma)} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin q' &= \sin (q + x) \cos y \\ \tan q' &= \tan (q + x) \cos \lambda \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

und
Endlich nach dem Sinussatze:

$$\sin \alpha' = \frac{\sin \alpha \cos q}{\cos q'} \quad (28)$$

Diese einfache und naheliegende Auflösung hat Gauss (in Art. 16. der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abtheilung, Göttingen 1843“) noch verfeinert, erstens dadurch, dass der kleine Breiten-Unterschied δ zwischen den Punkten P_1 und P' für sich dargestellt wurde, und zweitens dadurch, dass auch die Meridian-Konvergenz γ_1 zwischen P_1 und P' und ausserdem der sphärische Excess ε des rechtwinkligen Dreiecks PP_1P' beigezogen wurde.

Denkt man sich diese drei kleinen Werte δ , γ_1 und ε bestimmt, so ist für die Breite:

$$\begin{aligned} (90^\circ - q') - (90^\circ - (q + x)) &= \delta \\ q' &= q + x - \delta \end{aligned} \quad (29)$$

ferner für die Azimute:

$$\alpha' - \gamma_1 + \beta = 90^\circ \quad \text{und} \quad \alpha + \beta = 90^\circ + \varepsilon$$

$$\text{woraus:} \quad \alpha' - \alpha = \gamma_1 - \varepsilon \quad (30)$$

Um den sphärischen Excess ε zu bestimmen, haben wir die schon bei (4) § 44. S. 249 benutzte Entwicklung:

$$\begin{aligned} \cotg \alpha \cotg \beta &= \cos \sigma = 1 - 2 \sin^2 \frac{\sigma}{2} \\ \cos \alpha \cos \beta &= \sin \alpha \sin \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \sin^2 \frac{\sigma}{2} \\ \cos (\alpha + \beta) &= -\sin \varepsilon = -2 \sin \alpha \sin \beta \sin^2 \frac{\sigma}{2} \\ \sin \varepsilon &= 2 \sin \alpha \frac{\sin x}{\sin \sigma} \sin^2 \frac{\sigma}{2} \\ \sin \varepsilon &= \tan g \frac{\sigma}{2} \sin x \sin \alpha \end{aligned} \quad (31)$$

Für γ_1 hat man aus dem rechtwinkligen Dreieck NP_1P' :

$$\begin{aligned} \tan (90^\circ - \gamma_1) &= \frac{\tan (90^\circ - (q + x))}{\sin y} \\ \tan \gamma_1 &= \tan (q + x) \sin y = \tan (q + x) \sin \sigma \sin \alpha \end{aligned} \quad (32)$$

Um auch noch δ zu bestimmen, hat man zunächst nach (29):

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin ((q + x) - q') = \sin (q + x) \cos q' - \cos (q + x) \sin q' \\ &= \cos (q + x) \cos q' (\tan (q + x) - \tan q') \end{aligned}$$

Es ist aber in dem rechtwinkligen Dreieck NP_1P' :

$$\operatorname{tang} q' = \operatorname{tang} (q + x) \cos \lambda = \operatorname{tang} (q + x) \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}\right)$$

und damit wird:

$$\sin \delta = 2 \sin (q + x) \cos q' \sin^2 \frac{\lambda}{2}$$

Wenn man hier noch γ_1 nach (32) zuzieht und $\cos q' \sin \lambda = \sin y$ berücksichtigt, so erhält man:

$$\sin \delta = \cos (q + x) \operatorname{tang} \frac{\lambda}{2} \operatorname{tang} \gamma_1 \quad (33)$$

Der Gang der Rechnung ist nun folgender:

Man bestimmt x und y sowie auch λ wie im einfachen Fall, nach (24), (25), (26), dann folgen ε und γ_1 nach (31) und (32) und δ nach (33), worauf man q' und α' nach (29) und (30) zusammensetzen kann.

Die Anwendung auf unser kleines Normal-Beispiel gestaltet sich so:

$$\text{Gegeben} \quad q = 49^\circ 30' 0'' \quad \sigma = 1^\circ 11' 19,482'' \quad \alpha = 32^\circ 21' 1,291''$$

Nach (24), (25), (26) findet man:

$$x = 1^\circ 0' 15,420'' \quad y = 0^\circ 38' 9,813'' \quad \lambda = 1^\circ 0' 0,000''$$

Die Formeln (31), (32), (33) liefern:

$$\varepsilon = 0^\circ 0' 20,0687'' \quad \gamma_1 = 0^\circ 46' 17,9616'' \quad \delta = 0^\circ 0' 15,4199''$$

und nun setzt man so zusammen:

$$\begin{array}{ll} \gamma_1 = 0^\circ 46' 17,9616'' & x = 1^\circ 0' 15,420'' \\ \varepsilon = 0^\circ 0' 20,0687'' & \delta = 0^\circ 0' 15,420'' \\ \hline \gamma - \varepsilon = 0^\circ 45' 57,8929'' = \alpha' - \alpha, & x - \delta = 1^\circ 0' 0,000'' \\ \alpha = 32^\circ 21' 1,291'' & q = 49^\circ 30' 0,000'' \\ \hline \alpha' = 33^\circ 6' 58,184'' & q' = 50^\circ 30' 0,000'' \end{array}$$

Der Vorteil dieser Berechnung im Vergleich mit allen früher beschriebenen besteht darin, wenn σ selbst klein ist (was hier immer der Fall ist), dass dann auch alle andern, die Endergebnisse beeinflussenden Grössen x , y , γ_1 , ε selbst *klein* sind, und daher aus *sin* oder *tang* sich sehr scharf berechnen lassen.

Man kann durch diese verfeinerten Formeln in Hinsicht auf Rechenschärfe, mit einer gewöhnlichen 7stelligen Logarithmentafel nahe dasselbe erreichen, wozu man mit den früheren Formeln nahezu 10stellige Logarithmen braucht.

§ 56. Differential-Gleichungen der sphärischen geodätischen Hauptaufgabe.

Die geschlossenen Formeln der sphärischen Trigonometrie, welche wir im vorigen § 55. behandelt haben, erfüllen nicht alle Bedürfnisse; es ist in vielen Fällen nützlich, geschlossene Formeln in Reihen aufzulösen, und der erste Schritt hiezu ist die Aufstellung von Differential-Formeln.

Wir betrachten in Fig. 1. S. 302 das schon früher benützte sphärische Dreieck $PP'N$, jedoch nehmen wir nun an, dass die Entfernung PP' der beiden betrachteten Punkte sehr *klein* = ds werde, wodurch auch alle anderen Differenzen $q' - q$, $\alpha' - \alpha$, λ

klein werden, was wir in Fig. 1. und Fig. 2. durch Differential-Zeichen $d\varphi$, $d\alpha$ u. s. w. angedeutet haben.

Fig. 1.

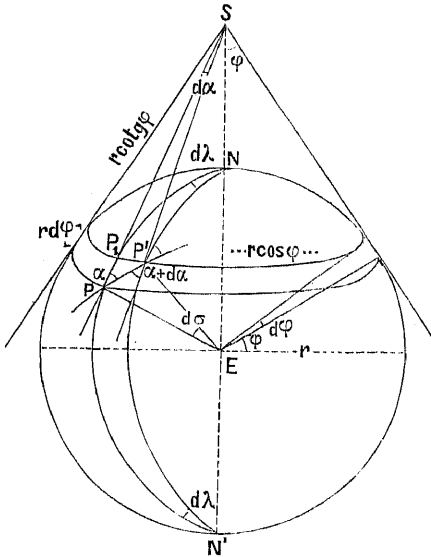
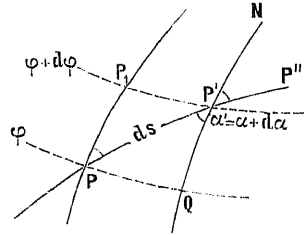


Fig. 2.

Besonderer Teil von Fig. 1.

$$PP' = ds = r d\alpha.$$



Wir betrachten in Fig. 1. eine Kugel mit zwei Punkten P und P' , deren Entfernung $PP' = ds$ klein ist. Die Breiten dieser Punkte seien bzw. φ und $\varphi + d\varphi$, so dass die kleine Breiten-Differenz $d\varphi$ zwischen den Parallelkreisen von P und P' erscheint. Durch die beiden Meridiane NP und NP' kommt auch der Längenunterschied $d\lambda$ zum Ausdruck und werden die Azimute des Bogens ds in P und in P' bestimmt, diese Azimute seien bzw. α und $\alpha + d\alpha$.

Man kann nun auf die beiden Punkte P und P' mit ihren Breiten φ , $\varphi + d\varphi$, Azimuten α , $\alpha + d\alpha$ und ihrer Entfernung $d\sigma$ und dem Längenunterschied $d\lambda$ die allgemeinen *Gauss'schen* Formeln (3) § 55. S. 295 anwenden; und wenn man dabei, im Sinne der Differential-Rechnung, $\sin \frac{d\sigma}{2} = \frac{d\sigma}{2}$, $\cos \frac{d\sigma}{2} = 1$ setzt u. s. w., so geben die drei ersten jener Gleichungen (3) § 55. S. 295 folgendes:

$$d\sigma \sin \alpha = d\lambda \cos \varphi \quad (1)$$

$$d\sigma \cos \alpha = d\varphi \quad (2)$$

$$d\alpha = d\lambda \sin \varphi \quad (3)$$

Dieses sind die sehr wichtigsten Differential-Gleichungen der sphärisch-geodätischen Hauptaufgabe, wozu zunächst bemerkt werden kann, dass man diese Gleichungen auch auf manchem anderen Wege finden kann (wie wir gelegentlich in unserem II. Bande S. 160–161 gezeigt haben, wo es sich darum handelte, ähnliche Gleichungen für die Theorie der Theodolit-Axenfehler rasch zu bilden).

Man kann die Gleichungen (1), (2), (3) auch geometrisch in Fig. 1. nach-

weisen, wozu zuerst das kleine, als rechtwinklig eben zu behandelnde Dreieck $P_1 P P'$, welches in Fig. 2. besonders herausgezeichnet ist, dient. Dasselbe giebt mit $r d\sigma = ds$:

$$ds \sin \alpha = P_1 P' \quad (1a)$$

$$ds \cos \alpha = P P_1 \quad (2a)$$

Diese Gleichungen sind entsprechend (1) und (2), wozu für (2a) nur einzusehen ist, dass PP_1 ein Meridianbogen $= r d\varphi$ für den Halbmesser r oder kurz $= d\varphi$ für den Halbmesser 1 ist. Sodann für (1a) hat man den Parallelkreis-Halbmesser $p = r \cos \varphi$ zu betrachten (bzw. $= r \cos (\varphi + d\varphi)$, welcher mit $r = 1$ und für den Längen-Unterschied $d\lambda$ den Parallelkreis-Bogen $P_1 P' = d\lambda \cos \varphi$ giebt.

Während die zwei ersten Gleichungen (1) und (2) sich geradezu aus dem kleinen rechtwinkligen Dreieck PP_1P' geometrisch herleiten lassen, ist zur geometrischen Begründung der dritten Gleichung (3) die Betrachtung der Meridian-Tangenten PS und $P'S$ nötig. Insofern PP_1 unendlich klein ist, schneiden sich diese beiden Tangenten in einem Punkte S der Erdaxe, und bilden dort den Winkel $d\alpha$, wie aus dem geradlinigen Dreiecke $SP P'$ folgt.

In dem langen gleichschenkligen Dreiecke $P_1 P' S$ hat man

$$d\alpha = \frac{P_1 P'}{P_1 S}$$

Hier ist, wie schon erwähnt, der Parallelbogen $P_1 P' = r \cos \varphi d\lambda$ und die Tangentenlänge $P_1 S$ findet sich $= r \cotg \varphi$; es ist also:

$$d\alpha = \frac{r \cos \varphi d\lambda}{r \cotg \varphi} = d\lambda \sin \varphi \quad (3a)$$

womit die Gleichung (3) begründet ist.

Dieses giebt auch Gelegenheit, die Ausdrucksweise „Meridian-Konvergenz“ zu begründen. Die Winkel-Differenz $d\alpha$ erscheint bei S zunächst als Konvergenz der Meridian-Tangenten, woraus in leicht begreiflicher sprachlicher Vereinfachung sich die Benennung „Konvergenz der Meridiane“ oder kurz „Meridian-Konvergenz“ gebildet hat.

Die Meridian-Konvergenz $d\alpha$ unserer bisherigen Betrachtung ist die Differenz der Azimute des Grosskreis-Bogens PP' in P und in P' , d. h. in der besonders herausgezeichneten Fig. 2. ist:

$$d\alpha = \alpha' - \alpha \quad (4)$$

wobei α' sowohl $= P P' Q$ als auch $= N P' P''$ ist, indem die beiden mit α' bezeichneten Schnittwinkel in P' für einen Grosskreis-Bogen $P P' P''$ gleich sind.

Nachdem wir so die wichtigen Differential-Grundformeln nach allen Beziehungen erörtert haben, wollen wir auch noch eine praktische Anwendung derselben machen.

Wenn man die Differential-Formeln auf endliche Differenzen anwendet, und dann unter φ die Mittelbreite versteht, so hat man:

$$\sigma \sin \frac{\alpha' + \alpha}{2} = \lambda \cos \frac{\varphi' + \varphi}{2} \quad (5)$$

$$\sigma \cos \frac{\alpha' + \alpha}{2} = \varphi' - \varphi \quad (6)$$

$$\alpha' - \alpha = \lambda \sin \frac{\varphi' + \varphi}{2} \quad (7)$$

Aus (5) und (6) findet man:

$$\tan \frac{\alpha' + \alpha}{2} = \frac{\lambda \cos \frac{\varphi' + \varphi}{2}}{\varphi' - \varphi} \quad (8)$$

$$\sigma = \frac{\lambda \cos \frac{\varphi' + \varphi}{2}}{\sin \frac{\alpha' + \alpha}{2}} \quad \text{oder} \quad = \frac{\varphi' - \varphi}{\cos \frac{\alpha' + \alpha}{2}} \quad (9)$$

Man kann auch unmittelbar σ durch Quadrieren und Addieren von (5) und (6) finden:

$$\sigma = \sqrt{(\varphi' - \varphi)^2 + \left(\lambda \cos \frac{\varphi' + \varphi}{2} \right)^2} \quad (10)$$

Nachdem $\alpha' + \alpha$ aus (8) und $(\alpha' - \alpha)$ aus (7) berechnet sind, hat man auch α' und α .

Wir wollen diese Näherungs-Formeln auf unser kleines sphärisches Normal-Beispiel anwenden:

Gegeben $\varphi = 49^\circ 30'$ $\varphi' = 50^\circ 30'$ $\lambda = 1^\circ 0' = 3600''$

$$\frac{\varphi' + \varphi}{2} = 50^\circ 0' \quad \varphi' - \varphi = 1^\circ 0' = 3600''.$$

$$\text{Aus (8) findet man: } \frac{\alpha' + \alpha}{2} = 32^\circ 43' 56,67'' \quad (11)$$

$$\text{Aus (7) findet man: } \frac{\alpha' - \alpha}{2} = 0^\circ 22' 58,88'' \quad (12)$$

$$\alpha' = 33^\circ 6' 55,55'' \quad (13)$$

$$\alpha = 32^\circ 20' 57,79'' \quad (14)$$

$$\text{Aus (10) findet man: } \sigma = 4279,57'' = 1^\circ 11' 19,57'' \quad (15)$$

Die im vorigen § 55. mehrfach berechneten genaueren Werte sind:

$$\alpha' = 33^\circ 6' 59,19'' \quad , \quad \alpha = 32^\circ 21' 1,29'' \quad , \quad \sigma = 1^\circ 11' 19,48'' \quad (16)$$

Bei σ beträgt der Fehler des Näherungswertes (15) nur 0,09''. Die bequemen Näherungsformeln (5) — (10) sind zu manchen Berechnungen unmittelbar zu brauchen, z. B. in der Kartographie und überhaupt in Fällen, wo es nicht auf äusserste Schärfe ankommt.

Indessen werden wir nun zur Aufstellung genauerer Formeln dieser Art übergehen.

§ 57. Reihen-Entwicklungen mit der Mittelbreite.

Wir nehmen die *Gauss'schen* Gleichungen (3) § 55. S. 295 nochmals vor; wir wollen jedoch die Bezeichnungen nun etwas anders wählen, nämlich nach Andeutung von Fig. 1. S. 305:

$$\text{Breiten: } \varphi_1 \text{ und } \varphi_2 \quad , \quad \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi \quad , \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \beta \quad (1)$$

$$\text{Azimute: } \alpha_1 \text{ und } \alpha_2 \quad , \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = \alpha \quad , \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \gamma \quad (2)$$

$$\text{Längen-Unterschied: } \lambda \quad (3)$$

$$\text{Verbindungs-Bogen: } \sigma \quad (4)$$

Damit werden die Gleichungen (3) § 55. S. 295:

$$\sin \frac{\sigma}{2} \sin \alpha = \sin \frac{\lambda}{2} \cos \varphi \quad (5)$$

$$\sin \frac{\sigma}{2} \cos \alpha = \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\lambda}{2} \quad (6)$$

$$\cos \frac{\sigma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{\lambda}{2} \sin \varphi \quad (7)$$

$$\cos \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\lambda}{2} \cos \frac{\beta}{2} \quad (8)$$

Wir nehmen zuerst (5) und (6), welche entwickelt geben:

$$\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48}\right) \sin \alpha = \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^3}{48}\right) \cos \varphi$$

$$\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48}\right) \cos \alpha = \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{48}\right) \left(1 - \frac{\lambda^2}{8}\right)$$

Kürzer geschrieben:

$$\sigma \sin \alpha \left(1 - \frac{\sigma^2}{24}\right) = \lambda \cos \varphi \left(1 - \frac{\lambda^2}{24}\right) \quad (9)$$

$$\sigma \cos \alpha \left(1 - \frac{\sigma^2}{24}\right) = \beta \left(1 - \frac{\beta^2}{24}\right) \left(1 - \frac{\lambda^2}{8}\right) \quad (10)$$

Hier kann man in den Korrektionsgliedern als erste Näherung setzen:

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi \quad (11)$$

Wenn man dieses in (9) und (10) links einsetzt, und dann nach $\sigma \sin \alpha$ und $\sigma \cos \alpha$ auflöst und ordnet, so findet man:

$$\sigma \sin \alpha = \lambda \cos \varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{24} - \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24} \right) \quad (12)$$

$$\sigma \cos \alpha = \beta \left(1 - \frac{\lambda^2}{8} + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{24} \right) \quad (13)$$

Durch Division dieser zwei Gleichungen findet man $\tan \alpha$, und dann σ aus jeder einzeln. Man kann jedoch auch (12) und (13) quadrieren und addieren, und damit eine unmittelbare Formel für σ^2 finden, nämlich:

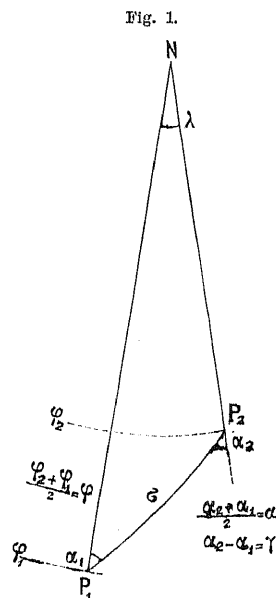
$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{12} (-3 \beta^2 \lambda^2 + 2 \beta^2 \lambda^2 \cos^2 \varphi - \lambda^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi) \quad (14)$$

oder $\sigma = \sqrt{\beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi} \left(1 - \frac{\beta^2 \lambda^2}{8 \sigma^2} + \frac{\beta^2 \lambda^2 \cos^2 \varphi}{12 \sigma^2} - \frac{\lambda^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{24 \sigma^2} \right)$ (14 a)

Man kann diese Formel auch leicht aus (9) §. 55. S. 296 herleiten.

Um auch die Meridian-Konvergenz zu erhalten, bilden wir zunächst aus (7) und (8) durch Division :

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \tan \frac{\lambda}{2} \frac{\sin \varphi}{\cos \frac{\beta}{2}}$$



Dieses ebenso wie das frühere entwickelt, giebt:

$$\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^3}{24} = \sin \varphi \frac{\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^3}{24}}{1 - \frac{\beta^2}{8}}$$

$$\gamma + \frac{\gamma^3}{12} = \sin \varphi \left(\lambda + \frac{\lambda^3}{12} \right) \left(1 + \frac{\beta^2}{8} \right)$$

Erste Näherung $\gamma = \lambda \sin \varphi$, also $\gamma^3 = \lambda^3 \sin^3 \varphi + \dots$

$$\gamma = -\frac{\lambda^3 \sin^3 \varphi}{12} + \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{12} + \frac{\beta^2}{8} \right)$$

$$\alpha' - \alpha = \gamma = \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{8} + \frac{\lambda^2}{12} \cos^2 \varphi \right) \quad (15)$$

In diesen Formeln ist überall nach analytischem Masse gerechnet, und wenn man die kleinen Winkel in Sekunden haben will, muss man alle quadratischen Glieder in den Klammern durch ϱ^2 dividieren. Dieses giebt für die drei wichtigsten Gleichungen (12), (13) und (15) die folgenden Gebrauchsformeln:

$$\sigma \sin \alpha = \lambda \cos \varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{24 \varrho^2} - \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24 \varrho^2} \right) \quad (16)$$

$$\sigma \cos \alpha = \beta \left(1 - \frac{\lambda^2}{8 \varrho^2} + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{24 \varrho^2} \right) \quad (17)$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \gamma = \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{8 \varrho^2} + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{12 \varrho^2} \right) \quad (18)$$

Durch Division von (16) und (17) findet man auch:

$$\tan \alpha = \frac{\lambda \cos \varphi}{\beta} \left(1 + \frac{\beta^2}{24 \varrho^2} + \frac{\lambda^2}{12 \varrho^2} \right) \quad (19)$$

Die konstanten Coëfficienten zu den vorstehenden Formeln sind:

$$\log \frac{1}{8 \varrho^2} = 8.468\,0597 - 20 \quad \log \frac{1}{12 \varrho^2} = 8.291\,9685 - 20 \quad \log \frac{1}{24 \varrho^2} = 7.990\,9385 - 20 \quad (20)$$

Man kann die vorstehenden Formeln (17), (18), (19) auch logarithmisch anwenden, nämlich in dieser Form:

$$\log \sigma \sin \alpha = \log \lambda \cos \varphi + \frac{\mu}{24 \varrho^2} \beta^2 - \frac{\mu}{24 \varrho^2} \lambda^2 \sin^2 \varphi \quad (21)$$

$$\log \sigma \cos \alpha = \log \beta - \frac{\mu}{8 \varrho^2} \lambda^2 + \frac{\mu}{24 \varrho^2} \lambda^2 \cos^2 \varphi \quad (22)$$

$$\log \gamma = \log \lambda \sin \varphi + \frac{\mu}{8 \varrho^2} \lambda^2 + \frac{\mu}{12 \varrho^2} \lambda^2 \cos^2 \varphi \quad (23)$$

Man braucht dann statt (20) folgende Konstanten:

$$\log \frac{\mu}{8 \varrho^2} = 5.105\,8441 - 10 \quad \log \frac{\mu}{12 \varrho^2} = 4.929\,7528 - 10 \quad \log \frac{\mu}{24 \varrho^2} = 4.628\,7228 - 10 \quad (24)$$

Dabei ist in Einheiten der 7ten Logarithmen-Dezimale gerechnet, was durch 5· statt 5. u. s. w. angedeutet ist.

Wir wollen das im bisherigen beschriebene Rechen-Verfahren auf unser kleines Normalbeispiel (1) § 55. S. 294 anwenden, und zwar zuerst mit den Formeln (16), (17), (18).

$$\begin{array}{llll} \text{Gegeben} & \varphi_1 = 49^\circ 30' & \varphi_2 = 50^\circ 30' & \lambda = 1^\circ 0' \\ \text{also} & \varphi = 50^\circ 0' & \beta = 1^\circ 0' = 3600'' & \lambda = 3600'' \end{array}$$

Die Rechnung nach (16), (17), (18) giebt:

$$\begin{array}{lll} \lambda \cos \varphi = 2314,0352'' & \beta = 3600,0000'' & \lambda \sin \varphi = 2757,7600'' \\ \quad + 0,0294 & \quad - 0,1371 & \quad + 0,1050 \\ \quad - 0,0172 & \quad + 0,0189 & \quad + 0,0289 \\ \hline \sigma \sin \alpha = 2314,0474'' & \sigma \cos \alpha = 3599,8818'' & \gamma = 2757,8939'' \\ & & \gamma = 0^\circ 45' 57,8939'' \end{array}$$

$$\alpha = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = 32^\circ 44' 0,2385''$$

$$\sigma = 4279,4819''$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = 0^\circ 22' 58,9470''$$

$$\sigma = 1^\circ 11' 19,4819''$$

$$\alpha_2 = 33^\circ 6' 59,1855''$$

$$\alpha_1 = 32^\circ 21' 1,2915''$$

Ausserdem kann man auch die *logarithmischen* Formeln (21), (22), (23) anwenden, wobei man dasselbe, wie soeben, nur in anderer Form, bekommt, nämlich:

$$\begin{array}{llll} \log \lambda \cos \varphi & 3.364\ 3700.0 & \log \beta & 3.556\ 3025.0 & \log \lambda \sin \varphi & 3.440\ 5564.7 \\ & + 55.1 & & -- 165.4 & & + 165.4 \\ & - 32.3 & & + 22.8 & & + 45.5 \\ \hline \log \sigma \sin \alpha & 3.364\ 3722.8 & \log \sigma \cos \alpha & 3.556\ 2882.4 & \log \gamma & 3.440\ 5775.6 \end{array}$$

Wenn man damit weiter rechnet, so bekommt man dieselben Werte α , σ , γ u. s. w. wie vorhin.

Wenn man etwa σ selbst nicht braucht, so rechnet man $\tan \alpha$ geradezu aus der Formel (19), welche in unserem Falle giebt:

$$\log \tan \alpha = 9.808\ 0675.0 + 165.4 = 9.808\ 0840.4.$$

Dieses stimmt, wie es sein soll, mit der Differenz von $\log \sigma \sin \alpha$ und $\log \sigma \cos \alpha$.

Wir haben auch noch die Formel (14a) auf das kleine Normalbeispiel mit $\beta = 1^\circ$, $\lambda = 1^\circ$, $\varphi = 50^\circ$ angewendet, und gefunden:

$$\sigma = 4279,5747'' - 0,1153'' - 0,0093'' + 0,0318'' = 4279,4819'' = 1^\circ 11' 19,4819''$$

Man kann auch hier die Korrektionsglieder in logarithmischer Form berechnen, wie wir schon früher bei den *Soldnerschen* Coordinaten (11) § 48. S. 273 gesehen haben.

Umgekehrte Anwendung der Formeln (16), (17), (18).

Man kann die Formeln (16), (17), (18) nicht bloss zur Bestimmung von σ , α_1 , α_2 bei gegebenem φ_1 , φ_2 , λ anwenden, sondern auch umgekehrt dazu, um bei gegebenen φ_1 , σ , α_1 , die fehlenden φ_2 , λ , α_2 zu berechnen. Allerdings geht dieses nur auf indirektem Wege, indem *Näherungs-Werte* der Unbekannten benützt und allmählich verbessert werden.

Auch sind dann einige Umformungen von (16), (17), (18) vorzunehmen; wir bilden zuerst durch Division von (16) und (18):

$$\gamma = \sigma \sin \alpha \tan \varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{8 \varrho^2} + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{12 \varrho^2} - \frac{\beta^2}{24 \varrho^2} + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24 \varrho^2} \right)$$

In den Korrektionsgliedern gilt aber die erste Näherung

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi$$

und damit giebt das vorstehende:

$$\gamma = \sigma \sin \alpha \tan \varphi \left(1 + \frac{\sigma^2}{12 \varrho^2} + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24 \varrho^2} \right) \quad (25)$$

(17) und (16) geben umgestellt:

$$\beta = \sigma \cos \alpha \left(1 + \frac{\lambda^2}{8 \varrho^2} - \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{24 \varrho^2} \right) \quad (26)$$

$$\lambda = \sigma \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} \left(1 - \frac{\beta^2}{24 \varrho^2} + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24 \varrho^2} \right) \quad (27)$$

Man kann diese Gleichungen auch in logarithmischer Form anwenden, ähnlich wie (21), (22), (23), was wir hier aber nicht mehr besonders schreiben wollen.

Zu einer Zahlen-Anwendung wollen wir von unserem kleinen Normalbeispiel (1) § 55. S. 294 annehmen:

$$\text{Gegeben } \varphi_1 = 49^\circ 30' 0'' \quad , \quad \sigma = 1^\circ 11' 19,482'' \quad , \quad \alpha_1 = 32^\circ 21' 1,291'' \quad (28)$$

Für φ_2 und λ habe man von irgend wo her, z. B. von einer topographischen Karte, die Näherungswerte:

$$(\varphi_2) = 50^\circ 30' 10'' \quad , \quad \lambda = 1^\circ 0' 10'' = 3610'' \quad (29)$$

Nun nimmt man aus φ_1 und (φ_2) den genäherten Mittelwert $(\varphi) = 50^\circ 0' 5''$ und rechnet mit $(\lambda) = 3610''$, erstinals genähert $(\gamma) = (\lambda) \sin (\varphi) = 2765,48'' = 0^\circ 46' 5,48''$; davon die Hälfte zu α_1 nach (28) addiert, giebt die erste Näherung für α :

$$(\alpha) = 32^\circ 44' 4''.$$

Nun rechnet man mit $(\varphi) = 50^\circ 0' 5''$ und $(\alpha) = 32^\circ 44' 4''$ und mit dem genau gegebenen $\sigma = 4279,482''$ die Hauptglieder der Formeln (25), (26), (27) aus, und erhält:

$$\begin{aligned} (\gamma) &= 2757,93'' & (\beta) &= 3599,76'' & (\lambda) &= 3600,14'' \\ &= 0^\circ 45' 57,93'' \end{aligned} \quad (30)$$

Mit diesem (γ) bildet man ein neues

$$(\alpha) = \alpha_1 + \frac{(\gamma)}{2} = 32^\circ 44' 0,25'' \quad (31)$$

Nun sind die Näherungen (β) und (λ) in (30) jedenfalls vollauf genügend zur Berechnung der *Korrektions-Glieder* in (25), (26), (27), und für die Haupt-Glieder hat man ausser dem gegebenen σ die bereits sehr gute Näherung (31), weshalb man die Ausrechnung nach (25), (26), (27) bereits fast endgültig machen kann. Wenn hiebei γ und β nicht völlig übereinstimmend erhalten werden mit den in α und φ steckenden beiden Hauptgliedern $\sigma \sin \alpha \tan \varphi$ und $\sigma \cos \alpha$ benützten Werten γ und β , so muss man die Rechnung mit verbesserten α und φ so lange wiederholen, bis völlige Übereinstimmung stattfindet.

Andere Form der Korrektions-Glieder.

Da in den Haupt-Gliedern nur α und φ , aber nicht λ vorkommt, kann man die allmähliche Verbesserung der Näherungswerte auf diese zwei Elemente, bzw. auf γ und β , beschränken; allerdings bei der *ersten* Näherung wird man λ nicht entbehren können, weil eine erste Näherung für γ wohl kaum anders als durch $\lambda \sin \varphi$

zu erhalten sein wird; hat man aber einmal eine solche erste Näherung für γ , so führt man diese auch möglichst unmittelbar in die Korrekktions-Glieder ein. Dieses geschieht durch die Näherungs-Gleichungen:

$$\text{also auch} \quad \left. \begin{aligned} \sigma^2 &= \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi, & \gamma^2 &= \lambda^2 \sin^2 \varphi \\ \sigma^2 + \gamma^2 &= \beta^2 + \lambda^2 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Damit schreibt man die Gleichungen (26) und (25) für unseren neuen Zweck so:

$$\beta = \sigma \cos \alpha \left(1 + \frac{\gamma^2}{24 \varrho^2} + \frac{\lambda^2}{12 \varrho^2} \right) \quad (33)$$

$$\gamma = \sigma \sin \alpha \tan \varphi \left(1 + \frac{\sigma^2}{12 \varrho^2} + \frac{\gamma^2}{24 \varrho^2} \right) \quad (34)$$

oder auch in logarithmischer Form, ähnlich wie (21), (22), (23).

Diese Gleichungen (33) und (34) geben nun eine indirekte Auflösung für φ_2 und α_2 bzw. für β und γ , ähnlich wie dieses schon bei (25), (26), (27) gezeigt wurde; die dritte Grösse λ kommt bei (33) und (34) nur in einem Korrekktions-Gliede vor; und wird, nachdem β und γ gefunden sind, endgültig wieder durch die frühere Gleichung (27) bestimmt.

Das in vorstehendem beschriebene indirekte Berechnungs-Verfahren ist sehr genau, dasselbe ist auch (gegen erstes Vermuten) sehr bequem.

Gauss selbst sagt hierüber in Art. 20. der Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie zweite Abhandlung: „Die Bequemlichkeit dieses Verfahrens wird allerdings erst dann in ihrer vollen Grösse fühlbar, wenn man sich die Hilfen des kleinen Mechanismus bei Handhabung derartiger Methoden zu eigen gemacht hat. Ich begnüge mich, hier nur anzudeuten, dass, was wie eine mehrfache Rechnung erscheint, nicht in der Form von mehreren getrennten Rechnungen sondern wie eine einzige geschrieben werden soll, indem man bei jeder neuen Überarbeitung nur die letzten Ziffern ergänzt oder verbessert. Jedenfalls braucht man immer nur die letzte Rechnung aufzubewahren, und gerade darin besteht ein grosser Vorteil, zumal bei Messungen von bedeutendem Umfang, dass man dann den ganzen wesentlichen Kern der Berechnung für alle Dreiecksseiten im möglichst kleinen Raume und in der übersichtlichsten zu beliebiger Prüfung der Richtigkeit geeigneten Form besitzt.“

Was die Erlangung der ersten Näherungen für β und λ betrifft, so sind dieselben in den meisten Fällen *ohnehin* für andere Zwecke nötig. Man kann dieselben oft aus den Übersichtsnetzen der Triangulirungen, aus topographischen Karten u. s. w. entnehmen; der erste Näherungswert der Meridian-Konvergenz γ wird $= \lambda \sin \varphi$ berechnet. Sollte aber auch wegen mangelhafter Näherungswerte die Rechnung mehrfach wiederholt werden müssen, so betrifft das nur die 5 Logarithmen $\log \cos \alpha$, $\log \sin \alpha$, $\log \tan \varphi$, $\log \beta$ und $\log \gamma$. Man schreibt in einem autographirt vorgedruckten Schema die erste Rechnung in Blei und die zweite Rechnung auf derselben Stelle mit Tinte; und damit reicht man im allgemeinen aus. Man kann auch das mehrmalige Aufschlagen in der Logarithmen-Tafel ersparen, wenn man das erstemal die zur Berechnung der Proportionaltheile nötigen Tafel-Differenzen notiert.

§ 58. Weiter-Entwicklung bis zur 5. Ordnung.

(Bezeichnungen nach Fig. 1. S. 305.)

Man kann die vorstehenden Entwicklungen, welche bis zur 3. Ordnung, d. h. bis zu Gliedern β^3 , λ^3 u. s. w. gehen, noch um eine Stufe weiter, d. h. bis β^5 , λ^5 u. s. w. treiben. Allerdings hat das keinen unmittelbar praktischen Zweck, denn die Formeln werden dadurch so umständlich, dass man vorziehen müsste, nach den strengen geschlossenen Formeln der sphärischen Trigonometrie zu rechnen; indessen bietet die Entwicklung der Glieder 5. Ordnung das beste Mittel zur Gewinnung eines Näherungswertes über die Grenzen der Anwendung der abgekürzten Formeln, und diese

Glieder 5. Ordnung werden auch später bei der analogen sphäroidischen Aufgabe von Bedeutung sein.

Wir nehmen nun von den strengen *Gauss'schen* Gleichungen (5) — (8) § 57. S. 305 nochmals zunächst die zwei ersten vor:

$$\sin \frac{\sigma}{2} \sin \alpha = \sin \frac{\lambda}{2} \cos \varphi \quad (1)$$

$$\sin \frac{\sigma}{2} \cos \alpha = \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\lambda}{2} \quad (2)$$

Diese entwickeln wir nun bis zur 5. Ordnung:

$$\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48} + \frac{\sigma^5}{3840} \right) \sin \alpha = \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^3}{48} + \frac{\lambda^5}{3840} \right) \cos \varphi \quad (3)$$

$$\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48} + \frac{\sigma^5}{3840} \right) \cos \alpha = \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{48} + \frac{\beta^5}{3840} \right) \left(1 - \frac{\lambda^2}{8} + \frac{\lambda^4}{384} \right) \quad (4)$$

Um diese Gleichungen nach $\sigma \sin \alpha$ und $\sigma \cos \alpha$ aufzulösen, denken wir uns links abgesondert:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{\sigma^4}{1920} \right) &= 1 - x, \quad \text{d. h.} \quad x = \frac{\sigma^2}{24} - \frac{\sigma^4}{1920} \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 = 1 + \frac{\sigma^2}{24} + \frac{7\sigma^4}{5760} \end{aligned} \quad (5)$$

Hier ist nach (14) § 57. S. 305:

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi - \frac{\beta^2 \lambda^2}{4} - \frac{\lambda^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{12} + \frac{\beta^2 \lambda^2}{6} \cos^2 \varphi \quad (6)$$

$$\text{also} \quad \sigma^4 = \beta^4 + \lambda^4 \cos^4 \varphi + 2\beta^2 \lambda^2 \cos^2 \varphi \quad (7)$$

Wenn man diese (6) und (7) in (5) einsetzt, und damit die rechten Seiten von (3) und (4) multipliziert, so erhält man die gewünschten Ausdrücke für $\sigma \sin \alpha$ und $\sigma \cos \alpha$. Ebenso kann man auch die Reihe für die Meridian-Konvergenz γ finden, und durch $\sigma^2 \sin^2 \alpha + \sigma^2 \cos^2 \alpha$ hat man auch eine Reihe für σ^2 unmittelbar.

Da der Weg aller dieser Entwicklungen genügend gezeigt ist, schreiben wir sofort die Ergebnisse, und zwar zunächst:

$$\begin{aligned} \sigma \sin \alpha &= \lambda \cos \varphi \left\{ 1 + \frac{1}{24} (\beta^2 - \lambda^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5760} (7\beta^4 - 70\beta^2 \lambda^2 + 3\lambda^4 + 54\beta^2 \lambda^2 \cos^2 \varphi + 7\lambda^4 \cos^4 \varphi - 10\lambda^4 \cos^2 \varphi - 20\lambda^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

Ehe wir auch die Formeln für $\sigma \cos \alpha$ u. s. w. anschreiben, wollen wir eine bestimmte Ordnung der Glieder einführen und zur Abkürzung zwei neue Zeichen schreiben. Die Faktoren $\cos^2 \varphi$ und $\sin^2 \varphi$ kann man jedenfalls alle in $\cos^2 \varphi$ ausdrücken, und da dieselben immer in Verbindung mit λ^2 auftreten, stellen wir überall gleiche Potenzen von λ^2 und von $\cos^2 \varphi$ hervor, indem z. B. gesetzt wird:

$$\lambda^4 \cos^2 \varphi = \lambda^4 \cos^4 \varphi (1 + \tan^2 \varphi) \quad (9)$$

Der Parallel-Kreisbogen $\lambda \cos \varphi$ werde besonders bezeichnet, indem wir setzen:

$$\lambda \cos \varphi = p \quad (10)$$

und ferner:

$$\tan \varphi = t \quad (11)$$

Damit bekommen wir eine neue Schreibung der ersten Formel (8), und fügen sofort auch die übrigen Formeln dieser Art bei:

$$\sigma \sin \alpha = p \left\{ 1 + \frac{\beta^2 - p^2 t^2}{24} + \frac{7 \beta^4 - 2 \beta^2 p^2 (8 + 35 t^2) - 3 p^4 (8 t^2 - t^4)}{5760} \right\} \quad (12)$$

$$\sigma \cos \alpha = \beta \left\{ 1 - \frac{p^2 (2 + 3 t^2)}{24} + \frac{-4 \beta^2 p^2 (4 + 15 t^2) + p^4 (-8 - 20 t^2 + 15 t^4)}{5760} \right\} \quad (13)$$

$$\gamma = p t \left\{ 1 + \frac{3 \beta^2 + 2 p^2}{24} + \frac{75 \beta^4 + 60 \beta^2 p^2 (1 - 2 t^2) + 24 p^4 (2 - t^2)}{5760} \right\} \quad (14)$$

$$\sigma^2 = (\beta^2 + p^2) - \frac{\beta^2 p^2 (1 + 3 t^2) + p^4 t^2}{12} - \frac{2 \beta^4 p^2 (1 + 15 t^2) + 2 \beta^2 p^4 (1 + 10 t^2 - 15 t^4) + p^6 (5 + 12 t^2 - 4 t^4)}{2440} \quad (15)$$

Die Formeln (12) und (13) für $\sigma \sin \alpha$ und $\sigma \cos \alpha$ wird man lieber in logarithmischer Form haben wollen, man kann daher dieselben entwickeln nach der Formel:

$$\log(1+x) = \mu \left(x - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$\log \left(1 + \frac{A^2}{24} + \frac{B^4}{5760} \right) = \mu \left(\frac{A^2}{24} + \frac{1}{2} \frac{B^4 - 5 A^4}{2880} \right)$$

Auf diese Weise bekommt man, zugleich mit Zusetzung der nötigen φ , folgende Formeln:

$$\log \sigma \sin \alpha = \log p + \frac{\mu}{24 \varphi^2} (\beta^2 - p^2 t^2) + \frac{\mu}{2880 \varphi^4} (\beta^4 - 2 \beta^2 p^2 (4 + 15 t^2) - p^4 (12 t^2 + t^4)) \quad (16)$$

$$\log \sigma \cos \alpha = \log \beta - \frac{\mu}{24 \varphi^2} p^2 (2 + 3 t^2) - \frac{\mu}{2880 \varphi^4} (2 \beta^2 p^2 (4 + 15 t^2) + p^4 (14 + 40 t^2 + 15 t^4)) \quad (17)$$

Hiebei hat man die Konstanten für β und p in Sekunden und für Einheiten der 7. Logarithmen-Stelle:

$$\log_{24 \varphi^2} \mu = 4.628 \, 7228 \quad \log_{2880 \varphi^4} \mu = 1.920 \, 691 - 10 \quad (18)$$

Die höheren Glieder in (16) und (17) kann man in dieser Form schreiben:

$$A(\log \sigma \sin \alpha) = I \beta^4 - II \beta^2 \lambda^2 - III \lambda^4 \quad (5. \text{ Ordnung}) \quad (19)$$

$$A(\log \sigma \cos \alpha) = -IV \beta^2 \lambda^2 - V \lambda^4 \quad (5. \text{ Ordnung}) \quad (20)$$

Die Coefficienten I , II u. s. w. haben wir für verschiedene Breiten φ ausgerechnet, wie aus folgender Tabelle zu entnehmen ist, wobei jedoch β und λ nicht wie bei (18) in Sekunden, sondern für (19) und (20) in Graden zu nehmen sind.

φ	$\log I$	$\log II$	$\log III$	$\log IV$	$\log V$
40°	6.1459	7.3786	6.6345	7.3786	7.3784
45°	6.1459	7.4247	6.6578	7.4247	7.3827
50°	6.1459	7.4663	6.6583	7.4663	7.3828
55°	6.1459	7.5031	6.6371	7.5031	7.3789
60°	6.1459	7.5351	6.5950	7.5351	7.3716

Ferner haben wir für eine Breite, $\varphi = 50^\circ$, die Glieder ausgerechnet, indem der Reihe nach β und $\lambda = 2^\circ, 4^\circ, 6^\circ, 8^\circ, 10^\circ$ gesetzt wurde. Die Ergebnisse dieser Ausrechnung zeigen folgende zwei Tabellen:

$\Delta (\log \sigma \sin \alpha)$, nach Formel (19), 5. Ordnung,
für $\varphi = 50^\circ$.

$\beta =$	$\lambda = 2^\circ$	$\lambda = 4^\circ$	$\lambda = 6^\circ$	$\lambda = 8^\circ$	$\lambda = 10^\circ$
2°	— 0.053	— 0.304	— 1.012	— 2.615	— 5.724
4°	— 0.157	— 0.831	— 2.239	— 4.826	— 9.198
6°	— 0.247	— 1.621	— 4.201	— 8.426	— 14.902
8°	— 0.184	— 2.540	— 6.759	— 13.279	— 22.708
10°	+ 0.221	— 3.399	— 9.726	— 19.196	— 32.416

(22)

$\Delta (\log \sigma \cos \alpha)$, nach Formel (20), 5. Ordnung,
für $\varphi = 50^\circ$.

β	$\lambda = 2^\circ$	$\lambda = 4^\circ$	$\lambda = 6^\circ$	$\lambda = 8^\circ$	$\lambda = 10^\circ$
2°	— 0.085	— 0.805	— 3.551	— 10.640	— 25.314
4°	— 0.225	— 1.368	— 4.814	— 12.887	— 28.824
6°	— 0.460	— 2.303	— 6.921	— 16.632	— 34.677
8°	— 0.789	— 3.614	— 9.871	— 21.877	— 42.871
10°	— 1.210	— 5.299	— 13.664	— 28.620	— 53.405

(23)

In gleicher Weise haben wir auch die Formel (14) für die Meridian-Konvergenz behandelt; es fand sich:

$$\Delta(\gamma) = VI\lambda\beta^4 - VII\lambda^3\beta^2 + VIII\lambda^5 \quad (24)$$

wobei die Coefficienten folgende Werte haben:

φ°	$\log VI$	$\log VII$	$\log VIII$
40°	4.4465	3.7291	3.6012
45°	4.4880	4.0901	4.3556
50°	4.5227	4.3068	3.0233
55°	4.5518	4.4606	1.6891 _n
60°	4.7560	4.5963	2.8772 _n

(25)

Insbesondere ist, für $\varphi = 50^\circ$, hiernach folgendes berechnet:

Korrektion 5. Ordnung für Meridian-Konvergenz nach Formel (14),
für $\varphi = 50^\circ$.

$\beta =$	$\lambda = 2^\circ$	$\lambda = 4^\circ$	$\lambda = 6^\circ$	$\lambda = 8^\circ$	$\lambda = 10^\circ$
2°	0,0000"	— 0,0002"	— 0,0007"	— 0,0003"	+ 0,0030"
4°	+ 0,0014"	+ 0,0014"	— 0,0011"	— 0,0063"	— 0,0133"
6°	+ 0,0080"	+ 0,0127"	+ 0,0110"	+ 0,0006"	— 0,0192"
8°	+ 0,0263"	+ 0,0464"	+ 0,0547"	+ 0,0463"	+ 0,0174"
10°	+ 0,0650"	+ 0,1204"	+ 0,1569"	+ 0,1663"	+ 0,1411"

(26)

§ 59. Reihen-Entwicklungen nach Potenzen von σ , bis σ^3 einschliesslich.

Die sehr wichtigen Reihen, welche $\varphi' - \varphi$, $\alpha' - \alpha$ und λ in steigenden Potenzen der Entfernung σ ausdrücken, kann man auf mancherlei Arten entwickeln.

Wir wollen mit der Reihe für $\varphi' - \varphi$ beginnen, und dieselbe aus der geschlossenen Formel für φ' herleiten, nämlich unmittelbar nach nebenstehender Fig. 1. (oder auch nach (16) § 55. S. 298):

$$\sin \varphi' = \sin \varphi \cos \sigma + \cos \varphi \sin \sigma \cos \alpha \quad (1)$$

wenn man $\cos \sigma$ und $\sin \sigma$ entwickelt, so giebt dieses:

$$\begin{aligned} \sin \varphi' &= \sin \varphi \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \cos \varphi \cos \alpha \left(\sigma - \frac{\sigma^3}{6}\right) \\ \sin \varphi' - \sin \varphi &= \sigma \cos \varphi \cos \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \sin \varphi - \frac{\sigma^3}{6} \cos \varphi \cos \alpha \end{aligned} \quad (2)$$

Da φ' und φ wenig verschieden sind, setzen wir:

$$\varphi' = \varphi + \Delta \varphi \quad (3)$$

also nach (3) § 30. S. 197:

$$\sin \varphi' = \sin \varphi + \Delta \varphi \cos \varphi - \frac{\Delta \varphi^2}{2} \sin \varphi - \frac{\Delta \varphi^3}{6} \cos \varphi \quad (4)$$

Aus (2) und (4) zusammen findet man mit Weglassung eines gemeinsamen Faktors $\cos \varphi$:

$$\Delta \varphi - \frac{\Delta \varphi^2}{2} \tan \varphi - \frac{\Delta \varphi^3}{6} = \sigma \cos \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \tan \varphi - \frac{\sigma^3}{6} \cos \alpha \quad (5)$$

Diese Gleichung soll nach $\Delta \varphi$ aufgelöst werden, was durch allmälige Näherung geschieht; man hat nämlich in erster Näherung:

$$\Delta \varphi = \sigma \cos \alpha + \sigma^2 \dots \quad \text{also} \quad \Delta \varphi^2 = \sigma^2 \cos^2 \alpha + \sigma^3 \dots$$

Dieses in (5) gesetzt giebt:

$$\Delta \varphi - \frac{\sigma^2}{2} \cos^2 \alpha \tan \varphi - \frac{\Delta \varphi^3}{6} = \sigma \cos \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \tan \varphi - \frac{\sigma^3}{6} \cos \alpha$$

$$\Delta \varphi = \sigma \cos \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \tan \varphi \sin^2 \alpha + \sigma^3 \dots$$

Dieses ist eine zweite Näherung, und giebt quadriert:

$$\Delta \varphi^2 = \sigma^2 \cos^2 \alpha - \sigma^3 \tan \varphi \sin^2 \alpha \cos \alpha + \sigma^4 \dots \quad (6)$$

Ausserdem hat man hinreichend genau:

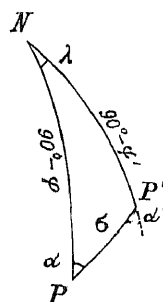
$$\Delta \varphi^3 = \sigma^3 \cos^3 \alpha + \sigma^4 \dots \quad (7)$$

Wenn man nun (6) und (7) in (5) einsetzt, und nach Potenzen von σ ordnet, so bekommt man:

$$\Delta \varphi = \sigma \cos \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \tan \varphi \sin^2 \alpha - \frac{\sigma^3}{6} \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha + 3 \tan^2 \varphi \sin^2 \alpha)$$

$$\Delta \varphi = \varphi' - \varphi = \sigma \cos \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \sin^2 \alpha \tan \varphi - \frac{\sigma^3}{6} \cos \alpha \sin^2 \alpha (1 + 3 \tan^2 \varphi) \quad (8)$$

Fig. 1.



Damit haben wir bereits die Entwicklung von $\varphi' - \varphi$ bis auf σ^3 einschliesslich, und auf ähnliche Weise wollen wir auch λ entwickeln, wozu zuerst die geschlossene Formel nach (18) § 55. S. 298 nötig ist, nämlich:

$$\cotg \lambda \sin \alpha = \cotg \sigma \cos \varphi - \sin \varphi \cos \alpha \quad (9)$$

oder $\sin \alpha \tan \sigma = \cos \varphi \tan \lambda - \sin \varphi \cos \alpha \tan \lambda \tan \sigma$

$$\begin{aligned} \sin \alpha \left(\sigma + \frac{\sigma^3}{3} \right) &= \cos \varphi \left(\lambda + \frac{\lambda^3}{3} \right) - \sin \varphi \cos \alpha \left(\lambda + \frac{\lambda^3}{3} \right) \left(\sigma + \frac{\sigma^3}{3} \right) \\ \sigma \sin \alpha + \frac{\sigma^3}{3} \sin \alpha &= \lambda \cos \varphi + \frac{\lambda^3}{3} \cos \varphi - \sigma \lambda \sin \varphi \cos \alpha \end{aligned} \quad (9a)$$

Diese Gleichung ist nach λ aufzulösen, wozu man zuerst hat:

$$\text{erste Näherung: } \lambda = \sigma \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} + \sigma^2 \dots$$

Dieses wird in (10) eingesetzt, und dann findet man:

$$\text{zweite Näherung: } \lambda = \sigma \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} + \sigma^2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} + \sigma^3 \dots$$

Setzt man auch dieses in (9a), und zwar ins letzte Glied, sowie die erste Näherung von λ in λ^3 von (9a), so findet man durch Ordnen nach Potenzen von σ , zugleich mit einiger goniometrischer Umformung:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \sigma \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} + \sigma^2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\tan \varphi}{\cos \varphi} \\ &\quad - \frac{\sigma^3}{3} \sin^3 \alpha \frac{\tan^2 \varphi}{\cos \varphi} + \frac{\sigma^3}{3} \sin \alpha \cos^3 \alpha \frac{1 + 3 \tan^2 \varphi}{\cos \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Übergehend zur Meridian-Konvergenz $\alpha' - \alpha = \gamma$ haben wir zuerst nach (17) § 55. S. 298 die geschlossene Formel:

$$\cotg \alpha' = \cotg \alpha \cos \sigma - \frac{\sin \sigma \tan \varphi}{\sin \alpha} \quad (11)$$

$$\cotg \alpha' = \cotg \alpha \left(1 - \frac{\sigma^2}{2} \right) - \left(\sigma - \frac{\sigma^3}{6} \right) \frac{\tan \varphi}{\sin \alpha}$$

$$\cotg \alpha' - \cotg \alpha = -\frac{\sigma \tan \varphi}{\sin \alpha} - \frac{\sigma^2}{2} \cotg \alpha + \frac{\sigma^3 \tan \varphi}{6 \sin \alpha} \quad (12)$$

Setzt man nun $\alpha' = \alpha + \gamma$, so hat man nach dem Taylorschen Satz (vgl. (3) § 30. S. 197):

$$\cotg (\alpha + \gamma) = \cotg \alpha - \frac{\gamma}{\sin^2 \alpha} + \frac{\gamma^2 \cos \alpha}{\sin^3 \alpha} - \frac{\gamma^3 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha}{3 \sin^4 \alpha} \quad (13)$$

Nun folgt aus (12) und (13):

$$\frac{\gamma}{\sin \alpha} - \gamma^2 \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\gamma^3 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha}{3 \sin^3 \alpha} = \sigma \tan \varphi + \frac{\sigma^2}{2} \cos \alpha - \frac{\sigma^3}{6} \tan \varphi \quad (14)$$

Diese Gleichung ist wieder wie in den beiden vorhergehenden Fällen, schrittweise nach γ aufzulösen, und da wir soeben zwei solche Auflösungen in genügender Ausführlichkeit vorgeführt haben, könnten wir wohl sofort das Ergebnis anschreiben. Indessen wollen wir diese Gelegenheit benützen, um auch das allgemeine Verfahren der Reihen-Auflösung anzuwenden, welches wir in § 31. durch die Formeln (50), (51), (52) S. 203 angegeben haben. Benützt man die dort angenommenen Bezeichnungen, so hat man:

$$A = \frac{1}{\sin \alpha} \quad , \quad B = -\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \quad , \quad C = \frac{1}{3} \frac{\sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha}{\sin^3 \alpha}$$

$$A' = \tan \varphi \quad , \quad B' = \frac{1}{2} \cos \alpha \quad , \quad C' = -\frac{1}{2} \tan \varphi$$

Dann wird:

$$\alpha = \tan \varphi \sin \alpha \quad , \quad \beta = \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \tan^2 \varphi$$

$$\text{Coefficient } \gamma = -\frac{1}{6} \sin^3 \alpha \tan \varphi (1 + 2 \tan^2 \varphi) + \frac{1}{6} \sin \alpha \cos^2 \alpha \tan \varphi (5 + 6 \tan^2 \varphi)$$

Nun ist (mit Unterscheidung von Coefficient γ und Meridian-Konvergenz γ):

$$\text{Meridian-Konvergenz } \alpha' - \alpha = \gamma = \alpha \sigma + \beta \sigma^2 + \gamma \sigma^3,$$

und wenn man alles einsetzt, erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= \sigma \sin \alpha \tan \varphi + \frac{\sigma^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha (1 + 2 \tan^2 \varphi) \\ &\quad - \frac{\sigma^3}{6} \sin^3 \alpha \tan \varphi (1 + 2 \tan^2 \varphi) + \frac{\sigma^3}{6} \sin \alpha \cos^2 \alpha \tan \varphi (5 + 6 \tan^2 \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Die Gleichungen (8), (10), (15) enthalten die Lösung unserer Aufgabe, wie wir uns zunächst vorgesetzt haben, bis zur dritten Ordnung σ^3 .

Man kann diese Formeln auch durch Benützung der rechtwinkligen Coordinaten x, y , d. h. durch Entwicklung der Formeln (24)–(28) § 55. S. 299–300 finden, worauf wir jedoch uns hier nicht einlassen wollen, mit der Bemerkung, dass eine solche Entwicklung durch Vermittlung von x und y in des Verfassers „Grundzügen der astronomischen Zeit- und Orts-Bestimmung, Berlin 1885, § 23. und § 24.“ gegeben ist, indem die ganz analoge Bestimmung der Breite und des Azimutes aus Polarstern-Beobachtungen dort so behandelt ist.

Endlich die eleganteste Herleitung unserer Formeln (8), (10), (15) durch den *Maclaurinschen* Satz, werden wir in unserem nächsten § 60. kennen lernen, indem wir dann mit dem *Maclaurinschen* Satze die Entwicklung bis zur 6. Ordnung ausdehnen werden.

Inzwischen wollen wir jedoch unsere Ergebnis-Formeln nochmals schreiben, mit Einführung folgender Abkürzungen:

$$\sigma \sin \alpha = n \quad \sigma \cos \alpha = m \quad \tan \varphi = t \quad (16)$$

Ausserdem setzen wir die nötigen ρ zu, und haben dann aus (8), (10), (15):

$$\varphi' - \varphi = m - \frac{n^2}{2\rho} t - \frac{n^2 m}{6\rho^2} (1 + 3 t^2) \quad (17)$$

$$\lambda \cos \varphi = n + \frac{n m}{\rho} t - \frac{n^3}{3\rho^2} t^2 + \frac{n m^2}{3\rho^2} (1 + 3 t^2) \quad (18)$$

$$(\alpha' - \alpha) = n t + \frac{n m}{2\rho} (1 + 2 t^2) - \frac{n^3}{6\rho^2} t (1 + 2 t^2) + \frac{n m^2}{6\rho^2} t (5 + 6 t^2) \quad (19)$$

Hiebei sind die konstanten Coefficienten-Logarithmen:

$$\log \frac{1}{\rho} = 4.685\,575 \quad , \quad \log \frac{1}{2\rho} = 4.384\,545 \quad , \quad \log \frac{1}{3\rho^2} = 8.89403 \quad , \quad \log \frac{1}{6\rho^2} = 8.59300 \quad (20)$$

Wir wollen hiernach unser kleines Normal-Beispiel berechnen, nämlich:

$$\begin{aligned} \text{Gegeben: } \varphi &= 49^\circ 30' 0'' \quad \alpha = 32^\circ 21' 1,291'' \quad \sigma = 1^\circ 11' 19,4819'' \\ &= 4279,4819'' \end{aligned}$$

Für die von t abhängigen Coefficienten kann man die Hilfstafel unseres Anhangs Seite [34]—[37] benützen, oder wenigstens zur Versicherung zuziehen.

In unserem Falle mit $\varphi = 49^\circ 30'$ hat man:

$$\log(1 + 2t^2) = 0.573\,078 \quad \log(1 + 3t^2) = 0.70865 \quad \log(5 + 6t^2) = 1.12141$$

Im übrigen giebt die Ausrechnung nach den Formeln (17), (18), (19):

Breite	Länge	Azimet
+ 3615,271"	+ 3525,963"	+ 2681,163"
— 14,883	+ 72,359	+ 75,091
— 0,380	— 0,199	— 0,206
	+ 1,846	+ 1,816
$\varphi' - \varphi = 3600,008''$	$\lambda = 3599,969''$	$\alpha' - \alpha = 2757,864''$
soll 3600,000"	soll 3600,000"	soll 2757,894"
Fehler + 0,008"	Fehler — 0,031"	Fehler — 0,030" (21)

Diese Fehler sind den Formeln (17), (18), (19) zuzuschreiben, indem dieselben mit der 3. Ordnung abbrechen, während die Glieder 4. Ordnung noch merklich sind.

§ 60. Reihen-Entwicklung bis σ^6 nach dem *Maclaurin*schen Satz.

(Bezeichnungen nach Fig. 1. S. 313.)

Wenn man die im vorigen § 59. entwickelten Reihen auf weitere Glieder ausdehnen will, so kann man auf dem dort betretenen Wege fortfahren, allein wir wollen das nun nicht thun, sondern ein anderes Verfahren anwenden, welches zunächst an und für sich mehr geeignet ist, höhere Glieder, etwa bis zur Ordnung σ^6 zu liefern, welches aber auch bei diesen sphärischen Entwicklungen zugleich eine lehrreiche Vorbereitung für unsere späteren entsprechenden *sphäroidischen* Entwicklungen bietet.

Wir stützen uns auf den *Maclaurin*schen Satz, welchen wir schon in der mathematischen Einleitung (4) § 30. S. 197, erwähnt haben. Die Anwendung dieses Satzes auf unseren Fall giebt:

$$\varphi' - \varphi = \frac{d\varphi}{d\sigma} \sigma + \frac{d^2\varphi}{d\sigma^2} \frac{\sigma^2}{2} + \frac{d^3\varphi}{d\sigma^3} \frac{\sigma^3}{6} + \frac{d^4\varphi}{d\sigma^4} \frac{\sigma^4}{24} + \frac{d^5\varphi}{d\sigma^5} \frac{\sigma^5}{120} + \frac{d^6\varphi}{d\sigma^6} \frac{\sigma^6}{720} \quad (1)$$

$$\lambda = \frac{d\lambda}{d\sigma} \sigma + \frac{d^2\lambda}{d\sigma^2} \frac{\sigma^2}{2} + \frac{d^3\lambda}{d\sigma^3} \frac{\sigma^3}{6} + \frac{d^4\lambda}{d\sigma^4} \frac{\sigma^4}{24} + \frac{d^5\lambda}{d\sigma^5} \frac{\sigma^5}{120} + \frac{d^6\lambda}{d\sigma^6} \frac{\sigma^6}{720} \quad (2)$$

$$\alpha' - \alpha = \frac{d\alpha}{d\sigma} \sigma + \frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} \frac{\sigma^2}{2} + \frac{d^3\alpha}{d\sigma^3} \frac{\sigma^3}{6} + \frac{d^4\alpha}{d\sigma^4} \frac{\sigma^4}{24} + \frac{d^5\alpha}{d\sigma^5} \frac{\sigma^5}{120} + \frac{d^6\alpha}{d\sigma^6} \frac{\sigma^6}{720} \quad (3)$$

Dabei soll das Zeichen $\left[\right]$ bedeuten, dass nach Ausführung der Differentiierungen in den erhaltenen Differential-Quotienten $\frac{d\varphi}{d\sigma}$, $\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}$ u. s. w. der Wert $\varphi' - \varphi = 0$ zu setzen ist, d. h. dass die Differential-Quotienten für den *Ausgangs*-Wert φ und ebenso für den *Ausgangs*-Wert α auszurechnen sind.

Die ersten Differential-Quotienten erhalten wir aus (1), (2), (3) § 56. S. 302, nämlich in der für uns geeigneten Form:

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \cos \alpha \quad (4)$$

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} \quad (5)$$

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = \sin \alpha \tan \varphi \quad (6)$$

Nun leiten wir (4) weiter ab, und finden, mit Zuziehung von (6):

$$\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2} = -\sin \alpha \frac{d\alpha}{d\sigma} = -\sin^2 \alpha \tan \varphi \quad (7)$$

Dieses nochmals abgeleitet giebt:

$$\frac{d^3\varphi}{d\sigma^3} = -2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{d\alpha}{d\sigma} \tan \varphi - \sin^2 \alpha (1 + \tan^2 \varphi) \frac{d\varphi}{d\sigma}$$

also mit Rücksicht auf (6) und (4):

$$\frac{d^3\varphi}{d\sigma^3} = -2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \tan^2 \varphi - \sin^2 \alpha \cos \alpha (1 + \tan^2 \varphi)$$

$$\frac{d^3\varphi}{d\sigma^3} = -\sin^2 \alpha \cos \alpha (1 + 3 \tan^2 \varphi) \quad (8)$$

Dieses wird abermals differentiiert:

$$\begin{aligned} \frac{d^4\varphi}{d\sigma^4} &= (-2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha) \sin \alpha \tan \varphi (1 + 3 \tan^2 \varphi) \\ &\quad - \sin^2 \alpha \cos \alpha 6 \tan \varphi (1 + \tan^2 \varphi) \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\frac{d^4\varphi}{d\sigma^4} = \sin^4 \alpha \tan \varphi (1 + 3 \tan^2 \varphi) - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \tan \varphi (2 + 3 \tan^2 \varphi) \quad (9)$$

In dieser Weise kann man fortfahren, es empfiehlt sich dabei eine Schreib-
abkürzung zu machen, nämlich:

$$\tan \varphi = t \quad (10)$$

und damit erhält man:

$$\frac{d^5\varphi}{d\sigma^5} = \sin^4 \alpha \cos \alpha (1 + 30 t^2 + 45 t^4) - 4 \sin^2 \alpha \cos^3 \alpha (2 + 15 t^2 + 15 t^4) \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^6\varphi}{d\sigma^6} &= -\sin^6 \alpha t (1 + 30 t^2 + 45 t^4) + 4 \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha t (22 + 135 t^2 + 135 t^4) \\ &\quad - 8 \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha t (17 + 60 t^2 + 45 t^4) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Zu den Ableitungen von λ übergehend, haben wir nach (5):

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} \quad (13)$$

$$\frac{d^2\lambda}{d\sigma^2} = \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} \frac{d\alpha}{d\sigma} + \sin \alpha \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{d\sigma} \quad (14)$$

also mit Berücksichtigung von (4) und (6):

$$\frac{d^2\lambda}{d\sigma^2} = \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\cos^2 \varphi} \sin \varphi + \sin \alpha \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \cos \alpha$$

$$\frac{d^2\lambda}{d\sigma^2} = 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\tan \varphi}{\cos \varphi} = 2 \sin \alpha \cos \alpha \tan \varphi \sec \varphi \quad (15)$$

Da man bald bemerkt, dass der Nenner $\cos \varphi$, oder der Faktor $\sec \varphi$ sich in allen Gliedern der Entwicklung von λ einstellt, und dass die Potenzen von $\tan \varphi$ sich wie im vorigen Fall finden, schreibt man auch die Ableitung von $\sec \varphi$ stets in der Form $t \sec \varphi$, und damit bekommt man (überall $\tan \varphi = t$ gesetzt) weiter:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \lambda}{d \sigma^3} &= 2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha t t \sec \varphi \\ &\quad + 2 \sin \alpha \cos \alpha (1 + t^2) \sec \varphi \cos \alpha \\ &\quad + 2 \sin \alpha \cos \alpha t t \sec \varphi \cos \alpha \\ \frac{d^3 \lambda}{d \sigma^3} &= -\sin^3 \alpha \sec \varphi (2 t^2) + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha \sec \varphi (1 + 3 t^2) \end{aligned} \quad (16)$$

Auf diesem Wege findet man auch:

$$\frac{d^4 \lambda}{d \sigma^4} = 8 \sec \varphi t \left\{ -\sin^3 \alpha \cos \alpha (1 + 3 t^2) + \sin \alpha \cos^3 \alpha (2 + 3 t^2) \right\} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^5 \lambda}{d \sigma^5} &= 8 \sec \varphi \left\{ \sin^5 \alpha (t^2 + 3 t^4) - \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha (1 + 20 t^2 + 30 t^4) \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha \cos^4 \alpha (2 + 15 t^2 + 15 t^4) \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^6 \lambda}{d \sigma^6} &= 16 \sec \varphi t \left\{ \sin^5 \alpha \cos \alpha (2 + 30 t^2 + 45 t^4) - \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha (26 + 150 t^2 + 150 t^4) \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha \cos^5 \alpha (17 + 60 t^2 + 45 t^4) \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

In ähnlicher Weise erhält man auch die Ableitungen von α nach σ :

$$\frac{d \alpha}{d \sigma} = \sin \alpha t \quad (20)$$

$$\frac{d^2 \alpha}{d \sigma^2} = \sin \alpha \cos \alpha (1 + 2 t^2) \quad (21)$$

$$\frac{d^3 \alpha}{d \sigma^3} = -\sin^3 \alpha t (1 + 2 t^2) + \sin \alpha \cos^2 \alpha t (5 + 6 t^2) \quad (22)$$

$$\frac{d^4 \alpha}{d \sigma^4} = -\sin^3 \alpha \cos \alpha (1 + 20 t^2 + 24 t^4) + \sin \alpha \cos^3 \alpha (5 + 28 t^2 + 24 t^4) \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^5 \alpha}{d \sigma^5} &= \sin^5 \alpha t (1 + 20 t^2 + 24 t^4) - 2 \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha t (29 + 140 t^2 + 120 t^4) \\ &\quad + \sin \alpha \cos^4 \alpha t (61 + 180 t^2 + 120 t^4) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^6 \alpha}{d \sigma^6} &= \sin^5 \alpha \cos \alpha (1 + 182 t^2 + 840 t^4 + 720 t^6) \\ &\quad - \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha (58 + 1316 t^2 + 3600 t^4 + 2400 t^6) \\ &\quad + \sin \alpha \cos^5 \alpha (61 + 662 t^2 + 1320 t^4 + 720 t^6) \end{aligned} \quad (25)$$

Nun können wir die Formeln (1), (2), (3) zusammensetzen; wir wollen dieses jedoch hier nur bis zur 4. Ordnung thun, wir setzen dabei:

$$\sigma \sin \alpha = n \quad \sigma \cos \alpha = m \quad \tan \varphi = t \quad (26)$$

Wenn wir zugleich überall die nötigen φ zusetzen, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \varphi' - \varphi &= m - \frac{1}{2 \varrho} n^2 t \\ &\quad - \frac{1}{6 \varrho^2} n^2 m (1 + 3 t^2) \\ &\quad + \frac{1}{24 \varrho^3} n^4 t (1 + 3 t^2) - \frac{1}{6 \varrho^3} n^2 m^2 t (2 + 3 t^2) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda \cos \varphi &= n + \frac{1}{\rho} n m t \\ &\quad - \frac{1}{3 \rho^2} n^3 t^2 + \frac{1}{3 \rho^2} n m^2 (1 + 3 t^2) \\ &\quad - \frac{1}{3 \rho^3} n^3 m t (1 + 3 t^2) + \frac{1}{3 \rho^3} n m^3 t (2 + 3 t^2) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= n t + \frac{1}{2 \rho} n m (1 + 2 t^2) \\ &\quad - \frac{1}{6 \rho^2} n^3 t (1 + 2 t^2) + \frac{1}{6 \rho^2} n m^2 t (5 + 6 t^2) \\ &\quad - \frac{1}{24 \rho^3} n^3 m (1 + 20 t^2 + 24 t^4) \\ &\quad + \frac{1}{24 \rho^3} n m^3 (5 + 28 t^2 + 24 t^4) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Wenn das Bedürfnis eintritt, kann man die Glieder 5. und 6. Ordnung mit Benützung der Ableitungen (11), (12), dann (18), (19) und (24), (25) jederzeit bilden. Die konstanten Coefficienten-Logarithmen für die Formeln (27), (28), (29) sind zum Teil schon bei (20) § 59. S. 315 angegeben; die übrigen (zur 4. Ordnung) sind:

$$\log \frac{1}{3 \rho^3} = 3.579\,603-20, \quad \log \frac{1}{6 \rho^3} = 3.278\,573-20, \quad \log \frac{1}{24 \rho^3} = 2.676\,513-20 \quad (30)$$

Wir haben die Glieder 4. Ordnung in den Formeln (27), (28), (29) auch für unser kleines Normal-Beispiel ausgerechnet, und gefunden:

für $\varphi' - \varphi$	für λ	für $\alpha' - \alpha$
+ 0,0008''	- 0,0152''	- 0,0152''
- 0,0093	+ 0,0452	+ 0,0455
- 0,0085''	+ 0,0300''	+ 0,0303''

Dieses sind gerade die Beträge, welche in (21) § 59. S. 316 noch gefehlt haben; und wir wissen nun, dass für jenes Beispiel mit der Mittelbreite 50° , mit $\varphi' - \varphi = 1^\circ$ und $\lambda = 1^\circ$, die Reihen-Entwicklung bis zur 4. Ordnung ausreicht, um überall Genauigkeit auf 0,001'' zu haben.

Wir könnten nun weiter untersuchen, wie viel die Glieder 5. Ordnung in gewissen Fällen ausmachen; da wir aber über die Beträge, welche Glieder 5. Ordnung bei solchen Entwicklungen etwa erreichen, bereits in anderer Weise in § 58. (22), (23), (26) S. 312 uns Klarheit verschafft haben, wollen wir die Glieder 5. Ordnung unserer neuen Formeln übergehen, dagegen noch für *einen* Fall die Glieder 6. Ordnung in Betracht nehmen, nämlich für die Azimut-Berechnung, bei welcher nach (3) und (25) das Glied 6. Ordnung folgendes ist:

$$\begin{aligned} A \alpha_6 &= \frac{\sigma^6}{720 \rho^5} \left\{ \sin^5 \alpha \cos \alpha (1 + 182 t^2 + 840 t^4 + 720 t^6) \right. \\ &\quad \left. - \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha (58 + 1316 t^2 + 3600 t^4 + 2400 t^6) \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha \cos^5 \alpha (61 + 662 t^2 + 1320 t^4 + 720 t^6) \right\} \end{aligned}$$

Um einen einfachen Fall zu haben, setzen wir die Breite $\varphi = 45^\circ$, also $t = \tan \varphi = 1$, und damit wird:

$$\Delta \alpha_0 = \frac{\sigma^6}{720 \rho^5} \left\{ 1743 \sin^5 \alpha \cos \alpha - 7374 \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha + 2763 \sin \alpha \cos^5 \alpha \right\}$$

Durch einige Versuche findet man, dass diese Funktion zwischen 0° und 90° zwei Maxima, etwa bei $\alpha = 16^\circ$ und $\alpha = 77^\circ$, und ein Minimum bei $\alpha = 47^\circ$ hat; das absolute Maximum ist bei 16° , und giebt:

$$(\Delta \alpha_0)_{\max} = \frac{\sigma^6}{720 \rho^5} 491$$

Setzt man $\sigma = 2^\circ = 7200''$, so erhält man:

$$(\Delta \alpha_0)_{\max} = 0,00025''$$

Dagegen für $\sigma = 3^\circ$ erhält man schon $0,0029''$ und für $\sigma = 4^\circ$ erhält man $0,0162''$.

Aus all diesem ziehen wir folgende Schlüsse:

Die Glieder 6. Ordnung werden bei Ausdehnung von mehreren Graden bereits merkbar, namentlich in höheren Breiten, wo die Glieder mit t^2 , t^4 , t^6 sehr rasch wachsen. Da nun schon die Glieder 5. Ordnung ungemein beschwerlich sind, empfehlen sich sphärische Reihen-Entwicklungen höchstens bis zur 4. Ordnung einschliesslich, z. B. die *Gauss'schen Mittelbreiten-Formeln* (16)–(19) § 57. S. 306, welche äusserlich nur Glieder bis zur dritten Ordnung enthalten, aber wegen des *Mittel-Arguments* noch um einen Grad genauer, d. h. auf Glieder 4. Ordnung einschliesslich genau sind.

Hat man Fälle mit Ausdehnung etwa über 2° , für welche nach S. 312 die Glieder 5. Ordnung bereits merkbar sind, so thut man besser, nach den geschlossenen Formeln der sphärischen Trigonometrie mit 8–10stelligen Logarithmen zu rechnen, als die viel grössere Mühe der Glieder 5. oder gar 6. Ordnung aufzuwenden.

Von diesen Überlegungen werden wir auch später bei den *sphäroidischen* Berechnungen Gebrauch machen.

§ 61. Zweite Herleitung der Mittelbreiten-Formeln von § 57.

Wenn wir hier noch eine *zweite* Herleitung der in § 57. aus den *Gauss'schen* Gleichungen der sphärischen Trigonometrie erhaltenen Mittelbreiten-Formeln vornehmen, so geschieht es theils in dem Sinne einer Versicherung der ersten Herleitung, noch viel mehr aber zum Zweck der Vorbereitung entsprechender *sphäroidischer* Formeln, mit welchen wir uns später beschäftigen werden.

In Fig. 1. (S. 321) betrachten wir 3 Punkte mit den Breiten φ_1 , φ , φ_2 , wobei φ der Mittelwert ist, d. h.:

$$\varphi_2 - \varphi = \varphi - \varphi_1, \quad \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi \quad (1)$$

Da die Breiten-Unterschiede $\varphi - \varphi_1$ und $\varphi_2 - \varphi$ hiernach *gleich* sein sollen, so werden für einen Bogen, welcher die drei Parallelen zu den Breiten φ_1 , φ , φ_2 schneidet, die Abstände σ_1 und σ_2 , deren Summe $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$ sei, nicht gleich, aber auch nicht sehr ungleich werden, und ähnlich verhält es sich mit den zugehörigen Längen-Unterschieden λ_1 und λ_2 , deren Summe $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$ sei.

Die Azimute, welche der Bogen in den Breiten φ_1 , φ und φ_2 hat, seien bzw. α_1 , α_0 und α_2 , und es werden dabei ähnliche Verhältnisse stattfinden, wie bei den Längen-Unterschieden, d. h. es werden $\alpha_0 - \alpha_1$ und $\alpha_2 - \alpha_0$ nicht sehr verschieden sein; das Mittel aus α_1 und α_2 sei mit α bezeichnet, d. h.:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \alpha \quad (2)$$

Dieses Mittel wird nicht gleich α_0 , aber auch nicht sehr viel von α_0 verschieden sein.

Eine frühere Abkürzung sei hier wieder benutzt, nämlich:

$$\tan \varphi = t \quad (3)$$

und nun wenden wir die Formel für den Breiten-Unterschied (8) § 59. S. 313 auf unsern Fall zweifach an, und erhalten:

$$\varphi_2 - \varphi = \sigma_2 \cos \alpha_0 - \frac{\sigma_2^2}{2} \sin^2 \alpha_0 t - \frac{\sigma_2^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3t^2) \quad (4)$$

$$\varphi_1 - \psi = -r_1 \cos \alpha_0 - \frac{r_1^2}{2} \sin^2 \alpha_0 t + \frac{r_1^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3t^2) \quad (5)$$

Diese zwei Gleichungen geben subtrahiert:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (\sigma_2 + \sigma_1) \cos \alpha_0 - \frac{\sigma_2^3 - \sigma_1^3}{2} \sin^2 \alpha_0 t - \frac{\sigma_2^3 + \sigma_1^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3t^2) \quad (6)$$

Ferner giebt wegen der Gleichheit der Breiten-Unterschiede nach (1) die Addition von (4) und (5):

$$0 = (\sigma_2 - \sigma_1) \cos \alpha_0 - \frac{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}{2} \sin^2 \alpha_0 t - \frac{\sigma_2^3 - \sigma_1^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3t^2) \quad (7)$$

Dieses ist eine Gleichung zur Bestimmung der Differenz $\sigma_2 - \sigma_1$, und da man sofort sieht, dass diese Differenz von der Ordnung σ^2 ist, kann man in (7) das letzte Glied weglassen, und im zweiten Gliede $\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2$ setzen, so dass man damit aus (7) erhält:

$$v_2 - v_1 = \frac{v^2 \sin^2 \alpha_0}{4 \cos \alpha_0} t \quad (8)$$

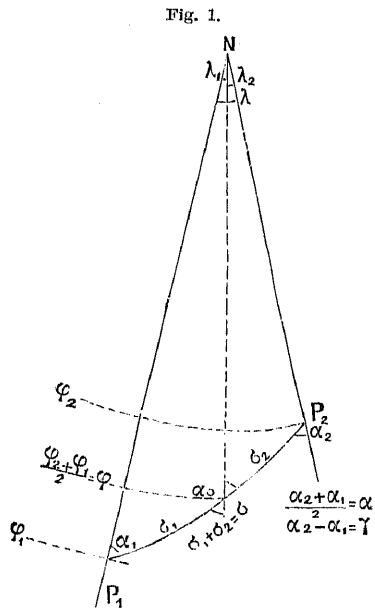
Wenn man diese Gleichung mit $\sigma_2 + \sigma_1 = \sigma$ multipliziert, so erhält man auch die Quadrat-Differenz:

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{v^3 \sin^2 \alpha_0}{4 \cos \alpha_0} t \quad (9)$$

Dieses (9) setzt man in (6), zugleich darf man dort im letzten Gliede $\sigma_2^3 = \sigma_1^3$ setzen, und dadurch erhält man:

$$q_2 - q_1 = r \cos \alpha_0 - \frac{r^3 \sin^4 \alpha_0}{8 \cos \alpha_0} t^2 - \frac{r^3 \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0}{24} (1 + 3t^2) \quad (10)$$

Diese Gleichung müssen wir zunächst so stehen lassen, und nun mit den Azimuten beginnen. Hierzu haben wir in (15) § 59. S. 315 die nötige Gleichung, welche auf unseren Fall zweifach angewendet giebt:



$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_0 = \sigma_2 \sin \alpha_0 t + \frac{\sigma_2^2}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2t^2) - \frac{\sigma_2^3}{6} \sin^3 \alpha_0 t (1 + 2t^2) \\ + \frac{\sigma_2^3}{6} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 t (5 + 6t^2) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_0 = -\sigma_1 \sin \alpha_0 t + \frac{\sigma_1^2}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2t^2) + \frac{\sigma_1^3}{6} \sin^3 \alpha_0 t (1 + 2t^2) \\ - \frac{\sigma_1^3}{6} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 t (5 + 6t^2) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Auch diese Gleichungen (11) und (12) werden subtrahiert und addiert; zuerst giebt die Subtraktion:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 = (\sigma_2 + \sigma_1) \sin \alpha_0 t + \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2t^2) \\ - \frac{\sigma_2^3 + \sigma_1^3}{6} \sin^3 \alpha_0 t (1 + 2t^2) + \frac{\sigma_2^3 + \sigma_1^3}{6} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 t (5 + 6t^2) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Bei der Addition von (11) und (12) lassen wir die Differenzen dritter Ordnung $\sigma_2^3 - \sigma_1^3$ ganz fort, da dieselben auf Glieder von der Ordnung σ^4 führen würden; indem wir dann auch das Mittel $\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = \alpha$ setzen, wie in (2) angenommen wurde, erhalten wir aus (11) und (12) durch Addition:

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} - \alpha_0 = \alpha - \alpha_0 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin \alpha_0 t + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}{4} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2t^2)$$

und setzt man hier noch die Differenz $\sigma_2 - \sigma_1$ nach (8) ein, so erhält man:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{\sigma^2}{8} \frac{\sin^3 \alpha_0}{\cos \alpha_0} t^2 + \frac{\sigma^2}{8} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2t^2) \quad (14)$$

Hieraus bilden wir zu verschiedenem Gebrauche:

$$\sin \alpha_0 = \sin \alpha - \frac{\sigma^2}{8} \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} t^2 - \frac{\sigma^2}{8} \sin \alpha \cos^2 \alpha (1 + 2t^2) \quad (15)$$

$$\cos \alpha_0 = \cos \alpha + \frac{\sigma^2}{8} \frac{\sin^4 \alpha}{\cos \alpha} t^2 + \frac{\sigma^2}{8} \sin^2 \alpha \cos \alpha (1 + 2t^2) \quad (16)$$

In diesen (15) und (16) ist in den Gliedern mit σ^2 schlechthin α statt des aus (14) sich ergebenden α_0 geschrieben, weil nach (14) sich α und α_0 selbst nur um Glieder von der Ordnung σ^2 unterscheiden.

Nun kehren wir wieder zu der Gleichung (10) zurück, setzen im ersten Gliede daselbst (16) ein, und erhalten, da die quadratischen Glieder sich heben:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sigma \cos \alpha + \frac{\sigma^3}{24} \sin^2 \alpha \cos \alpha (2 + 3t^2) \quad (17)$$

Auch die Gleichung (13) lässt sich nun weiter führen; wir schreiben diese Gleichung zunächst von neuem mit Zusammenziehung der σ_2 und σ_1 :

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha_0 t + \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2t^2) \\ - \frac{\sigma_2^3}{24} \sin^3 \alpha_0 t (1 + 2t^2) + \frac{\sigma^3}{24} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 t (5 + 6t^2) \end{aligned}$$

Hier hat man zuerst $\sigma_2^2 - \sigma_1^2$ nach (9) einzusetzen, wodurch man erhält, indem man zugleich in den Gliedern mit σ^3 statt α_0 den Wert α schreibt:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha_0 t + \frac{\sigma^3}{8} \sin^3 \alpha t (1 + 2t^2) \\ - \frac{\sigma^3}{24} \sin^3 \alpha t (1 + 2t^2) + \frac{\sigma^3}{24} \sin \alpha \cos^2 \alpha t (5 + 6t^2)$$

Auch hat man noch im ersten Gliede $\sin \alpha_0$ durch $\sin \alpha$ zu ersetzen, was durch (15) geschieht; und wenn man zusammenfasst und ordnet, so erhält man:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha t + \frac{\sigma^3}{24} \sin \alpha t \left(\sin^2 \alpha (2 + t^2) + 2 \cos^2 \alpha \right) \quad (18)$$

Nun bleibt als dritte Aufgabe nur noch die Bestimmung des Längen-Unterschiedes λ . Hiezu haben wir nach (10) § 59. S. 314 in zweifacher Anwendung:

$$\lambda_2 \cos \varphi = \sigma_2 \sin \alpha_0 + \sigma_2^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 t - \frac{\sigma_2^3}{3} \sin^3 \alpha_0 t^2 + \frac{\sigma_2^3}{3} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 + 3t^2) \\ - \lambda_1 \cos \varphi = - \sigma_1 \sin \alpha_0 + \sigma_1^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 t + \frac{\sigma_1^3}{3} \sin^3 \alpha_0 t^2 - \frac{\sigma_1^3}{3} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 + 3t^2)$$

Durch Subtraktion bekommt man, sofort die Glieder dritter Ordnung zusammennehmend, und in diesen Gliedern α statt α_0 schreibend:

$$\lambda \cos \varphi = \sigma \sin \alpha_0 + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \sin \alpha \cos \alpha t - \frac{\sigma^3}{12} \sin^3 \alpha t^2 + \frac{\sigma^3}{12} \sin \alpha \cos^2 \alpha (1 + 3t^2)$$

Wenn man wieder, wie in den beiden vorigen Fällen, $\sigma_2^2 - \sigma_1^2$ nach (9) und $\sin \alpha_0$ nach (15) einsetzt, so erhält man:

$$\lambda \cos \varphi = \sigma \sin \alpha + \frac{\sigma^3}{24} \sin \alpha (\sin^2 \alpha t^2 - \cos^2 \alpha) \quad (19)$$

Die Differenz $\lambda_2 - \lambda_1$ haben wir hiebei nicht gebraucht; der Gleichförmigkeit wegen wollen wir jedoch diese Differenz auch angeben, nämlich:

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \sin \varphi = \frac{\sigma^2 \sin^3 \alpha}{4 \cos \alpha} t + \frac{\sigma^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha t \quad (20)$$

Unsere gestellte Aufgabe ist in den Gleichungen (17), (18), (19) gelöst, die wir in etwas anderer Form nun zusammenstellen:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sigma \cos \alpha \left(1 + \frac{1}{24} (2 \sigma^2 \sin^2 \alpha + 3 \sigma^2 \sin^2 \alpha \tan^2 \varphi) \right) \quad (21)$$

$$\lambda = \frac{\sigma \sin \alpha}{\cos \varphi} \left(1 + \frac{1}{24} (\sigma^2 \sin^2 \alpha \tan^2 \varphi - \sigma^2 \cos^2 \alpha) \right) \quad (22)$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha \tan \varphi \left(1 + \frac{1}{24} (2 \sigma^2 + \sigma^2 \sin^2 \alpha \tan^2 \varphi) \right) \quad (23)$$

Hier kann man in den Korrekturen-Gliedern setzen:

$$\sigma \cos \alpha = \beta \quad \sigma \sin \alpha = \lambda \cos \varphi \quad \sigma \sin \alpha \tan \varphi = \gamma \quad (24)$$

wobei β ein Näherungs-Wert für $\varphi_2 - \varphi_1$ und γ ein Näherungs-Wert für $\alpha_2 - \alpha_1$ sein soll. Ausserdem bestehen die Näherungs-Gleichungen

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi, \quad \sigma^2 + \gamma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \quad (25)$$

Wenn man dieses in (21) und (22) berücksichtigt und die Gleichungen umstellt, dann (22) und (23) dividiert, so erhält man:

$$\sigma \cos \alpha = (\varphi_2 - \varphi_1) \left(1 - \frac{1}{24} (3 \lambda^2 - \lambda^2 \cos^2 \varphi) \right) \quad (26)$$

$$\sigma \sin \alpha = \lambda \cos \varphi \left(1 - \frac{1}{24} (\lambda^2 \sin^2 \varphi - \beta^2) \right) \quad (27)$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{1}{24} (3 \beta^2 + 2 \lambda^2 \cos^2 \varphi) \right) \quad (28)$$

Dieses sind dieselben Gleichungen wie (17), (16), (18) § 57. S. 300; und es sind also jene Gleichungen hiemit zum zweitenmale hergeleitet.

Kapitel VI.

Sphäroidische Geodäsie mit Normalschnitten und Krümmungs-Halbmessern.

§ 62. Normalschnitte des Sphäroids.

Wenn man die Erdoberfläche näherungsweise als eine *Kugel* betrachtet, so kann man die Formeln und Entwicklungen, welche die sphärische Trigonometrie bietet, auf Messungen an der Erdoberfläche *unmittelbar* anwenden mit der Beschränkung auf solche Ausdehnung und auf solche Berechnungsarten, bei welchen die Ungleichheit der Erdkrümmungen vernachlässigt werden kann.

Dieses ist der Fall bei den gewöhnlichen Dreiecks-Berechnungen und bei Coordinaten-Berechnungen, bei welchen nur Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ vorkommen (§ 39.—43. und § 46.—52.), denn hierbei braucht man einen Erdhalbmesser r nur auf wenige Stellen genau; und man hat, auch ohne nähere mathematische Begründung, die Überzeugung, dass man damit der Wahrheit erheblich näher kommt, als mit einer ebenen Berechnung (welche $r = \infty$ entspräche).

Wenn aber die sphärischen Entwicklungen auf Glieder *erster* Ordnung, d. h. $\frac{1}{r}$, führen, so wird schon bei ganz mässigen Ausdehnungen, die Annahme einer kugelförmigen Erdoberfläche ohne nähere Untersuchung des einzelnen Falles unbrauchbar, weil die verschiedenen Erdkrümmungen nach verschiedenen Seiten verschieden wirken.

Man kann aber immer noch sphärische Entwicklungen mit Vortheil anwenden, wenn man durch Untersuchung der Normalschnitte und der Krümmungs-Verhältnisse für jeden einzelnen Fall im stande ist, sphärische Hilfsdreiecke, bzw. räumliche Dreikante aufzufinden, und dadurch für die sphärische Trigonometrie einen Boden zu finden, der ihr auf dem Sphäroid (Umdrehungs-Ellipsoid) als solchem fehlt.

Wir wollen nun im Anschluss an Fig. 1. die verschiedenen Normalen und die Normalschnitte des Umdrehungs-Ellipsoids betrachten:

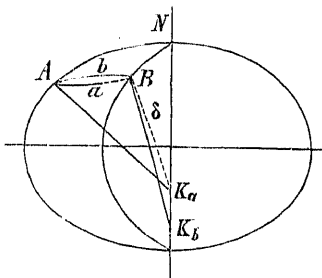
Es seien in Fig. 1. A und B zwei Punkte des Umdrehungs-Ellipsoids, unter verschiedenen Breiten; KA_a sei die Flächen-Normale im Punkte A , und BK_b die Flächen-Normale im Punkte B ; hiebei bemerkt man zuerst, dass die Punkte, in welchen die Umdrehungs-axe von diesen Normalen getroffen wird, d. h. K_a und K_b , *nicht* zusammenfallen, abgesehen von dem besonderen Falle, dass A und B auf gleicher Breite liegen.

Ebenso wie man im allgemeinen *zwei* Axen-Schnittpunkte K_a und K_b hat, bestehen auch *zwei* Normalschnitt-Ebenen, welche beide durch die Punkte A und B gehen.

Dieses verhält sich genauer so:

Die Normalschnitt-Ebene im Punkte A ist diejenige Ebene, welche durch die Normale AK_a und durch den Punkt B geht, diese Ebene schneide die Ellipsoidfläche in einem Bogen AaB . Andererseits haben wir als Normalschnitt-Ebene im Punkte B diejenige Ebene, welche durch die Normale BK_b und durch den Punkt A geht und die Ellipsoidfläche in dem Bogen BbA schneidet.

Fig 1.
Normalen AK_a und BK_b .



Es giebt mehrere besondere Fälle, in welchen die beiden Normalschnitte zwischen zwei Punkten zusammenfallen:

Erstens, wenn ein *Pol* der Erde als erster Punkt A gilt, und irgend ein anderer Erdpunkt als zweiter Punkt B , so ist der Meridian des Punktes B sowohl Normalschnitt von B nach A , als auch Normalschnitt von A nach B . Da jedoch die Erdpole nicht zugänglich sind, hat dieser Fall für uns keine praktische Bedeutung.

Zweitens, für irgend zwei Punkte, die auf demselben Meridian liegen, ist dieser Meridian auch Normalschnitt in zweifachem Sinne.

Drittens, wenn zwei Punkte unter gleichen Breiten φ liegen, so fallen auch die beiden Normalschnitt-Ebenen zusammen, weil dann die beiden Ax-Schnitte K_a und K_b der Normalen von A und von B nach Fig. 1, auf der Erdaxe identisch werden.

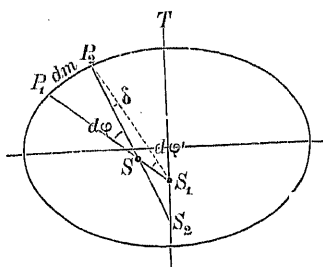
Von besonderem Interesse für unsere rechtwinkligen sphärischen Coordinaten ist auch noch der dem Falle gleicher Breiten φ verwandte Fall, dass ein Bogen AB *rechtwinklig* auf dem Meridiane von A (oder von B) sei; in diesem Falle werden die Breiten von A und B zwar nicht gleich, aber doch im Vergleich mit der Ausdehnung des Bogens AB selbst *nahezu gleich* sein, und wir werden deshalb, für die Ausdehnung unserer gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten-Systeme, die beiden Normalschnitte, welche die Ordinate y enthalten, als hinreichend zusammenfallend annehmen.

§ 63. Der verkürzte Breiten-Unterschied.

Von allen Wirkungen der Elliptizität der Erdoberfläche ist die bedeutendste, und niemals zu vernachlässigende, wenn überhaupt von der Elliptizität die Rede ist, die Abweichung zweier aufeinander folgender Normalen in einem Meridian, wodurch der Winkel δ entsteht, den wir schon im vorigen § 62. bei der obenstehenden Fig. 1. betrachtet haben.

Wir werden diesen Winkel δ nun näher untersuchen.

Fig. 1.
 $d\varphi' = d\varphi - \delta$.



In Fig. 1. seien P_1S_1 und P_2S_2 zwei Normalen einer Meridian-Ellipse, welche sich nicht in der Umdrehungsaxe $T'S_1$ sondern in einem anderen Punkte S schneiden, und zwar unter einem Winkel $d\varphi$, welcher gleich der Differenz der Breiten φ_1 und φ_2 beider Punkte P_1 und P_2 ist, d. h.:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = d\varphi \quad (1)$$

Wenn ferner der Meridianbogen $P_1P_2 = dm$ gesetzt wird, und der Meridian-Krümmungshalbmesser für die Mittelbreite $= M$ (d. h. nahezu $M = P_1S = P_2S$), so hat man auch:

$$dm = M d\varphi \quad (2)$$

Andererseits kann man in erster Näherung auch setzen:

$$dm = N d\varphi' \quad (\text{wo } P_1S_1 = N) \quad (3)$$

Es ist also:

$$\frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{N}{M} \quad (4)$$

$$\delta = d\varphi - d\varphi' = d\varphi \left(1 - \frac{d\varphi'}{d\varphi}\right) = d\varphi \left(1 - \frac{M}{N}\right) \text{ oder } = d\varphi \frac{M}{N} \left(\frac{N}{M} - 1\right) \quad (5)$$

Hiebei ist nach (18) und (19) § 33. S. 210:

$$\frac{N}{M} = V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi \quad (6)$$

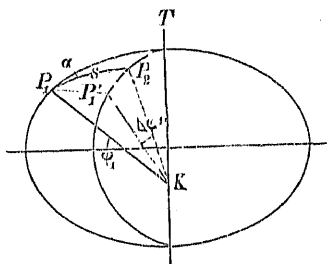
Da das Produkt $e'^2 \cos^2 \varphi$ sehr häufig vorkommt, bezeichnen wir es besonders, indem wir setzen:

$$e'^2 \cos^2 \varphi = \eta^2, \quad \text{also } V^2 = 1 + \eta^2 \quad (7)$$

Damit wird nach (5):

$$\delta = \frac{d\varphi}{V^2} \eta^2 \quad (8)$$

Fig. 2.



Diese Formeln geben Veranlassung, eine neue Benennung einzuführen für den Winkel $d\varphi'$ von Fig. 1., welcher mit der Bezeichnung $A\varphi'$ auch in Fig. 2. wiederkehrt.

Wenn allgemeiner $A\varphi$ ein kleiner Breiten-Unterschied ist, so ist der entsprechende auf die Erdaxe reduzierte Wert $A\varphi'$ nach (4) und (6):

$$A\varphi' = \frac{A\varphi}{V^2} = \text{verkürzter Breiten-Unterschied} \quad (9)$$

Zu jedem gegebenen kleinen Breiten-Unterschied kann man den entsprechenden „verkürzten Breiten-Unterschied“ $A\varphi'$ mit Hilfe von V^2 nach unserer Hilfstafel Seite [2] — [23] des Anhanges leicht berechnen; es sei z. B.: $\varphi_1 = 49^\circ 30'$, $\varphi_2 = 50^\circ 30'$, also $A\varphi = 1^\circ = 3600''$ und die Mittelbreite $\varphi = 50^\circ 0'$, dann hat man:

	$\log \Delta \varphi$	3.556 803	
von Seite [15]:	$\log V^2$	0.001 204	
	$\log \Delta \varphi'$	3.555 099	$\Delta \varphi' = 3590,04''$
			$\Delta \varphi' = 0^\circ 59' 50,04''$

Der verkürzte Breiten-Unterschied dient dazu, um in erster Näherung sphäroidische Bögen auf *einen* Erd-Mittelpunkt zu reduzieren.

In Fig. 2. ist K ein solcher Mittelpunkt; hat man nun einen Bogen $P_1 P_2 = s$, so kann man zuerst einen Centriwinkel σ berechnen:

$$\frac{s}{N} = \sigma \quad (10)$$

Dabei ist $N = P_1 K$ der Quer-Krümmungshalbmesser des Ausgangspunktes P_1 .

Nun kann man auch die einfachen sphärischen Formeln von § 56. (5) — (10) S. 303—304 leicht auf das Ellipsoid übertragen, wenn man nur überall den verkürzten Breiten-Unterschied $\frac{\varphi' - \varphi}{V^2} = (\varphi' - \varphi) \frac{M}{N}$ an Stelle des sphärischen Breiten-Unterschiedes setzt, und im übrigen einen Kugel-Halbmesser N zu Grunde legt. Die Aufgabe sei mit Bezugnahme auf Fig. 3. so gefasst:

Gegeben sind zwei Punkte auf dem Ellipsoid, mit den Breiten φ und φ' und mit dem Längen-Unterschied λ ; es soll die Entfernung beider Punkte $= s$, linear auf dem Ellipsoid gemessen, und die beiden Azimute α und α' berechnet werden.

Die Anwendung des Prinzips des verkürzten Breiten-Unterschieds auf die Formeln (7) — (10) S. 303—304 giebt:

$$\alpha' - \alpha = \lambda \sin \frac{\varphi' + \varphi}{2} \quad (11)$$

$$\tan \frac{\alpha' + \alpha}{2} = \frac{\lambda \cos \frac{\varphi' + \varphi}{2}}{(\varphi' - \varphi) \frac{M}{N}} \quad (12)$$

$$\sigma = \frac{s}{N} = \frac{\lambda \cos \frac{\varphi' + \varphi}{2}}{\sin \frac{\alpha' + \alpha}{2}} = \frac{(\varphi' - \varphi) \frac{M}{N}}{\cos \frac{\alpha' + \alpha}{2}} \quad (13)$$

$$\sigma = \frac{s}{N} = \sqrt{\left((\varphi' - \varphi) \frac{M}{N}\right)^2 + \left(\lambda \cos \frac{\varphi' + \varphi}{2}\right)^2} \quad (14)$$

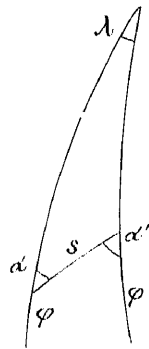
Wir wollen diese Formeln etwas umstellen, und auch die nöthigen ϱ zusetzen, wodurch wir erhalten:

$$\tan \frac{\alpha' + \alpha}{2} = \frac{N \lambda \cos \frac{\varphi' + \varphi}{2}}{M(\varphi' - \varphi)} \quad (15)$$

$$s = \frac{N}{\varrho} \frac{\lambda \cos \frac{\varphi' + \varphi}{2}}{\sin \frac{\alpha' + \alpha}{2}} = \frac{M}{\varrho} \frac{(\varphi' - \varphi)}{\sin \frac{\alpha' + \alpha}{2}} \quad (16)$$

$$s = \sqrt{\left(\frac{N}{\varrho} \lambda \cos \frac{\varphi' + \varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{\varrho} (\varphi' - \varphi)\right)^2} \quad (17)$$

Fig. 3.



Die Haupt-Krümmungshalbmesser M und N , beide für die *Mittelbreite* $\frac{q + q'}{2}$, setzen wir tabellarisch gegeben voraus (Hilfstafel Seite [2] bis [23] unseres Anhangs); dann ist es aber auch nützlich, den Faktor ϱ sofort mit M und N zusammen zu nehmen; und da diese Vereinigung noch sehr oft gebraucht werden wird, haben wir in unserem Anhang Seite [2] bis [23] folgende Hauptcoefficienten-Logarithmen gebildet:

$$\log \frac{\varrho}{M} = \log [1] \quad \text{und} \quad \log \frac{\varrho}{N} = \log [2] \quad (18)$$

und damit erhält man folgende Gebrauchs-Formeln zu der in Fig. 3. angedeuteten Aufgabe:

$$\text{Gegeben } q, q', \lambda, \quad \text{Gesucht } \alpha, \alpha', s \quad (19)$$

$$\alpha' - \alpha = \lambda \sin \frac{q' + q}{2} \quad (20)$$

$$\tan g \frac{\alpha' + \alpha}{2} = \frac{\frac{\lambda}{[2]} \cos \frac{q' + q}{2}}{\frac{q' - q}{[1]}} \quad (21)$$

$$s = \frac{\frac{\lambda}{[2]} \cos \frac{q' + q}{2}}{\sin \frac{\alpha' + \alpha}{2}} = \frac{\frac{q' - q}{[1]}}{\cos \frac{\alpha' + \alpha}{2}} \quad (22)$$

oder:

$$s = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{[2]} \cos \frac{q' + q}{2} \right)^2 + \left(\frac{q' - q}{[1]} \right)^2} \quad (23)$$

Zu einem Zahlen-Beispiel nehmen wir die zwei trigonometrischen Hauptpunkte der Stadt Hannover, welche nach Mitteilung der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme von 1887 folgende geographische Coordinaten haben:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Ägidius} & q' = 52^\circ 22' 14,9611'' \quad L' = 27^\circ 24' 24,6290'' \\ \text{Wasserturm} & q = 52^\circ 21' 49,9080'' \quad L = 27^\circ 22' 25,0168'' \end{array} \right\} \quad (24)$$

$$\begin{array}{lll} \text{Differenzen } q' - q & = +0^\circ 0' 25,0531'' & \lambda = 0^\circ 1' 59,6122'' \\ & = 25,0531'' & = 119,6122'' \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Mittel } \frac{q' + q}{2} &= 52^\circ 22' 24,4345'' \\ &= 52^\circ 22,0406' \end{aligned} \quad (25)$$

Mit der Mittelbreite $52^\circ 22,0406'$ geht man in die Hilfstafel des Anhangs Seite [15] ein, und entnimmt durch Interpolation:

$$\log [1] = 8.509\,9574 \quad \log [2] = 8.508\,8708 \quad (26)$$

und die weitere Rechnung nach den Formeln (20) — (23) giebt:

$$\begin{array}{ll} \frac{\alpha' + \alpha}{2} = 71^\circ 6' 37,69'' & \\ \frac{\alpha' - \alpha}{2} = 0^\circ 0' 47,36'' & \\ \hline \alpha' = 71^\circ 7' 25,05'' & \log s = 3.378\,7016 \\ \alpha = 71^\circ 5' 50,33'' & s = 2391,672'' \end{array} \quad (27)$$

Die Formel (18) wollen wir für späteren mehrfachen Gebrauch nochmals besonders herausheben in dieser Form:

$$\frac{\Delta\varphi}{V^2} = \sigma \cos \alpha_m = \frac{s}{N} \cos \alpha_m \quad (28)$$

Dabei ist $\Delta\varphi$ ein Breiten-Unterschied, $V^2 = 1 + \eta^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi_m$, $N = \frac{c}{V}$, und est ist φ_m die *Mittelbreite* für die Bogen s , sowie auch α_m das *Mittel-Azimut* für diesen Bogen.

Man kann die Formeln (20) — (23) auch noch dadurch vervollständigen, dass man die sphärischen Korrektions-Glieder dritter Ordnung von § 57. hinzunimmt, so dass man z. B. aus unserer (20) und aus (18) § 57. S. 306 bilden würde:

$$\alpha' - \alpha = \lambda \sin \frac{\varphi' + \varphi}{2} \left(1 + \frac{(\varphi' - \varphi)^2}{8 \varrho^2} + \frac{\left(\lambda \cos \frac{\varphi' + \varphi}{2} \right)^2}{12 \varrho^2} \right) \quad (29)$$

und dabei könnte man noch in dem Korrektions-Gliede statt $\frac{(\varphi' - \varphi)^2}{8 \varrho^2}$ schreiben $\frac{(\varphi' - \varphi)^2}{8 V^4 \varrho^2}$; indessen wollen wir auf die Formel (29) und deren Schwester-Formeln uns hier nicht einlassen, weil wir solche Formeln später auf anderem und sicherem Wege erhalten werden.

Die Formeln (20) — (23) haben wir hier ohne viele Theorie gefunden und haben uns auch durch den Begriff der verkürzten Breiten-Differenz zweifellos überzeugt, dass wir dadurch *in erster Näherung* sphäroidische Formeln bekommen; indessen wie weit diese erste Näherung brauchbar ist, ob z. B. über das kleine Beispiel (24) — (27) erheblich hinausgegangen werden darf, das können wir auf diesem Wege nicht bestimmen, und deswegen sollen auch die Formeln (29) und ähnliche hier nicht weiter behandelt werden.

§ 64. Bestimmung der geographischen Coordinaten φ , λ aus den rechtwinkligen Coordinaten x , y und umgekehrt.

Nachdem wir die rein *sphärischen* Beziehungen zwischen den geographischen Coordinaten und den rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes, bereits in § 53. und § 54. kennen gelernt haben, wird es nun nicht schwer sein, auch die *sphäroidischen* Beziehungen hiefür, wenigstens in erster Näherung herzustellen, was für die gewöhnlichen Fälle der Feld- und Landmessung genügt.

Zuerst behandeln wir die Rectifikation des Meridian-Bogens x zwischen den Breiten φ_0 und φ_1 , wofür in (1) § 53. S. 288 die Gleichung gefunden wurde:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = x \frac{\varrho}{r} \quad \text{oder} \quad x = (\varphi_1 - \varphi_0) \frac{r}{\varrho} \quad (1)$$

Wenn die Abscisse x nicht auf einem *Kreisbogen* vom Halbmesser r , sondern auf dem Bogen einer Meridian-*Ellipse* abgewickelt wird, so kann man doch, wenn x nicht sehr gross ist, die Rechnung mit einem Kreisbogen führen, dessen Halbmesser aber dann gleich dem Meridian-Krümmungshalbmesser M für die *Mittelbreite* $\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2}$

zu nehmen ist, wie wir bereits in § 35. ausführlich gezeigt haben (nämlich bei (10) — (12) S. 217—218 und bei (32) S. 222—223).

Wir haben dabei gefunden, dass der Fehler dieses Näherungs-Verfahrens in unseren Breiten nur etwa 6^{mm} auf 1° beträgt (vgl. die Hilfstafel für g , S. 223), so dass namentlich bei den kleinen Geltungsbereichen, welche z. B. die 40 Preussischen Kataster-Coordinatensysteme haben, jenes Verfahren ganz zulässig und zugleich sehr bequem ist.

Einige weitere Bemerkungen über Meridian-Bögen und Breiten-Differenzen werden wir nachher noch beifügen (S. 333).

Indem wir nun zu dem sphärisch-trigonometrischen Teile von § 53. — § 54. übergehen, finden wir, dass die Übertragung auf das Ellipsoid wesentlich erleichtert wird durch den Umstand, dass der Ordinaten-Bogen y , weil er rechtwinklig zum Ursprungs-Meridian ist, mit seinen Endpunkten in nicht wesentlich verschiedenen Breiten liegt, weshalb wir uns erlauben dürfen, von den *zwei* Normalschnitten, welche im allgemeinen zwischen zwei Punkten bestehen, abzusehen, und die Ordinate y zu betrachten als liegend auf einem *Kreisbogen*, dessen Halbmesser der Quer-Krümmungshalbmesser N_1 der Fusspunkts-Breite φ_1 ist.

Indem wir somit von der schon am Ende von § 62. erwähnten Besonderheit Gebrauch machen, legen wir allen sphärischen Formeln von § 53. — § 54. den genannten Quer-Krümmungshalbmesser N_1 der Fusspunkts-Breite φ_1 als Kugelhalbmesser zu Grunde, und haben dann nur noch für die früher q_2 genannte sphärische Breite des Punktes P die Reduktion δ für verkürzte Breiten-Differenz anzubringen.

Um dieses sofort endgültig für unsere gegenwärtige Aufgabe (vgl. die nachfolgende Fig. 1.) zu erledigen, nehmen wir die Formel (2) S. 289 zur Hand, nämlich:

$$\varphi_1 - q_2 = \frac{y^2}{2r^2} \tan \varphi_1 \quad (1)$$

Zuerst ist, wie schon erwähnt, für r der Quer-Krümmungshalbmesser N_1 der Fusspunkts-Breite φ_1 zu setzen, also:

$$\varphi_1 - q_2 = \frac{y^2}{2N_1^2} \tan \varphi_1 \quad (2)$$

Diese Differenz $\varphi_1 - q_2$ ist *sphärisch* berechnet, d. h. „*verkürzt*“ in dem früher in § 63. erörterten Sinne; die wirkliche Breiten-Differenz $\varphi_1 - \varphi$ wird daher nach (8) § 63. S. 326:

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi &= \varphi_1 - q_2 + \delta \\ \varphi_1 - \varphi &= \varphi_1 - q_2 + \frac{\eta^2 (\varphi_1 - \varphi)}{V^2} \end{aligned}$$

Da hier $V^2 = 1 + \eta^2$ ist, bekommt man:

$$(\varphi_1 - \varphi) \left(1 - \frac{\eta^2}{1 + \eta^2} \right) = \varphi_1 - q_2 \quad \text{oder} \quad \varphi_1 - \varphi = V^2 (\varphi_1 - q_2) \quad (3)$$

Diese letzte Form (3) ist auch wieder dieselbe wie (4) § 63. S. 326, welche wir auch hier hätten zu Grunde legen können.

Indem somit diese Frage des verkürzten Breiten-Unterschiedes erledigt ist, haben wir aus (2) und (3):

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{V^2}{2} \frac{y^2}{N_1^2} \tan \varphi_1 \quad (4)$$

Es bleibt nur etwa die Frage noch übrig, für welche Breite φ_1 oder φ der Wert V^2 in (4) zu nehmen ist? Indessen ist unsere ganze Betrachtung von § 63. mit der Figur 1. S. 326, welche zu dem kleinen Winkel δ und entsprechend zu dem Faktor V^2 geführt hat, von vornherein nicht so scharf, dass wir die Frage φ_1 oder φ für V^2 entscheiden könnten; und praktisch ist dieses für unseren Fall gleichgültig, wie man sich am besten überzeugt, wenn man die geringen Beträge $\varphi_1 - \varphi$ und die entsprechenden kleinen Differenzen für aufeinanderfolgende $\log V^2$ in unserer Hilfstafel, z. B. auf Seite [15] des Anhangs betrachtet. Immerhin hat φ_1 als Argument für V^2 , vor φ den Vorzug, dass unter der Breite φ_1 Berührung des y -Bogens mit dem Parallelkreis stattfindet, und demnach nehme man den Faktor V^2 in (4) für die Breite φ_1 .

Da wir nun nichts mehr weiter zu thun haben, als in den sphärischen Formeln von § 53. S. 288—290 überall N_1 statt r und φ statt φ_2 zu schreiben, erhalten wir mit Benützung des vorstehenden (1) und (4) und im Anschluss an nebenstehende Fig. 1. (überall mit Zusetzung der nötigen ϱ):

$$\text{Gegeben } \varphi_0, x, y \quad (5)$$

$$\text{Gesucht } \varphi_1, \varphi, \lambda, \gamma = \alpha - a \quad (6)$$

$$\text{Auflösung: } \varphi_1 = \varphi_0 + \frac{x}{M} \varrho \quad (7)$$

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{V^2}{2} \frac{y^2}{N_1^2} \varrho \tan \varphi_1 \quad (8) \quad \varphi_1$$

$$(3) \text{ S. 289: } \lambda = \frac{y}{N_1 \cos \varphi_1} \varrho - \frac{y^3}{3 N_1^3 \cos \varphi_1} \varrho \tan^2 \varphi_1 \quad (9) \quad \varphi_1$$

$$(5) \text{ S. 290 oder: } \lambda = \frac{y}{N_1 \cos \varphi} \varrho + \frac{y^3}{6 N_1^3 \cos \varphi} \varrho \tan^2 \varphi \quad (10) \quad \varphi_0$$

$$(4) \text{ S. 289: } \gamma = \frac{y}{N_1} \varrho \tan \varphi_1 - \frac{y^3}{6 N_1^3} \varrho \tan \varphi_1 (1 + 2 \tan^2 \varphi_1) \quad (11)$$

$$(6) \text{ S. 290 oder: } \gamma = \frac{y}{N_1} \varrho \tan \varphi + \frac{y^3}{6 N_1^3} \varrho \tan \varphi (2 + \tan^2 \varphi) \quad (12)$$

Nun wollen wir noch die Haupt-Coeffizienten [1] und [2] unserer Hilfstafel von S. [2] — [23] des Anhangs einführen, nämlich:

$$\frac{\varrho}{M} = [1] \text{ für die Mittelbreite } \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \quad (13)$$

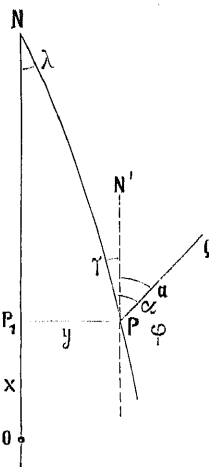
$$\frac{\varrho}{N_1} = [2] \text{ für die Fusspunkts-Breite } \varphi_1 \quad (14)$$

Damit werden die vorstehenden Formeln:

$$\varphi_1 = \varphi_0 + [1] x \quad (7^*)$$

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{([2] y)^2 V^2}{2 \varrho} \tan \varphi_1 \quad (8^*)$$

Fig. 1.



$$\lambda = \frac{[2] y}{\cos \varphi_1} - \left(\frac{[2] y}{\cos \varphi_1} \right)^3 \frac{1}{3 \rho^2} \sin^2 \varphi_1 \quad (9^*)$$

$$\text{oder } \lambda = \frac{[2] y}{\cos \varphi} + \left(\frac{[2] y}{\cos \varphi} \right)^3 \frac{1}{6 \rho^2} \sin^2 \varphi \quad (10^*)$$

$$\gamma = [2] y \tan \varphi_1 - \frac{([2] y)^3}{6 \rho^2} \tan \varphi_1 (1 + 2 \tan^2 \varphi_1) \quad (11^*)$$

$$\text{oder } \gamma = [2] y \tan \varphi + \frac{([2] y)^3}{6 \rho^2} \tan \varphi (2 + \tan^2 \varphi) \quad (12^*)$$

Nachdem wir so die Formeln von § 53. von der Kugel auf das Ellipsoid übertragen haben, kann keine Schwierigkeit bestehen, auch die Formeln von § 54. S. 292—293 so zu übertragen. Wir schreiben hiefür sofort die Ergebnisse:

$$\text{Gegeben } \varphi, \lambda \quad (15)$$

$$\text{Gesucht } x, y, \gamma \quad (16)$$

$$(1) \text{ S. 292: } \varphi_1 = \varphi + \frac{V^2}{2 \rho} \lambda^2 \sin \varphi \cos \varphi \quad (17)$$

$$(6) \text{ S. 293: } x = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{[1]} \quad (18)$$

$$(2) \text{ S. 292: } y = \frac{\lambda}{[2]} \cos \varphi_1 + \frac{\lambda^3}{[2]} \frac{1}{3 \rho^2} \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 \quad (19)$$

$$\text{oder } y = \frac{\lambda}{[2]} \cos \varphi - \frac{\lambda^3}{[2]} \frac{1}{6 \rho^2} \cos \varphi \sin^2 \varphi \quad (20)$$

$$(3) \text{ S. 292: } \gamma = \lambda \sin \varphi_1 - \lambda^3 \frac{1}{6 \rho^2} \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 \quad (21)$$

$$\text{oder } \gamma = \lambda \sin \varphi + \lambda^3 \frac{1}{3 \rho^2} \sin \varphi \cos^2 \varphi \quad (22)$$

Nun geben wir auf S. 334 und 335 ein Zahlen-Beispiel sowohl für die Formeln (7*)—(12*), als auch für deren Umkehrung (17)—(22). Da die ganze Rechnung mit allen Einzelzahlen angegeben ist, wird zur Erklärung nichts weiter nötig sein; auch einige vorübergehend eingeführte Zwischen-Bezeichnungen (a), (b) u. dgl. erklären sich selbst als kleine Übergangshilfen, mit Rücksicht auf Raummangel. Wo der Raum nicht reichte, um bei den Logarithmen das Zeichen *log* vorzusetzen, soll der senkrechte Strich die Logarithmen andeuten. Die Coefficienten-Logarithmen *log* [1], *log* [2], *log* V^2 , *log* $(1 + 2 \varepsilon_1^2)$, *log* $(2 + \varepsilon_2^2)$, sind aus den Hilfstafeln unseres Anhanges Seite [2]—[23] und Seite [36]—[37] entnommen.

Im Übrigen sei nur noch bemerkt, dass man das Vorzeichen von y oder λ nicht in der ganzen Rechnung durchführen muss, wie bei uns theoretisch nötig war, man braucht nur am Schlusse zu merken, dass y , λ und γ immer *gleiche* Zeichen haben.

Der im nachstehenden Beispiele S. 334 und 335 benützte Coordinaten-Nullpunkt *Celle* ist einer der 40 neueren preussischen Kataster-Nullpunkte, welcher in der Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881, S. 345 als Nr. 27. aufgeführt ist, jedoch mit etwas *anderen* Werten φ_0 und L_0 als die von uns auf S. 334 und 335 angegebenen, was darin seinen Grund hat, dass jene Angaben der Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881, S. 345 für *Celle* nur *vorläufig* waren, und inzwischen durch die endgültige Neu-

bestimmung der trigonometrischen Abtheilung der Landesaufnahme vom Jahre 1887 ersetzt worden sind.

Meridianbögen und Breiten-Differenzen.

Bei den kleinen Geltungsbereichen unserer Preussischen Kataster-Coordinten-Systeme wird die Beziehung zwischen der Abscisse x und der Breiten-Differenz $\varphi_1 - \varphi_0$ hinreichend genau durch den Meridian-Krümmungshalbmesser M der Mittelbreite gegeben, nämlich:

$$x = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\rho} M \quad \text{oder} \quad = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{[1]}$$

wobei M der Meridian-Krümmungshalbmesser für die Mittelbreite $\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}$ ist, oder [1] der entsprechende Coëfficient nach (13) S. 331.

Dieses Verfahren haben wir in § 35. S. 217 und S. 222 — 223 mehrfach behandelt und z. B. unter 52° Mittelbreite mit Ausdehnung von 1° mit einem Fehler von 7^{mm} behaftet gefunden, der durch eine kleine Nebenrechnung beseitigt und auch auf weitere Ausdehnung in Rechnung gebracht werden könnte.

Indessen bei grösserer Ausdehnung empfiehlt sich andererseits sehr eine allgemeine *Tafel der Meridianbögen*, z. B. diejenige, welche von *F. G. Gauss* in dessen Werke „Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst, Berlin 1876, II. Teil“, mitgeteilt wird von $1'$ zu $1'$, wovon wir in unserem Anhang Seite [26] einen Auszug von $10'$ zu $10'$ gegeben haben.

Bei Benützung einer solchen Tafel braucht man für den Coordinaten-Nullpunkt mit gegebener Breite φ_0 nur ein für allemal den Meridianbogen-Werth B_0 durch Interpolation zu bestimmen, um dann für jede andere Breite φ_1 den zugehörigen Wert B_1 und dann $x = B_1 - B_0$ zu finden.

Für den Wert $\varphi_0 = 52^\circ 37' 32,6709''$, welcher zu dem Coordinaten-Nullpunkt Celle gehört, haben wir die fragliche Interpolation schon zweimal, beispielshalber aus anderer Veranlassung, behandelt, nämlich bei (3) S. 204 und (28) S. 221; es wurde beidemal in hinreichender Übereinstimmung gefunden $m = 5\,832\,371,045^{\text{m}}$ als Meridianbogen vom Äquator bis zu dem Punkte Celle.

Hat man längere Zeit mit Punkten eines Geltungsbereiches zu thun, so kann man auch noch weiteres allgemein tabellarisch vorbereiten, man kann z. B. auch eine Tafel berechnen, welche für gegebene Fusspunkts-Breite φ_1 sofort die Abscisse x giebt oder umgekehrt. Z. B. in der Gegend von Hannover-Linden, im Geltungsbereiche Celle, benützen wir folgende Hilfstafel:

Celle $\varphi_0 = 52^\circ 37' 32,6709''$	$x =$	0,000 ^m	Ax
.....
$\varphi_1 = 52^\circ 30'$	$x =$	13 990,705 ^m	1854,399 ^m
52 29	—	15 845,104	1854,393
52 28	—	17 699,497	1854,388
52 27	—	19 553,885	1854,382
52 26	—	21 408,267	1854,378
52 25	—	23 262,645	1854,372
52 24	—	25 117,017	1854,367
52 23	—	26 971,384	1854,361
52 22	—	28 825,745	1854,357
52 21	—	30 680,102	1854,351
52 20	—	32 534,453	

Die Abscissen eines solchen Coordinaten-Systems können *beliebig lang* sein, sie könnten, wenn es gewünscht würde, über die ganze Erde, vom Südpol über den Äquator bis zum Nordpol, hingehen, wenn man eine Tafel der durchgehenden Meridianbögen benützt.

Dieses ist ein wesentlicher Unterschied gegen die *Ordinaten*, welche, wie wir auf S. 279 gesehen haben, bei unseren Genauigkeitsansprüchen nicht über 60 000^m sein dürfen.

Die Abscissen brauchen auch *keinen* bestimmten auf der Erde als trigonometrischen Beobachtungspunkt bezeichneten Anfangspunkt zu haben.

Als im Jahre 1887 das Coordinaten-System der Lindener Vermessung noch nicht entschieden war, machten wir beispielsweise eine Berechnung mit einer x -Axe, welche als Meridian für die Länge rund $L = 28^\circ 0' 0''$ angenommen wurde. Dabei war gegeben:

$$\begin{array}{lll} \text{Ägidius} & \varphi = 52^\circ 22' 14,9611'' & L = 27^\circ 24' 24,6290'' \\ \text{Wasserturm} & 52^\circ 21' 49,9080'' & 27^\circ 22' 25,0168'' \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Ägidius} \\ \text{Wasserturm} \end{array}} \right\} \quad (23)$$

Damit wurde nach dem Schema S. 335 berechnet:

$$\begin{array}{lll} \text{Ägidius} & y = -40\,394,10^m & x = 5\,804\,173,28^m \\ \text{Wasserturm} & -42\,663,42^m & 5\,803\,418,07^m \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Ägidius} \\ \text{Wasserturm} \end{array}} \right\} \quad (24)$$

Als Axe der x dient, wie schon erwähnt, der Meridian für rund 28° Länge, und die x selbst sind in (24) vom Äquator der Erde an gezählt, wobei aber begreiflich, für verschiedene Zwecke der konstante Betrag 5 000 000^m, oder auch noch mehr, weggelassen werden kann.

Rechnungs-Formular der Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881.

Da in Preussen die Veröffentlichungen der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme in Form von geographischen Coordinaten geschehen, der Feld- und Landmesser aber rechtwinklige Coordinaten haben muss, kommt die gegenseitige Verwandlung solcher Coordinaten so oft vor, dass die Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881, hiefür ein Formular nebst Regeln gegeben hat, nämlich „Trig. Form. 6. Berechnung der rechtwinkligen sphärischen Koordinaten aus den geographischen Koordinaten“ (Reichsdruckerei, Berlin SW, Oranienstrasse 90/91, vgl. unseren II. Band, S. 194).

Ein ausgefülltes Beispiel und Regeln dazu gibt die Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881, S. 141—145.

Dieses Formular 6. der Anweisung IX. betrifft nur die Verwandlung der geographischen Coordinaten in rechtwinklige Coordinaten, und nicht umgekehrt; auch ist die Berechnung der Meridian-Konvergenz in dem Formular 6. nicht mit aufgenommen. Dieses Formular behandelt in besonderer, seinen Zwecken entsprechender Form, im wesentlichen dasselbe, was in unseren vorstehenden Gleichungen (17), (18), (19) S. 332 enthalten ist.

In Fig. 2. S. 337 sind die Bezeichnungen von Seite 141 der Anweisung IX. eingeschrieben, es ist nämlich:

- φ_0 die Breite des Coordinaten-Ursprungs,
- φ_f die Breite des Ordinaten-Fusspunktes,
- φ die Breite des gesuchten Punktes,
- λ_0 die Länge des Coordinaten-Ursprungs,
- λ die Länge des gesuchten Punktes,
- x und y sind die gesuchten Coordinaten.

Dabei ist x von φ_0 bis φ_f auf dem Meridian nördlich positiv, südlich negativ gezählt und y rechtwinklig zum Meridian östlich positiv, westlich negativ gezählt.

Die Aufgabe lautet: Aus gegebenen $\varphi_0, \varphi, \lambda_0, \lambda$ die Coordinaten x, y zu berechnen.

Die Differenz $\lambda - \lambda_0$ ist in Sekunden verwandelt, mit η'' bezeichnet, und weiter kommt die Breiten-Differenz $\varphi_f - \varphi = \psi''$ in Betracht, welche aus η'' berechnet wird nach der Formel

$$\psi'' = \eta''^2 q \quad (25)$$

Dieses entspricht unserer Formel (17) S. 332 für $\varphi_1 - \varphi$, d. h.:

$$\varphi_1 - \varphi = \lambda^2 \frac{V^2}{2\rho} \sin \varphi \cos \varphi \quad (26)$$

Daraus ergibt sich, dass der Faktor q in der Formel (25), ausgedrückt in unseren Bezeichnungen der Formel (26), diese Bedeutung hat:

$$q = \frac{V^2}{2\rho} \sin \varphi \cos \varphi \quad (27)$$

Nachdem man ψ'' zu φ addiert, und damit φ_f erhalten hat, kann man aus der Differenz $\varphi_f - \varphi_0$ die Abscisse x berechnen. Die Anweisung IX. bedient sich hiezu der schon oben (S. 333) von uns zitierten und beschriebenen Hilfstafel von F. G. Gauss.

Um vollends die Ordinate y zu erhalten, rechnet das Formular 6. der Anweisung IX. mit Längen-Sekunden L und mit Additamenten, wodurch in anderer Form dasselbe erhalten wird, wie durch die Reihen-Entwicklung (19) S. 332.

Zusammenstellung der Azimute und der Richtungswinkel für die Linie Wasserturm-Ägidius.

Unser mehrfach benütztes Beispiel Wasserturm-Ägidius, das in Fig. 3. S. 338 dargestellt ist, soll die Beziehungen zwischen Azimuten und Richtungswinkeln klar machen.

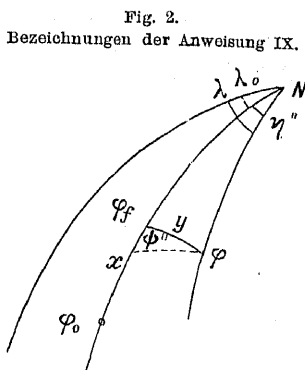
In Fig. 3. ist Celle, nordöstlich von Hannover, der Nullpunkt, auf welchen sich die rechtwinkligen Coordinaten von W und A beziehen; es sind also AA' und WW' Parallelen zu dem Meridian von Celle, folglich $W'WA = a$ und $WAA' = a'$ die Richtungswinkel der Geraden WA in W und A , d. h. diejenigen Winkel, welche in Fig. 1. S. 261 mit α und α' bezeichnet waren, während wir jetzt, mit *Änderung der Bezeichnungen*, die Richtungswinkel mit a , dagegen die Azimute mit α bezeichnen, so dass die Meridian-Konvergenzen in W und A diese sind:

$$-\gamma = \alpha - a \quad , \quad -\gamma' = \alpha' - a' \quad (28)$$

Wir bemerken, dass hier γ und γ' negativ sind im Vergleich mit γ in Fig. 1. S. 331, weil in unserem neuen Falle Fig. 3. die Ordinaten y negativ sind, und γ stets das Vorzeichen von y hat.

Der Gang unserer Berechnungen ist nun dieser:

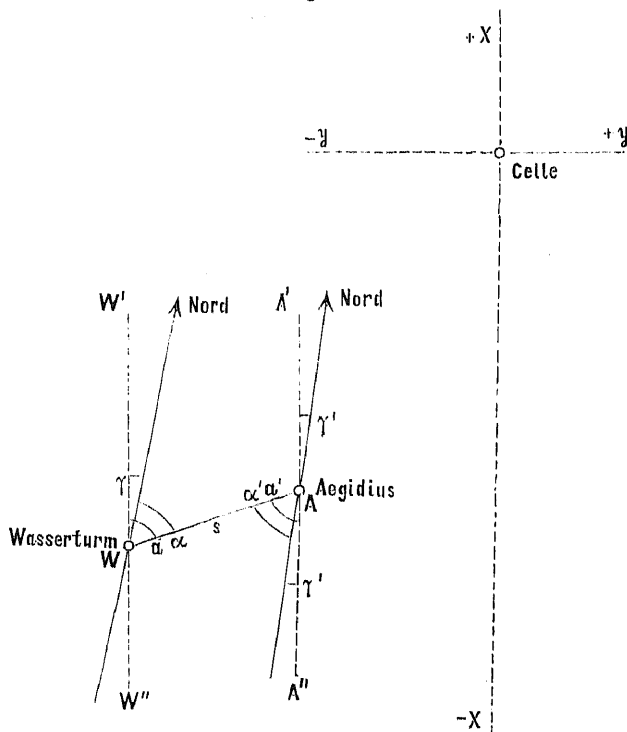
Von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme wurde am Ende 1887 mitgeteilt:



Punkt	Geogr. Breite	Geogr. Länge	
Celle, Stadtkirche	$52^{\circ} 37' 32,6709''$	$27^{\circ} 44' 54,8477''$	} (29)
Ägidius (Hannover) . . .	$52^{\circ} 22' 14,9611''$	$27^{\circ} 24' 24,6290''$	
Wasserturm (Linden) . . .	$52^{\circ} 21' 49,9080''$	$27^{\circ} 22' 25,0168''$	

Wie man hieraus, unter Annahme des Punktes Celle als Koordinaten-Nullpunkt, die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes Ägidius berechnet, haben wir auf S. 335 ausführlichst gezeigt, und da man für den zweiten Punkt Wasserturm dieselbe Berech-

Fig. 3.



nung machen kann, ist nachgewiesen, auf welche Weise man zu den rechtwinkligen Coordinaten von Ägidius und Wasserturm gelangt, nämlich:

$$\left. \begin{array}{ll}
 \text{Ägidius} & y' = -23\,271,813^m \quad x' = -28\,308,394^m \\
 \text{Wasserturm} & y = -25\,538,489^m \quad x = -29\,071,472^m \\
 \text{Differenzen} & +2266,676 \quad +763,078
 \end{array} \right\} (30)$$

*) In der Figur auf S. 698 des II. Bandes sind infolge eines Versehens, die zwei Punkte Ägidius und Wasserturm verwechselt. Auch weichen unsere jetzt mitgeteilten Berechnungen in der letzten Stelle der Coordinaten teilweise um 1^m von der früheren Berechnung ab, was nur auf verschiedener Abrundung beruht und sachlich völlig gleichgültig ist.

Dadurch ist die Linie Wasserturm-Ägidius nach Entfernung und Richtung festgelegt, nämlich im ebenen rechtwinkligen Coordinatensystem:

$$\log WA = 2.378\ 7020 \qquad WA = s = 23\ 91,674^m \qquad (31)$$

$$\alpha = (WA) = 71^\circ\ 23'\ 39,0'' \qquad \alpha' = (AW) \pm 180^\circ = 251^\circ\ 23'\ 39,0'' \qquad (32)$$

Andererseits haben wir in (27) § 63. S. 328 gefunden:

$$s = 2391,672^m \qquad (33)$$

$$\alpha = 71^\circ\ 5'\ 50,3'' \qquad \alpha' = 71^\circ\ 7'\ 25,0'' \qquad (34)$$

Die Vergleichung von (32) und (34) giebt:

$$\alpha - \alpha' = 17'\ 48,7'' \qquad \alpha' - \alpha' = 16'\ 14,0'' \qquad (35)$$

Dieses muss stimmen mit der Berechnung von γ auf S. 335 für Ägidius und mit der entsprechenden Berechnung für Wasserturm, nämlich:

$$\gamma = -17'\ 48,9'' \qquad \gamma' = -16'\ 14,3'' \qquad (36)$$

Dass hier zwischen (35) und (36) noch kleine Differenzen bis zu $0,3''$ vorkommen, hängt damit zusammen, dass schon die Rechnung von S. 335 nicht unbedingt auf 1^m sicher ist, weshalb auch (31) und (33) um 2^m differieren.

Wenn man überhaupt bedenkt, dass bei solchen Verhältnissen wie in Fig. 3. die letzten Stellen $0,001^m$ und $0,1''$ gar keinen inneren Sinn mehr haben, sondern nur als überschüssige Kontrollstellen für die vorhergehenden $0,01^m$ und $1''$ mitgeführt werden, so wird man sagen: die Proben (31) und (33) sowie (35) und (36) stimmen.

§ 65. Gemarkungs-Karte mit geographischen Netzlinien.

Wenn der Plan einer Stadt oder einer Feldmark in rechtwinkligen sphärischen Coordinaten bearbeitet ist, was gewöhnlich in grossen Massstab geschieht, so dass viele Einzelblätter entstehen, so kann man daraus auch Übersichtskarten und topographische Karten kleinen Massstabes herstellen, in welchen immer wieder das quadratische Netz der rechtwinkligen Coordinaten den festen Rahmen für die Zeichnung und Vervielfältigung bietet.

Bei *topographischen* Karten, etwa in 1:10 000 bis 1:25 000 und wohl auch schon bei Stadt-Übersichtskarten in 1:5 000 bis 1:10 000 verlangt man aber wegen des Anschlusses an die allgemeine Landes-Topographie, und zur allgemeinen geographischen Orientierung, die Einzeichnung von Meridianen und Parallelkreisen für runde Werte der geographischen Längen und der geographischen Breiten, oder kurz, die Einzeichnung von geographischen Netzlinien, welche die Karte in geographische Trapeze einteilen.

Die Bestimmungsstücke hiefür bekommt man durch die Formeln, welche wir in § 64. entwickelt und durch die Rechenschemate S. 334 und S. 335 erläutert haben. Insbesondere das zweite Schema S. 335 wird hier gebraucht, indem man für gegebene *runde* Werte der Längen und Breiten L und q die zugehörigen rechtwinkligen Coordinaten y und x berechnet, und darnach die Trapez-Ecken in das rechtwinklige Coordinaten-System einträgt.

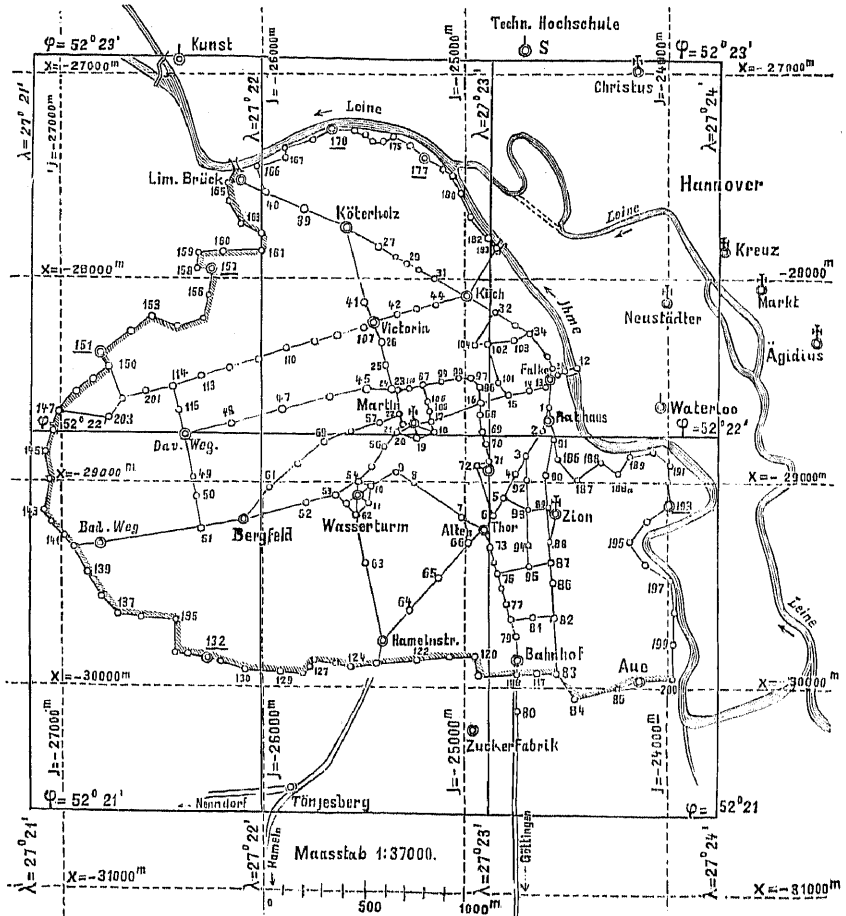
Als Beispiel hiefür nehmen wir die Karte der Stadt und Gemarkung *Linden* bei Hannover, deren Aufnahme wir in den Jahren 1887—1889 gemacht haben, wie schon in unserem II. Bande, S. 228 und S. 305 gezeigt worden ist.

In Fig. 1. betrachten wir zuerst die Weiterentwicklung der Polygon-Aufnahme, deren innerer Teil schon auf S. 305 unseres II. Bandes mitgeteilt war.

Fig. 1.

Übersichtskarte der Stadt und Feldmark Linden bei Hannover mit Coordinaten-Netzlinien
und mit geographischen Netzlinien.

Massstab 1 : 37 000.



Wir haben auch bereits auf S. 698 des II. Bandes mitgeteilt, dass im Jahre 1888 ein neues Coordinaten-System mit dem Nullpunkt *Celle* eingeführt wurde, und dem entsprechend giebt unsere neue Figur 1. nun die früheren Teile auf *Celle* umgerechnet, und auch die neuen Teile, das Gemarkungs-Umfangspolygon, in dem *neuen* System *Celle* dargestellt und berechnet.

Die Gemarkung liegt etwa zwischen den geographischen Längen $27^{\circ} 21'$ und $27^{\circ} 24'$ und zwischen den geographischen Breiten $52^{\circ} 21'$ und $52^{\circ} 23'$, sie umfasst also 6 Minuten-Abteilungen; und wir haben für die 12 Ecken des entsprechenden Minuten-Netzes die rechtwinkligen Koordinaten y und x nach dem Schema von S. 335 berechnet, wie in folgender Übersicht angegeben ist, welche zugleich auch die Meridian-Konvergenzen γ enthält.

Rechtwinklige Koordinaten für das geographische Netz der Gemarkungs-Karte von Linden, Fig. 1. S. 340.

	$\lambda = 27^{\circ} 21'$	$\lambda = 27^{\circ} 22'$	$\lambda = 27^{\circ} 23'$	$\lambda = 27^{\circ} 24'$
$\varphi = 52^{\circ} 23'$	$y = -27\ 135,04^m$ $x = -26\ 896,63^m$ $\gamma = -18' 56,6''$	$y = -26\ 000,36^m$ $x = -26\ 902,74^m$ $\gamma = -18' 9,0''$	$y = -24\ 865,68^m$ $x = -26\ 908,61^m$ $\gamma = -17' 21,5''$	$y = -23\ 731,00^m$ $x = -26\ 914,22^m$ $\gamma = -16' 34,0''$
$\varphi = 52^{\circ} 22'$	$y = -27\ 145,25^m$ $x = -28\ 750,98^m$ $\gamma = -18' 56,3''$	$y = -26\ 010,14^m$ $x = -28\ 757,09^m$ $\gamma = -18' 8,8''$	$y = -24\ 875,04^m$ $x = -28\ 762,96^m$ $\gamma = -17' 21,3''$	$y = -23\ 739,94^m$ $x = -28\ 768,56^m$ $\gamma = -16' 33,8''$
$\varphi = 52^{\circ} 21'$	$y = -27\ 155,47$ $x = -30\ 605,30^m$ $\gamma = -18' 56,1''$	$y = -26\ 019,93^m$ $x = -30\ 611,45^m$ $\gamma = -18' 8,6''$	$y = -24\ 884,40^m$ $x = -30\ 617,32^m$ $\gamma = -17' 21,0''$	$y = -23\ 748,87^m$ $x = -30\ 622,90^m$ $\gamma = -16' 33,5''$

Man kann diese Koordinaten in ihren Differenzen durch die Meridianbögen und Parallelbögen der Tafeln auf Seite [24]—[27] unseres Anhangs kontrollieren, z. B. in dem Meridian von $\lambda = 27^{\circ} 21'$ haben wir:

$$\begin{array}{lll}
 \varphi = 52^{\circ} 23' & x = -26\ 896,63^m & \Delta x = 1854,35^m \\
 \varphi = 52^{\circ} 22' & x = -28\ 750,98^m & \Delta x = 1854,32^m \\
 \varphi = 52^{\circ} 21' & x = -30\ 605,30^m &
 \end{array}$$

Nach der Tafel Seite [26] des Anhangs ist zwischen $52^{\circ} 20'$ und $52^{\circ} 30'$ der Meridianbogen $= 18\ 543,748^m$, also für 1 Minute $m = 1\ 854,37^m$, was mit den vorstehenden Werten Δx insofern genügend stimmt, als für genauere Rechnung schärfere Interpolation in der Tafel Seite [26] nöthig wäre, und eine kleine Abweichung zwischen m und Δx auch in der *Soldnerschen* Projektion (entsprechend Fig. 2. S. 278) begründet ist.

Um auch die Ordinaten-Differenzen zu kontrollieren, kann man die Längen-Grade der Tafel Seite [24]—[25] des Anhangs benutzen, wobei aber viel zu interpolieren wäre; sicherer geht man zu Wege durch die unmittelbare Berechnung von 1 Längenminute:

$$l' = \frac{N \cos \varphi}{\varphi'}$$

wo $\log \varphi' = 3.536\ 2739$ ist, und $\log N$ aus der Hilfstafel Seite [14] des Anhangs gefunden wird, z. B. für $\varphi = 52^{\circ} 23'$ findet man $\log N = 6.805\ 5547$, und damit nach vorstehender Formel $l' = 1\ 184,69^m$, während die Ordinaten auf dem Parallel von $\varphi = 52^{\circ} 23'$ nach der obigen Tabelle geben:

$\lambda = 27^\circ 21'$	$y = -27\,135,04^m$	$\Delta y = 1134,68^m$
$\lambda = 27^\circ 22'$	$y = -26\,000,36^m$	$\Delta y = 1134,68^m$
$\lambda = 27^\circ 23'$	$y = -24\,865,68^m$	$\Delta y = 1134,68^m$
$\lambda = 27^\circ 24'$	$y = -23\,731,00^m$	

Diese Δy stimmen hinreichend mit dem vorhin berechneten $l' = 1134,69^m$.

Die Meridian-Konvergenzen γ , welche wir in der obigen Tabelle auch mit aufgenommen haben, wird man meist nicht alle brauchen, man kann sie etwa zur Kontrolle der Ordinatendifferenzen für konstantes λ benützen.

Bestimmung der magnetischen Missweisung.

Die Meridian-Konvergenz braucht man, wenn es sich darum handelt, die wahre Nordrichtung zu finden, z. B. um die magnetische Missweisung für Tachymetrie oder auch für weitere wissenschaftliche Zwecke zu bestimmen. Ein gutes Beispiel hierfür scheint folgendes zu sein.

Am 4. Oktober 1888 kam ein Beamter des Observatoriums in Wilhelmshaven, Herr Dr. Eschenhagen nach Hannover, um daselbst die magnetischen Konstanten, insbesondere auch die magnetische Missweisung zu bestimmen.

Wir führten denselben zu diesem Zwecke ins freie Feld der Lindener Gemarkung, auf den Punkt (157) unseres Umfangs-Polygons (nordwestlich in der Karte S. 340). Dieser Punkt war pothenotisch bestimmt, mit den Coordinaten:

$$(157) \quad y = -26\,250,684^m \quad x = -27\,965,716^m$$

Damit berechneten wir nach dem Schema S. 335:

$$(157) \quad \varphi = 52^\circ 22' 25,564'' \quad L = 27^\circ 21' 47,063'' \quad \gamma = -18' 19,146''$$

Der Punkt (157) ist pothenotisch gegen 9 Punkte fest gelegt, und giebt nach der Ausgleichung den folgenden Abriss, in welchem mit α ein trigonometrischer Richtungs-Winkel, mit α ein astronomisches Azimut und mit $\gamma = \alpha - \alpha$ die Meridian-Konvergenz bezeichnet ist.

Zielpunkt	α	γ	α
Techn. Hochschule S	54° 32' 35''	— 18' 19''	54° 14' 16''
Christus-Turm	64 59 31		64 41 12
Markt-Turm	91 43 10		91 24 51
Neustädter-Turm	93 47 28		93 29 9
Ägidius-Turm	96 33 44		96 15 25
Kath. Kirche, Linden Turm . .	125 21 28		125 3 9
Martin-Turm	127 20 26		127 2 7
Wasser-Turm	147 12 55		146 54 36
Kunst	352 0 2		351 41 43

Alle diese 9 Punkte wurden mit dem magnetischen Instrument am 4. Oktober 1888 angezielt und dabei die Nadel abgelesen.

Die Vergleichung der Nadel-Ablesungen mit den Azimuten α gab im Mittel:

$$\text{Magnetische Missweisung} = 12^\circ 41,3'$$

Punkt (157) der Gemarkung Linden, 4. Oktober 1888, vormittags 10 Uhr.

Bemerkung über die geographischen Coordinaten der preussischen Landes-Aufnahme.

Die geographischen Längen und Breiten, welche die trigonometrische Abteilung der Landes-Aufnahme veröffentlicht, stützen sich alle auf *einen* Fundamentalpunkt, die Sternwarte Berlin, bzw. deren Übertragung auf den benachbarten Triangulierungspunkt Rauenberg, woselbst auch ein die ganze Landes-Aufnahme orientierendes Azimut Marienurm bestimmt wurde. Die hierfür noch heute benützten Annahmen wurden im Jahre 1865 gemacht, und insbesondere dabei die geographische Länge der Sternwarte = $31^{\circ} 3' 41,25''$ östlich von Ferro (d. h. $11^{\circ} 3' 41,25''$ östlich von Paris) angenommen. Nach neueren telegraphischen Bestimmungen ist diese Länge erheblich anders, nämlich $31^{\circ} 3' 28,32''$, oder um $12,93''$ kleiner als die Annahme von 1865.

Diesen Betrag $12,93''$ müsste man an *allen* Längenangaben der Landes-Aufnahme abziehen, wenn man dieselben mit neueren astronomischen Bestimmungen in Übereinstimmung bringen wollte. Indessen kämen dann noch viele andere Reduktionen für Lot-Abweichungen u. s. w. hinzu, und für die Feld- und Landmessung, wo es sich immer nur um *Differenzen* geographischer Längen handelt, kommt eine konstante Verschiebung überhaupt nicht in Betracht.

Einige weitere Zitate und neuere Angaben für Längen haben wir zusammengestellt in *Jordan-Steppes* „Deutsches Vermessungswesen“ I. S. 125 und *Jordan* „Grundzüge der astr. Zeit- und Ortsbestimmung, Berlin 1885“, S. [25]—[26]. Die neuesten Angaben über geographische Längen und Breiten von 192 Sternwarten, zusammengestellt von *Auwers*, giebt „Geographisches Jahrbuch“, XII. Band, 1888, herausgegeben von *Wagner*, Gotha 1888, S. 475—480. Ferner „Berliner Astr. Jahrbuch für 1890“, S. 379; für 1891, S. 385 u. s. w.

Die astronomischen Bestimmungen auf dem Fundamentalpunkt *Rauenberg* bei Berlin, insbesondere das für die Landes-Aufnahme massgebende Orientierungs-Azimut daselbst, sind in jüngster Zeit neu gemacht worden, und es hat namentlich das Azimut gegen früher die erhebliche Differenz $3,88''$ ergeben. („Veröffentlichung des K. Preuss. geodätischen Instituts, Astronomisch-geodätische Arbeiten I. Ordnung“, Berlin 1889, S. 186.)

§ 66. Die rechtwinkligen Coordinaten-Systeme des Deutschen Reiches.

Eine Übersicht der Deutschen rechtwinkligen Coordinaten-Systeme, welche zugleich ein gutes Stück Geschichte der Deutschen Vermessungen überhaupt vor Augen führt, haben wir in Fig. 1. S. 344 gebildet, durch Zusammentragen aller darüber zu erlangenden Mitteilungen. (Unser früheres Übersichts-Kärtchen von Band II S. 187 erscheint hiemit vervollständigt, und zugleich im Stich besser ausgeführt.)

Im Folgenden haben wir die aus verschiedenen Quellen gesammelten geschichtlichen Angaben über die verschiedenen Landes- und Provinzial-Coordinaten-Systeme zusammengestellt.

Bayern.

Das Bayerische Coordinaten-System wurde im Jahr 1810 von *Soldner* angelegt, mit der Mitte des nördlichen Frauenturms in München als Coordinaten-Ursprung, und dem Meridian dieses Punktes als Abscissen-Axe. Weiteres hierüber giebt das amtliche Werk: „Die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, München 1878“, S. 253.

Dieses System gilt nur für das eigentliche rechtsrheinsche Bayern; für die bayerische Pfalz gilt derselbe Nullpunkt *Mannheim* wie für Baden.

Die *eine* Bayerische Meridian-*x*-Axe, welche durch den Münchener Frauenturm geht, war zur Zeit der Anlage dieses Systems, da es sich nur um Messtisch-Aufnahmen in 1:6000 handelte, genügend, und für die Übersichtlichkeit des ganzen nützlich; während bei den heutigen Theodolit-Messungen Ordinatenlängen bis zu $170\,000^m$ mit Verzerrungen von $0,00036 \left(\frac{y^2}{2r^2} \text{ s. S. 279} \right)$ nicht mehr zulässig sind, weshalb nun für Bayern die Aufgabe vorliegt, unter Wahrung der alten Blatt-Einteilung der lithographierten Steuerblätter, in geeigneter Weise die Vermessung den neueren Anforderungen anzupassen.

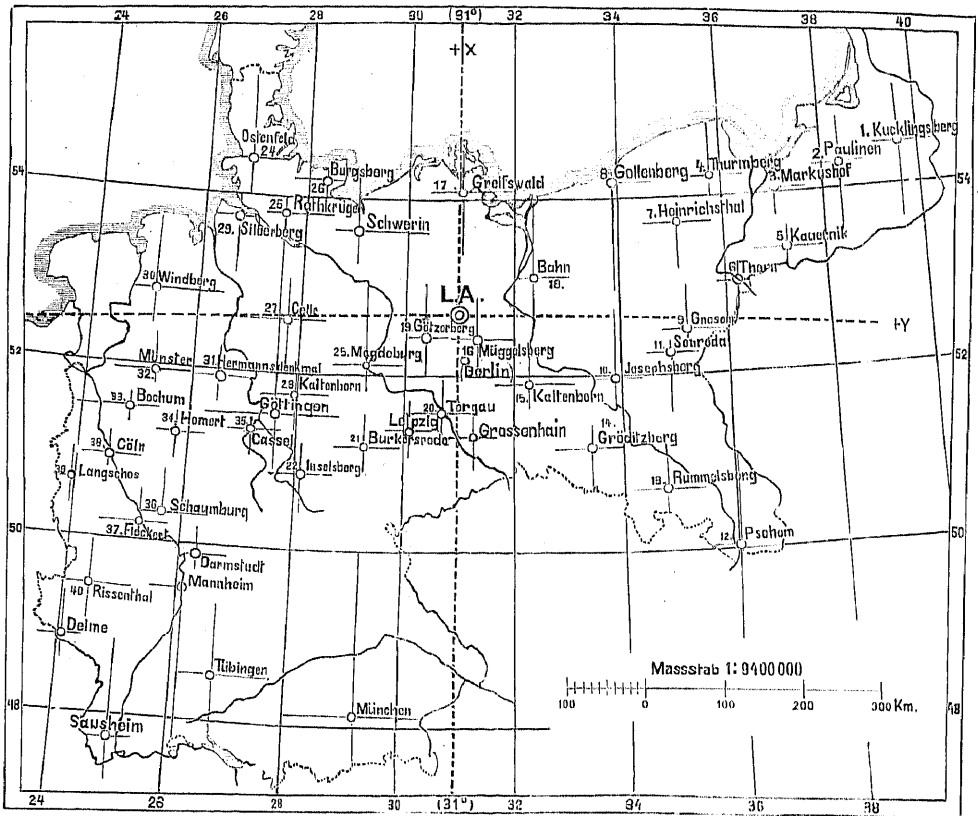
Württemberg.

Die Sternwarte von Tübingen als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems, und der Meridian von Tübingen, als *x*-Axe, wurde von *Bohnenberger* schon im vorigen Jahrhundert für seine Karte von Schwaben angenommen, das dabei orientierende Azimut Tübingen-Kornbühl wurde schon 1792 gemessen, und auch bis heute beibehalten, obgleich die Messung von 1819 eine Änderung um $15''$ ergab, so dass also das heutige Württembergische System um $15''$ gegen den Meridian von Tübingen verdreht ist.

Die ersten *Bohnenbergerschen* rechtwinkligen Coordinaten im vorigen Jahrhundert waren als *eben* berechnet, was bei der damaligen geringen Winkelgenauigkeit ganz am Platze war; für die spätere *sphärische* Berechnung solcher Coordinaten giebt *Bohnenberger* selbst seinen süddeutschen Nachbar *Soldner* als Urheber an. Dagegen die Berechnung der *geographischen* Coordinaten aus rechtwinkligen Coordinaten hat *Bohnenberger* schon im Jahre 1802 ebenso genau gemacht, als es heute geschieht. (Alles, was wir hierüber Geschichtliches finden konnten, haben wir gesammelt und veröffentlicht in „*Jordan-Steppes*, Deutsches Vermessungswesen, 1882“, I. S. 244—250.)

Fig. 1.

Die rechtwinkligen Koordinaten-Systeme des Deutschen Reichs.



1810	Baiern,	Coordinaten-Nullpunkt	München,
1792—1820	Württemberg	"	Tübingen,
1820—1840	Baden	"	Mannheim,
1830	Hessen-Darmstadt	"	Darmstadt,
1820—1840	Hannover	"	Göttingen,
1853	Kurhessen	"	Kassel,
1855	Nassau	"	Schaumburg,
1880	Mecklenburg	"	Schwerin,
1881	Preussen, 40 Coordinaten-Nullpunkte der Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881,		
1885	Sachsen,	Coordinaten-Nullpunkte	Grossenhain und Leipzig,
1889	Elsass-Lothringen	"	Delme und Sausheim.

1876 Allgemeines Coordinaten-System der trigonometrischen Abteilung der Preussischen Landes-Aufnahme Nullpunkt (L. A.) auf dem 31ten Längengrad und auf der Breite $52^{\circ} 42' 2,59251''$.

Baden.

Die topographische Vermessung des Grossherzogtums Baden wurde schon frühe auf ein rechtwinkliges Koordinaten-System bezogen, mit der Sternwarte in Mannheim als Nullpunkt und mit dem Meridian von Mannheim als x -Axe. Das zur Orientierung dienende Azimut Mannheim-Speyer (vgl. § 47. S. 267—268) ist schon im Jahre 1820 von *Nicolai* gemessen worden. Die Koordinaten waren früher als *eben* berechnet; das heutige sphärische rechtwinklige System der badischen Katastervermessung stammt etwa aus der Zeit von 1840 (vgl. *Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen I.“ S. 274).

Hessen-Darmstadt.

In dem „Gesetz, die Vollendung des Immobilien-Katasters betreffend“ und Instruktion vom 30. Juni 1824, wird in Art. 3. bestimmt: „Sphäroidische Koordinaten, der Meridian von Darmstadt soll hiefel als Hauptaxe angenommen werden“. Über einige Eigentümlichkeiten der Hessischen rechtwinkligen Koordinaten haben wir in *Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen I.“ S. 289, berichtet.

Hannover.

Für die Hannoversche Landesvermessung hat *Gauss* schon frühzeitig ein rechtwinkliges sphäroidisches konformes Koordinaten-System mit dem Ursprung Göttingen und dem Meridian von Göttingen als x -Axe angeordnet, dessen Theorie wir in erster Näherung in § 51. u. § 52. S. 281—287 behandelt haben. Dieses *Gauss'sche* System wurde nun nach 1860 in 31 Partialsysteme zerfällt, mit Berücksichtigung der linearen Verzerrung der Projektion und der Meridian-Konvergenz. (Einiges weitere hierüber haben wir in der „Zeitschr. des Ing. und Arch.-Vereins zu Hannover, 1888“, S. 150 156 mitgeteilt.)

Kurhessen.

Die Triangulierung von *Gerling* (s. o. S. 181) hatte kein rechtwinkliges Koordinaten-System, dagegen wurden die Längen und Breiten aller 48 Hauptpunkte im Anschluss an Göttingen berechnet (*Gerling*, „Beiträge zur Geographie Kurhessens, Cassel 1839“, S. 200—204). An diese geographischen Koordinaten wurden dann von den Kataster-Behörden rechtwinklige Partial-Systeme angeschlossen, mit dem Kirchthurm der jeweiligen Gemarkung als Ursprung und dem Meridian des jeweiligen Kirchthurms als x -Axe. Wo der Anschluss an die Haupt-Triangulierung fehlte, wass man eine kleine Basis mit Messlaten und ein Azimut durch korrespondierende Sonnenhöhen, für jede Gemarkung besonders.

Als um das Jahr 1853 die General-Katastervermessungen in den Provinzen Hanau und Fulda ausgeführt und auf das übrige Hessen ausgedehnt werden sollten, wurden die geographischen Koordinaten der für Kataster-Vermessungen brauchbaren trigonometrischen Punkte in rechtwinklige sphärische Koordinaten für den Indifferenzpunkt Cassel, Marlinsturm, umgerechnet.

(Vorstehendes ist zusammengestellt aus gütiger Mitteilung von Herrn Landesvermessungsrat *Kaupert*, sowie *Gehrmann*, in *Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen II.“, S. 105.)

Thüringen-Gotha.

In einer Schrift „Über die Ergänzung der topographischen Aufnahme und Kartierung von Deutschland in Bezug auf Thüringen, von *C. Fehren. von Gross*, Kammerherrn etc., Weimar 1848“ ist auf S. 83—72 eine von dem Astronomen und Geodäten *Hansen* in Gotha verfasste „Instruktion für die Ausführung der Triangulation“ veröffentlicht, welche in mancher Beziehung interessant ist, und in Hinsicht auf Coordinaten eine Meridian- x -Axe annimmt, von welcher die geographischen Längen nach Osten + 10', + 20' u. s. w., nach Westen - 10', - 20' u. s. w. gezählt werden. Auf diesem Meridian ist die Polhöhe 50° 36' als Nullpunkt für die Abscissen x bestimmt. Die rechtwinkligen Coordinaten werden zuerst genähert als *eben* berechnet, ξ, η , S. 51, worauf noch Korrekturen von

der Ordnung $\frac{s^3}{2r^2}$ ($S. 53 \quad Q' := \frac{1}{2r^2}$) hinzukommen, wodurch Coordinaten x, y erhalten werden, „auf der krummen Oberfläche der Erde, jedoch in einem etwas anderen Sinne, wie man diese Coordinaten früher aufgefasst hat“ (S. 53). Die Theorie dieser Coordinaten wird nicht mitgeteilt, die angegebenen Formeln (S. 53) sind in Bezug auf x und y *symmetrisch* (was bei den *Soldner'schen* Formeln nicht der Fall ist) und können durch Zufügung weiterer einfacher Glieder ebenfalls von der Ordnung $\frac{s^3}{r^2}$ (S. 72) in die rechtwinkligen ebenen Coordinaten der stereographischen Projektion übergeführt werden.

In den neueren Mitteilungen über die Thüringischen Vermessungen (*Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen, II.“, S. 460—476) wird diese *Hansen'sche* Instruktion von 1848 nicht erwähnt; es ist möglich, dass dieselbe mit ihren eigenartigen Coordinaten x, y überhaupt nur Entwurf geblieben ist.

Nassau.

Das Herzogtum Nassau hat etwa um 1855 ein rechtwinkliges System mit dem Ursprung *Schaumburg* nach *Soldner's* Theorie angenommen. (Weiteres s. „Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 315—316.)

Mecklenburg-Schwerin.

Die Landes-Vermessung hat etwa seit 1880 ein rechtwinkliges Koordinaten-System mit dem Schlossthurm von Schwerin als Ursprung und dem Meridian des Schlossthurms als x -Axe. Dieses rechtwinklige Koordinaten-System ist nicht das *Soldner'sche* oder *Gauss'sche*, sondern es beruht auf einer konformen *Kegel*-Abbildung und Abwicklung des Kegels in die Ebene.

Die amtlichen Quellen hiefür haben wir schon in unserem § 27. S. 187 angegeben und zitieren für das rechtwinklige Coordinaten-System noch besonders: „Gr. Meckl. Landes-Vermessung, II. Teil, 1882“, S. VII—VIII und „Zeitschr. f. Verm. 1883“, S. 363.

Preussen.

Die rechtwinkligen Coordinaten-Systeme grösserer Ausdehnung haben in Preussen verhältnissmässig spät Eingang gefunden. In der Broschüre von General *Baejer* „Mein Entwurf zur Anfertigung einer guten Karte u. s. w., Berlin 1868“, welche für die geschichtliche Entwicklung des Preussischen Vermessungswesens die beste Quelle ist, werden die rechtwinkligen Coordinaten-Systeme, welche damals schon seit einem halben Jahrhundert sich in Süddeutschland bewährt hatten, nicht erwähnt.

Die „Anweisung vom 7. Mai 1868 für das Verfahren bei den Vermessungs-Arbeiten in den Provinzen Schleswig-Holstein, Hannover und Hessen-Nassau, zweite Ausgabe, Berlin 1870“, sagt in § 40. S. 35: „Zum Zwecke des weiteren Gebrauches der trigonometrischen Messungen ist die Lage der Dreieckspunkte gegeneinander nach rechtwinkligen Coordinaten zu berechnen, welche auf die wirkliche Mittagslinie eines nach der Bestimmung des Katasterinspektors hiezu zu wählenden geeigneten Punktes zu beziehen sind.“

Die „Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881, für die trigonometrischen und polygonometrischen Arbeiten bei Erneuerung der Karten und Bücher des Grundsteuerkatasters, Berlin 1881, R. v. *Deckers* Verlag“, giebt in dem Anhang S. 337—351 die „Bestimmungen vom 23. Dezember 1879 über den Anschluss der Spezial-Vermessungen an die trigonometrische Landes-Vermessung“. Dadurch werden 40 *Coordinaten-Nullpunkte* festgestellt, die wir in unserer Übersichtskarte S. 344 aufgezeichnet haben. (Die geographischen Coordinaten dieser 40 Nullpunkte mit ihren Geltungsbereichen sind u. A. auch abgedruckt in der „Zeitschr. f. Verm. 1884“, S. 22.)

Sachsen.

Im Bereiche des Königreichs Sachsen sind auf unserer Übersichtskarte zwei Punkte, *Grossenhain* und *Leipzig* eingetragen, und zwar nach einer Mitteilung von Geh. Regierungsrat *Nagel* vom 5. Mai 1889, wonach als eigentlicher Nullpunkt für Sachsen der Pfeiler für den Basis-Zwischenpunkt ist, welcher den Namen *Grossenhain* führt. Der Pfeiler *B. Leipzig* auf der Pleissenburg in Leipzig gilt nur als Coordinatenanfang für die Leipziger Stadt-Vermessung.

Elsass-Lothringen.

Für die Kataster-Vermessung von Elsass-Lothringen wurden zwei Coordinaten-Nullpunkte angenommen, *Delme* und *Saasheim*, worüber eine erste Mitteilung von Vermessungs-Kontrolleur *Rodenbusch* gemacht wurde in der „Zeitschr. f. Verm. 1888“, S. 545—552. Die amtlichen Angaben hiezu sind enthalten in dem Werke: „Anweisung vom 30. Januar 1889 für das Verfahren bei der Stück-Vermessung von Gemarkungen zum Zwecke der Errichtung von Kataster-Urkunden, Strassburg 1889, Seite 9“.

Überblickt man alle diese im Laufe von fast einem Jahrhundert angelegten Coordinaten-Systeme unseres Vaterlandes, so sieht man sofort, dass ihre Anlage nicht auf einer mathematisch-geodätischen Überlegung beruht, sondern, wie so vieles andere geschichtlich Gewordene, sozusagen dem Zufall, oder mit anderen Worten den unberechenbaren, in Verwaltungsbehörden u. s. w. wirkenden Ursachen seine heutige Form verdankt.

Auffällig ist u. A. bei den neueren Festsetzungen, dass niemals ein Meridian mit runder Länge als lang durchlaufende Abscissenaxe genommen ist, obgleich z. B. Celle, Kaltenborn und Inselsberg, oder Gollenberg und Josephsberg zusammen nahezu auf einem Meridian und nahe einem Meridian mit runder Länge liegen, so dass ein in Bezug auf x unbegrenztes System, wie wir es beispielsweise in (23)—(24) § 64. S. 336 berechnet haben, sich sehr empfohlen haben würde.

Das allgemeine konforme Coordinaten-System der preussischen Landes-Aufnahme.

Unabhängig von all den vorgenannten Landes- und Provinzial-Coordinaten-Systemen haben wir noch *ein* von der trigonometrischen Abteilung der Landes-Aufnahme über ganz Preussen gelegtes rechtwinkliges konformes Coordinaten-System, dessen x -Axe der 31^{te} Längengrad ist, mit dem Nullpunkt auf der Breite $52^{\circ} 42' 2,53251''$ (entsprechend $42^{\circ} 40'$ Breite auf der Kugel der *Gauss'schen* konformen Abbildung), der Nullpunkt dieses Systems ist auf unserer Karte S. 344 durch L.A. (Landes-Aufnahme) angedeutet. Zur Theorie sei hier nur bemerkt, dass unsere früheren, in § 51. entwickelten Formeln

die fragliche Theorie in erster Näherung darstellen. Die erste Mitteilung, welche über dieses grosse rechtwinklige Coordinaten-System in die Öffentlichkeit gekommen ist, besteht in dem Abschnitt, welchen General *Schreiber* veröffentlichen liess in dem Werke: „Deutsches Vermessungswesen von *Jordan-Steppes*, Stuttgart 1882, I.“ S. 151—154. Weiteres hierüber werden wir später behandeln.

Anmerkung zu § 62.—§ 66.

Wir haben in § 62.—65. mit möglichst wenig Theorie unsere früheren Entwicklungen so weit geführt, als zum Verständnis der deutschen Landes-Vermessungen mit ihren in § 66. beschriebenen Coordinaten-Systemen im allgemeinen nötig ist.

Insbesondere für Preussische Verhältnisse sei bemerkt, dass damit alles erledigt ist, was an höherer Geodäsie zur Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881 gebraucht wird.

Wer als Feld- und Landmesser dieses Ziel auf möglichst kurzem Wege erreichen will, kann von unseren vorhergehenden Theorien zunächst die Abschnitte § 44., § 51.—52., § 55.—61. übergehen, insofern diese Abschnitte hauptsächlich Vorbereitung für die weitergehenden Theorien sind, zu denen wir nun mit § 67. uns wenden.

§ 67. Einführung eines sphärischen Hilfsdreiecks. *)

Nachdem wir schon in § 62. und § 63. ein sphärisches Hilfsdreieck benützt hatten, wollen wir den damals schon benützten Gedanken nun weiter ausführen.

Hiezu sind in Fig. 1. die Verhältnisse ausführlich dargestellt:

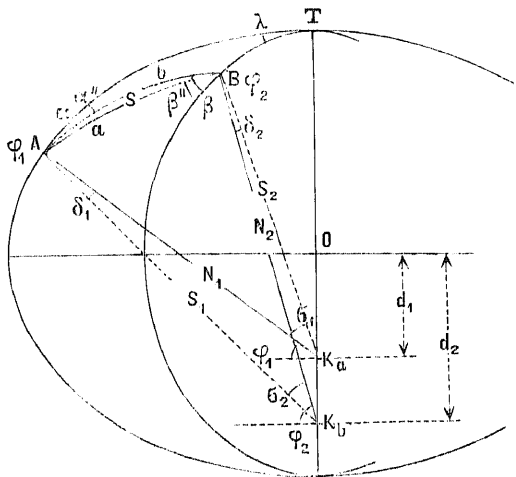
A und B sind zwei Punkte des Umdrehungs-Ellipsoids, auf zwei Meridianen TA und TB , welche bei T den Längenunterschied λ zwischen sich fassen.

Die Breite von A sei φ_1 und die Breite von B sei φ_2 ; ferner sei AK_a die Normale von A und AK_b die Normale von B ; die Axenschnitte K_a und K_b fallen nicht zusammen, wenn nicht etwa $\varphi_1 = \varphi_2$ ist.

Die Breiten φ_1 und φ_2 kommen bei K_a und K_b zum Ausdruck, denn es ist:

$$\begin{aligned} \text{Winkel } AK_aT &= 90^\circ - \varphi_1 \\ BK_bT &= 90^\circ - \varphi_2 \end{aligned}$$

Fig. 1.



*) Den Grundgedanken eines solchen sphärischen Hilfsdreiecks, mit dem Centrierungswinkel δ , fanden wir in der Abhandlung „De computandis dimensionibus trigonometricis, in superficie terrae sphäroidica institutis etc. von Joan. Theophil. Friedr. *Bohnenberger*, Tübingae 1826, § 4.—9.“, deren Hauptinhalt in unserer vorigen Auflage, 1878, § 65.—70. enthalten war. (Dieselbe ist inzwischen auch vollständig ins Deutsche übersetzt worden von *Hammer*: „Die Berechnung der trig. Vermessungen u. s. w., Stuttgart 1885.)

Unsere neue Bearbeitung geht über die *Bohnenbergersche* Abhandlung erheblich hinaus, und führt zu neuen und selbständigen Ergebnissen.

Diesem entsprechen die in Fig. 1. eingeschriebenen Zeichen q_1 und q_2 , und es ist nur zu q_2 , sowie auch zu den sich selbst erklärenden Winkeln δ_1 und δ_2 sowie σ_1 und σ_2 zu bemerken, dass diese Zeichen zu den in *verschiedenen Ebenen* liegenden Winkeln gehören, und nicht etwa als Projektionen aufzufassen sind.

Ein Theodolit, in A richtig aufgestellt, wird seine vertikale Axe nach $A K_a$ gerichtet haben, und die Sicht nach B wird in $A a B$ erfolgen unter dem Azimut α . Zieht man auch noch $K_a B$, so ist das zwar nicht Normale in B , allein man hat nun doch ein Dreikant $K_a, A B T$ mit der Spitze K_a , auf welches die sphärische Trigonometrie angewendet werden kann; die Seiten und Winkel dieses Dreikants, bzw. sphärischen Dreiecks, sind:

Eckpunkte	A	B	T'	A	} (1)
Winkel	α	$180^\circ - \beta''$	λ		
Seiten	σ_1	$90^\circ - (q_2 - \delta_2)$	$90^\circ - q_1$		

In gleicher Weise kann man auch ein Dreikant mit der Spitze K_b bilden:

Eckpunkte	A	B	T'	A	} (2)
Winkel	α''	$180^\circ - \beta$	λ		
Seiten	σ_2	$90^\circ - q_2$	$90^\circ - (q_1 + \delta_1)$		

Sobald je drei von diesen Stücken der Gruppen (1) und (2) gegeben sind, lassen sich die übrigen berechnen, und es ist wohl alles nach dem bisherigen geometrisch klar, mit Ausnahme der Winkel α'' und β'' .

Während α und β zweifellos *Azimute* sind, d. h. Winkel zwischen Normalenschnitten und einem Meridiane, und zwar sowohl für das Ellipsoid als auch für die beiden sphärischen Dreiecke, in welchen α und $180 - \beta$ vorkommen, ist dieses bei α'' und β'' nur noch der Fall für die *sphärischen* Hilfsdreiecke, aber nicht mehr für das Ellipsoid.

Z. B. der Winkel α'' kann als Azimut des Schnittes $A b B$ in A bezeichnet werden, allein nur bei Annahme eines fingierten Erdmittelpunktes K_b , welcher gar nicht in der Normalen von A liegt.

In Bezug auf das Ellipsoid hat der ebene Schnitt $A b B K_b$ im Punkte A überhaupt kein Azimut in dem gewöhnlichen Sinne, und wenn man dem Bogen $A b B$ dennoch auch in A ein ellipsoidisches Azimut zuteilen will, so kann man nur die *Tangente* des Bogens $A b B$ in A betrachten, indem man durch diese Tangente und die Normale $A K_a$ eine Ebene legt, welche mit der Meridian-Ebene $A T'$ einen *anderen* Winkel α' bildet (der in Fig. 1. *nicht* angegeben ist).

Man kann schon jetzt überblicken, dass die beiden hier genannten Winkel α' und α'' nur sehr wenig von einander verschieden sind; dieses wird später (in § 69.) auseinandergesetzt werden; zunächst kam es nur darauf an, die geometrischen Begriffe völlig klar zu legen.

Nach diesem wollen wir an die Bestimmung der beiden kleinen Winkel δ_1 und δ_2 und der excentrischen Entfernungen S_1 und S_2 gehen.

Hiezu brauchen wir die mit d_1 und d_2 in Fig. 1. eingeschriebenen Abstände der Schnitte K_a und K_b vom Mittelpunkt des Ellipsoids.

Wenn y_1 die Ordinate von A ist, in dem Sinne der früheren Fig. 1. § 33. S. 208, und N_1 die Normale oder der Quer-Krümmungshalbmesser $A K_a$, so ist mit den Bezeichnungen von § 33. S. 210:

$$d_1 = N_1 \sin \varphi_1 - y_1, \quad N_1 = \frac{c}{V_1}, \quad y = \frac{c(1-e^2) \sin \varphi_1}{V_1} \quad (3)$$

also:
$$d_1 = e^2 \frac{c \sin \varphi_1}{V_1}$$

und entsprechend:
$$d_2 = e^2 \frac{c \sin \varphi_2}{V_2}$$

also:
$$d_2 - d_1 = e^2 c \left(\frac{\sin \varphi_2}{V_2} - \frac{\sin \varphi_1}{V_1} \right) \quad (4)$$

Das schmale Dreieck $AK_a K_b$ von Fig. 1. giebt mit Verlängerung von AK_a :

$$\tan \delta_1 = \frac{(d_2 - d_1) \cos \varphi_1}{N_1 + (d_2 - d_1) \sin \varphi_1} = \frac{e^2 \left(\frac{V_1}{V_2} \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \right) \cos \varphi_1}{1 + e^2 \left(\frac{V_1}{V_2} \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \right) \sin \varphi_1} \quad (5)$$

Die entsprechende Formel für δ_2 ist:

$$\tan \delta_2 = \frac{e^2 \left(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \frac{V_2}{V_1} \right) \cos \varphi_2}{1 - e^2 \left(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \frac{V_2}{V_1} \right) \sin \varphi_2} \quad (6)$$

In ähnlicher Weise kann man auch die Entfernung S_1 nach Fig. 1. bestimmen:

$$S_1^2 = N_1^2 + (d_2 - d_1)^2 + 2 N_1 (d_2 - d_1) \sin \varphi_1$$

Mit Rücksicht auf (3) und (4) giebt dieses:

$$\left(\frac{S_1}{N_1} \right)^2 = 1 + 2 e^2 \left(\sin \varphi_2 \frac{V_1}{V_2} - \sin \varphi_1 \right) \sin \varphi_1 + e^4 \left(\sin \varphi_2 \frac{V_1}{V_2} - \sin \varphi_1 \right)^2 \quad (7)$$

und für die andere Entfernung S_2 :

$$\left(\frac{S_2}{N_2} \right)^2 = 1 - 2 e^2 \left(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \frac{V_2}{V_1} \right) \sin \varphi_2 + e^4 \left(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \frac{V_2}{V_1} \right)^2 \quad (8)$$

Diese Formeln (5), (6), (7), (8) sind streng richtig, und lassen sich auf beliebige Breiten φ_1 und φ_2 anwenden, wobei für $\log V_1^2$ und $\log V_2^2$ die Hilfstafel auf S. [2]—[22] unseres Anhangs angewendet werden kann

Indessen für kleine Breiten-Unterschiede empfiehlt sich Reihen-Entwicklung, zu welcher es nützlich ist, zuvor noch Umwandlungen vorzunehmen. Mit unseren gewöhnlichen Bezeichnungen, und weil $1 - e^2 \sin^2 \varphi_2 = (1 - e^2) V_2^2$ ist, können wir (6) so schreiben:

$$\tan \delta_2 = \frac{e'^2 \cos \varphi_2}{V_2^2} \frac{\left(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \frac{V_2}{V_1} \right)}{1 + e'^2 \frac{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2}{V_1 V_2}} \quad (9)$$

Die Reihen-Entwicklung macht sich am besten, wenn man die Mittelbreite einführt:

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi \quad \text{mit} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta \varphi \quad (10)$$

Zugleich setzen wir wie gewöhnlich:

$$\tan \varphi = t, \quad e'^2 \cos^2 \varphi = \eta^2 \quad (11)$$

Damit erhält man:

$$\frac{V^2}{V_2^2} = 1 + \eta^2 \frac{\Delta \varphi}{V^2} t$$

$$\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \frac{V_2}{V_1} = \Delta \varphi \cos \varphi - \frac{\Delta \varphi^3}{24} \cos \varphi + \eta^2 \frac{\Delta \varphi}{V^2} \sin \varphi t - \eta^2 \frac{\Delta \varphi^2}{2} \cos \varphi t$$

Das übrige von (9) giebt sich leicht, und wenn man noch berücksichtigt, dass $1 - \eta^2 = \frac{1}{1 + \eta^2} = \frac{1}{V^2}$, so findet man aus (9):

$$\delta_2 = \eta_2^2 \frac{\Delta \varphi}{V^2} \left\{ 1 - \frac{\Delta \varphi}{2 V^2} t - \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta \varphi}{V^2} \right)^2 \right\} \quad (12)$$

Hier ist $V^2 = 1 + \eta^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi$ mit φ als *Mittelbreite*; wenn man nach (10) statt φ überall φ_1 oder φ_2 einführt, so kann man statt (12) noch folgende zwei andere Formen finden:

$$\delta_2 = \eta_1^2 \frac{\Delta \varphi}{V_1^2} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{\Delta \varphi}{V_1^2} t_1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\Delta \varphi}{V_1^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta \varphi}{V_1^2} \right)^2 t_1^2 \right\} \quad (13)$$

$$\delta_2 = \eta_2^2 \frac{\Delta \varphi}{V_2^2} \left\{ 1 + \frac{\Delta \varphi}{2 V_2^2} t_2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta \varphi}{V_2^2} \right)^2 \right\} \quad (14)$$

Dieselben Formeln (12), (13), (14) kann man auch zur Bestimmung von δ_1 benutzen, denn es ist schon aus (5) und (6) zu ersehen, dass δ_1 und $-\delta_2$ gegenseitig ineinander übergehen, wenn man φ_1 und φ_2 gegenseitig vertauscht (also auch $\Delta \varphi$ negativ nimmt). Auf diese Weise erhält man aus (12), (13), (14):

$$\delta_1 = \eta^2 \frac{\Delta \varphi}{V^2} \left\{ 1 + \frac{\Delta \varphi}{2 V^2} t - \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta \varphi}{V^2} \right)^2 \right\} \quad (12^*)$$

$$\delta_1 = \eta_2^2 \frac{\Delta \varphi}{V_2^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta \varphi}{V_2^2} t_2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\Delta \varphi}{V_2^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta \varphi}{V_2^2} \right)^2 t_2^2 \right\} \quad (13^*)$$

$$\delta_1 = \eta_1^2 \frac{\Delta \varphi}{V_1^2} \left\{ 1 - \frac{\Delta \varphi}{2 V_1^2} t_1 - \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta \varphi}{V_1^2} \right)^2 \right\} \quad (14^*)$$

In gleicher Weise kann man auch die Ausdrücke für $\frac{S_1}{N_1}$ und $\frac{S_2}{N_2}$ nach (7) und (8) in Reihen entwickeln; da wir aber δ_1 und δ_2 bereits entwickelt haben, können wir auch diese zur Entwicklung von $\frac{S_1}{N_1}$ und $\frac{S_2}{N_2}$ benutzen, denn es ist z. B. nach Fig. 1.:

$$\frac{S_2}{N_2} = \frac{\sin(90^\circ - \varphi_2)}{\sin(90^\circ - (\varphi_2 - \delta_2))} = \frac{\cos \varphi_2}{\cos(\varphi_2 - \delta_2)} = 1 - \delta_2 \tan \varphi_2 + \dots \quad (15)$$

Hier ist $\varphi_2 = \varphi + \frac{\Delta \varphi}{2}$, also mit $\tan \varphi = t$:

$$\tan \varphi_2 = t + \frac{\Delta \varphi}{2} (1 + t^2)$$

Nimmt man hiezu aus (12) abgekürzt:

$$\delta_2 = \eta^2 \frac{\Delta \varphi}{V^2} - \frac{\eta^2}{2} \Delta \varphi^2 t$$

so wird beim Einsetzen in (15) ein Glied mit $\Delta \varphi^2 t^2$ fortfallen und man hat:

$$\frac{S_2}{N_2} = 1 - \eta^2 \frac{\Delta \varphi}{V^2} t - \eta^2 \frac{\Delta \varphi^2}{2} + \dots \quad (16)$$

Wenn man in diesem Sinne weiter entwickelt,*) so findet man auf $\eta^4 Aq^2$ und $\eta^2 Aq^3$ einschliesslich genau:

$$\frac{S_2}{N_2} = 1 - \eta^2 \frac{Aq}{V^2} t - \frac{\eta^2}{2} \left(\frac{Aq}{V^2} \right)^2 (1 - \eta^2 t^2) + \frac{\eta^2}{6} \left(\frac{Aq}{V^2} \right)^3 t \quad (17)$$

Durch Zeichen-Änderung bekommt man hieraus auch:

$$\frac{S_1}{N_1} = 1 + \eta^2 \frac{Aq}{V^2} t - \frac{\eta^2}{2} \left(\frac{Aq}{V^2} \right)^2 (1 - \eta^2 t^2) - \frac{\eta^2}{6} \left(\frac{Aq}{V^2} \right)^3 t \quad (18)$$

In diesen beiden Formeln (17) und (18) bezieht sich $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ und $t = \tan \varphi$ auf die *Mittelbreite* φ nach (10).

Zu einem Zahlen-Beispiel nehmen wir:

$$\text{also} \quad \left. \begin{array}{l} \varphi_1 = 49^\circ 30' \\ \varphi = 50^\circ 0' \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \varphi_2 = 50^\circ 30' \\ Aq = 1^\circ = 3600' \end{array} \right\} \quad (19)$$

Damit wurde sowohl nach den geschlossenen Formeln als nach den verschiedenen Reihen berechnet:

$$\delta_1 = 10,06\,958'' \quad \delta_2 = 9,86\,285'' \quad (20)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{S_1}{N_1} = 1,000\,057\,1638 \\ \log \frac{S_1}{N_1} = 0,000\,0248\,252 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{S_2}{N_2} = 0,999\,941\,9985 \\ \log \frac{S_2}{N_2} = 9,999\,9748\,096 \end{array} \right\} \quad (21)$$

Wir haben auch noch die beiden unter (1) und (2) erwähnten sphärischen Dreiecke nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie ((4) und (5) S. 295) aufgelöst und gefunden:

I. Sphärisches Dreieck mit dem Kugelmittelpunkt K_n .

$$\varphi_1 = 49^\circ 30' 0'' \quad \varphi_2 = \delta_2 = 50^\circ 29' 50,13715'' \quad (22)$$

$$\lambda = 1^\circ 0' 0''$$

$$\alpha = 32^\circ 25' 21,5294'' \quad \beta'' = 33^\circ 11' 19,3674'' \quad (23)$$

$$\sigma_1 = 1^\circ 11' 11,22\,445'' \quad (24)$$

II. Sphärisches Dreieck mit dem Kugelmittelpunkt K_n .

$$\varphi_1 + \delta_1 = 49^\circ 30' 10,06958'' \quad \varphi_2 = 50^\circ 30' 0'' \quad (25)$$

$$\lambda = 1^\circ 0' 0''$$

$$\alpha'' = 32^\circ 25' 21,4739'' \quad \beta = 33^\circ 11' 19,4237'' \quad (26)$$

$$\sigma_2 = 1^\circ 11' 10,97855'' \quad (27)$$

Hieraus ziehen wir auch die Differenzen:

$$\alpha - \alpha'' = 0,0555'' \quad \beta - \beta'' = 0,0563'' \quad (28)$$

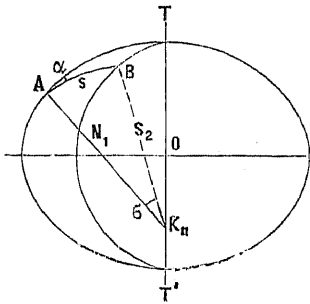
Das sphäroidische Dreieck, das durch die beiden Breiten $\varphi_1 = 49^\circ 30'$, $\varphi_2 = 50^\circ 30'$ und durch $\lambda = 1^\circ 0'$ bestimmt ist, werden wir als kleines sphäroidisches Normal-Beispiel noch mehrfach benützen.

) Die nächsten Anwendungen, welche wir von den Entwicklungen (17), (18), sowie (12) — (14) zu machen haben, bedürfen der Glieder von der Ordnung Aq^3 nicht, und zu vielen Zwecken genügt sogar die Entwicklung nur bis $\eta^2 Aq$ bei δ und $\eta^2 Aq^2$ bei S . Indessen werden wir auch von den höheren Gliedern später noch Gebrauch machen.

§ 68. Ellipsenbogen eines Normalschnittes.

In Fig. 1. haben wir von der früheren Fig. 1. § 67. S. 347 einen Teil kleiner herausgezeichnet, nämlich alles was den Normalschnitt AB betrifft, der durch die Normale AK_a und durch den Punkt B geht.

Fig. 1.
Normalschnitt $AK_a B$.



Dass der Bogen AB ein *Ellipsenbogen* ist, weiss man aus der Natur des Ellipsoids, das durch eine Ebene $AK_a B$ nur nach einem solchen Bogen geschnitten werden kann; und um die Bogenlänge $AB = s$ zu bestimmen, könnte man daran denken, die ganze Schnitt-Ellipse in ihrer Ebene zu betrachten, ihre Gleichung zu bestimmen, u. s. w.

Indessen für unsere Zwecke genügt es, in erster Näherung den Bogen s mit Hilfe der bereits bekannten Länge $K_a B = S_2$ zu untersuchen, denn es ist nach (16) § 67. S. 350 zunächst genähert:

$$\frac{S_2}{N_2} = 1 - \eta^2 \frac{\Delta \varphi}{V^2} t - \frac{\eta^2}{2} \Delta \varphi^2 \quad (1)$$

Aus Fig. 1. sieht man, dass eine Beziehung von S_2 zu N_1 erwünscht ist, und deswegen vergleichen wir nach (21) S. 210:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{c}{V_1} = c \left(1 - \frac{e'^2}{2} \cos^2 \varphi_1 + e'^4 \dots \right) \\ N_2 &= \frac{c}{V_2} = c \left(1 - \frac{e'^2}{2} \cos^2 \varphi_2 + e'^4 \dots \right) \\ \frac{N_2}{N_1} &= 1 - \frac{e'^2}{2} (\cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_1) = 1 + \frac{e'^2}{2} 2 \Delta \varphi \sin \varphi \cos \varphi + \dots \\ \frac{N_2}{N_1} &= 1 + \eta^2 \Delta \varphi t \end{aligned} \quad (2)$$

Nimmt man dieses (2) mit (1) zusammen, und setzt zunächst $V^2 = 1$, so fällt das Glied mit $\Delta \varphi$ fort und man hat:

$$\frac{S_2}{N_1} = 1 - \eta^2 \frac{\Delta \varphi^2}{2} \quad (3)$$

Diese erste Näherung ist bereits zu Vielem brauchbar; man kann aber auf dem betretenen Wege noch erheblich weiter gehen; wir wollen dabei eine abkürzende Bezeichnung einführen, nämlich:

$$\frac{\Delta \varphi}{V^2} = \Delta \varphi' \quad (4)$$

wo $\Delta \varphi'$ die verkürzte Breiten-Differenz im Sinne von § 63. ist; dann hat man nach (17) § 67. S. 351:

$$\frac{S_2}{N_2} = 1 - \eta^2 \Delta \varphi' t - \frac{\eta^2}{2} \Delta \varphi'^2 (1 - \eta^2 t^2) + \frac{\eta^2}{6} \Delta \varphi'^3 t \quad (5)$$

Ferner wird entwickelt:

$$\frac{N_2}{N_1} = 1 + \eta^2 \Delta \varphi' t + \frac{\eta^4}{2} \Delta \varphi'^2 t^2 - \frac{\eta^2}{6} \Delta \varphi'^3 t \quad (6)$$

Wenn man (5) und (6) multipliziert, so findet man:

$$\frac{S_2}{N_1} = 1 - \frac{\eta^2}{2} \Delta q'^2 + \eta^4 \Delta q'^3 t \dots \quad (7)$$

d. h. man hat in (7) nahezu wieder dieselbe Form wie in (3), nur mit dem Unterschiede, dass $\Delta q'^2$ statt Δq^2 steht; dann aber ist durch die genauere Berechnung (5) und (6) bewiesen, dass in (7) Glieder von der Ordnung $\eta^2 \Delta q'^3$ und $\eta^4 \Delta q'^2$ überhaupt nicht besonders vorkommen (soweit nicht $\eta^4 \Delta q'^2$ als in $\eta^2 \Delta q'^2$ mit enthalten betrachtet wird).

Nun können wir nach (28) § 63. S. 329 setzen:

$$\frac{\Delta q}{V^2} = \Delta q' = \sigma \cos \alpha + \sigma^2 + \dots \quad (8)$$

Dabei soll für die nächsten Zwecke α in (8) als konstant gelten, was so viel bedeutet, als die Vernachlässigung der Glieder $\sigma^2 \dots$ in (8). Die Näherung (8) in (7) gesetzt, giebt:

$$\frac{S_2}{N_1} = 1 - \frac{\eta^2}{2} \sigma^2 \cos^2 \alpha \quad (9)$$

Zum nächsten Gebrauche dieser Formel soll auch η^2 als konstant gelten.

Nun sind wir genügend vorbereitet, um die Beziehung zwischen s und σ in der Schnitt-Ebene ABK_a zu untersuchen, wozu Fig. 2. besonders herausgezeichnet ist.

Durch die soeben aufgestellte Beziehung (9) zwischen S_2 und N_1 mit σ , ist die Kurve AB in Polar-Coordinationen bestimmt, und um s in σ auszudrücken, hat man nur die Bogenlänge s Schnitt-Ebene ABK_a durch Integration zu finden. Hierzu giebt Fig. 2. die Differential-Gleichung:

$$ds^2 = (S_2 d\sigma)^2 + (dS_2)^2 \quad (10)$$

Hier ist S_2 als Funktion der Veränderlichen σ nach (9) einzuführen; N_1 ist konstant, und auch α und η^2 gelten hier als konstant. Man hat daher aus (9):

$$\frac{dS_2}{d\sigma} = -N_1 \eta^2 \cos^2 \alpha \sigma, \quad (dS_2)^2 = \eta^4 \dots d\sigma^2 \quad (11)$$

Wenn wir Glieder mit η^4 nun vernachlässigen, können wir hiernach (10) mit (9) kurz so schreiben:

$$ds = S_2 d\sigma = N_1 \left(1 - \frac{\eta^2}{2} \sigma^2 \cos^2 \alpha \right) d\sigma$$

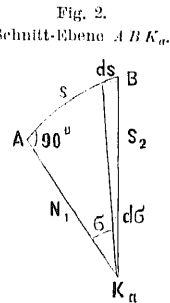
Die Integration mit den Grenzen $\sigma = 0$ und $\sigma = \sigma$ giebt:

$$s = N_1 \left(\sigma - \frac{\eta^2}{6} \sigma^3 \cos^2 \alpha \right)$$

oder auch:

$$\sigma = \frac{s}{N_1} \left(1 + \frac{\eta^2}{6} \sigma^2 \cos^2 \alpha \right) \quad (12)$$

Das Korrektionsglied beträgt $\frac{\eta^2}{6} \left(\frac{s}{N_1} \right)^3 \cos^2 \alpha \sigma''$ in Sekunden. Mit $\varphi = \alpha = 45^\circ$ und $s = 100\,000^m$ giebt dieses nur $0,0002''$ (man kann daher bei einzelnen Dreiecksseiten das zweite Glied von (12) vernachlässigen).



Wegen (8) kann man die Formel (12) auch wieder so schreiben:

$$\sigma = \frac{s}{N_1} \left(1 + \frac{\eta^2}{6} \Delta \varphi'^2 \right) \quad \text{oder} \quad s = N_1 \sigma \left(1 - \frac{\eta^2}{6} \Delta \varphi'^2 \right) \quad (13)$$

In dieser Form haben wir das Zahlen-Beispiel am Schluss von § 67. behandelt, und aus (24) und (27) S. 351 berechnet:

$$s = N_1 \sigma_1 (1 - \dots) = 132\,315,392^m - 0,019^m = 132\,315,373^m \quad (14)$$

$$s = N_2 \sigma_2 (1 - \dots) = 132\,315,394^m - 0,019^m = 132\,315,375^m \quad (15)$$

Das Korrektionsglied von (13) macht also hier nur etwa 2 Centimeter aus. Die beiden Werte s nach (14) und (15) sind innerhalb der Rechenschärfe als *gleich* zu betrachten, und wir werden später auch finden, dass sie gleich lang sind, wie die geodätische Linie zwischen A und B .

Depressionswinkel der Sehne AB .

Nachdem die Beziehung zwischen S_2 und N_1 und damit die Kurve AB ermittelt ist, kann man auch den Winkel μ angeben, welchen die Tangente AB' mit der Sehne AB bildet. Die Tangente AB' ist in A rechtwinklig zu AK , was sowohl aus der geometrischen Entstehung des Schnittes AB als auch aus dem Differential-Quotienten $\frac{dS_2}{d\sigma}$ hervorgeht, indem dieser nach (11) mit $\sigma = 0$ verschwindet.

Man hat also zur Bestimmung von μ nach Fig. 3.:

$$\begin{aligned} \tan(90^\circ - \mu) &= \frac{S_2 \sin \sigma}{N_1 - S_2 \cos \sigma} \\ \text{oder} \quad \tan \mu \sin \sigma &= \frac{N_1}{S_2} - \cos \sigma \end{aligned} \quad (16)$$

Wenn man hier die Bedeutung von $\frac{N_1}{S_2}$ nach (7) oder (9) einsetzt, und wenn man zugleich in (16) links $\tan \mu \sin \sigma = \mu \sigma$ setzt, so bekommt man:

$$\mu = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \eta^2 \cos^2 \alpha \quad \text{oder} \quad \mu = \frac{\sigma}{2} + \frac{\eta^2}{2} \Delta \varphi'^2 \quad (17)$$

In erster Näherung ist $\mu = \frac{\sigma}{2}$, d. h. der halbe Centriwinkel, was der Annahme entspricht, es sei AB ein Kreisbogen mit dem Mittelpunkt K .

Krümmungs-Halbmesser des Bogens AB .

Den Krümmungs-Halbmesser des Schnittbogens AB in dem Anfangspunkte A kennen wir bereits aus den allgemeinen Betrachtungen von § 34. und wir haben in (4) S. 214 entwickelt:

$$R = \frac{N}{1 + \eta^2 \cos^2 \alpha}, \quad \text{wo } \eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi \quad (18)$$

Diese Formel gilt für unseren Fall, wenn $N = N_1$ von Fig. 3. genommen wird.

In erster Näherung werden wir den Wert R nach (18) nicht bloss für den Anfangspunkt A der Schnittkurve AB benützen, sondern auch für irgend einen andern Punkt auf dem Verlauf von AB .

Um jedoch genau zu wissen, welche Glieder dadurch vernachlässigt werden, wollen wir den Krümmungs-Halbmesser der Schnittkurve AB nun genauer bestimmen, indem wir von der Gleichung (9) ausgehen, welche die Natur der Kurve in Polar-Coordinationen bestimmt.

Die analytische Geometrie bietet für den Krümmungs-Halbmesser R' einer Kurve in Polar-Coordinationen, mit den Bezeichnungen von Fig. 3. den strengen Ausdruck:

$$R' = S_2 \frac{\left(1 + \left(\frac{1}{S_2} \frac{dS_2}{d\sigma}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{1 + 2 \left(\frac{1}{S_2} \frac{dS_2}{d\sigma}\right)^2 - \frac{1}{S_2} \frac{d^2 S_2}{d\sigma^2}} \quad (19)$$

Wenn man hier wieder die Glieder $\left(\frac{dS_2}{d\sigma}\right)^2$, welche von der Ordnung $\eta^4 \sigma^2$ sind, vernachlässigt, und mit gleicher Näherung (9) einsetzt, so bekommt man schliesslich:

$$R' = R \left(1 - \eta^2 \sigma \cos \alpha - \eta^2 \frac{\sigma^2}{2} \cos^2 \alpha + \dots\right) \quad (20)$$

Dabei ist R der Krümmungs-Halbmesser eines Normalschnitts des Ellipsoids, in einem Punkte mit der Breite q in dem Azimut α , und R' ist der Krümmungs-Halbmesser des Schnittbogens AB Fig. 3. im Abstand σ von dem Anfangspunkt A .

§ 69. Konvergenz der beiden Normalschnitte.

Die beiden Normalschnitte, welche zwischen zwei Punkten A und B bestehen, werden wir nun näher betrachten, und insbesondere in Hinsicht auf den kleinen Azimut-Unterschied $\alpha - \alpha'$, welcher in dem einen Punkte A hervorgebracht wird (sowie entsprechend $\beta - \beta'$ in dem anderen Punkte B).

Fig. 1.

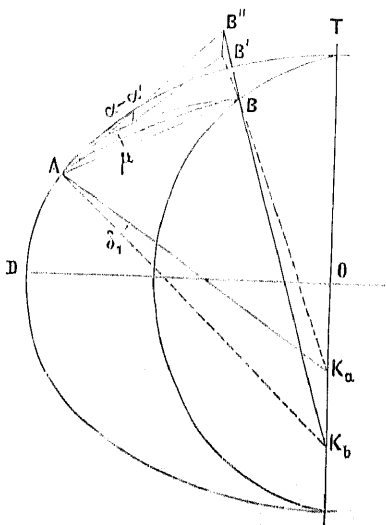
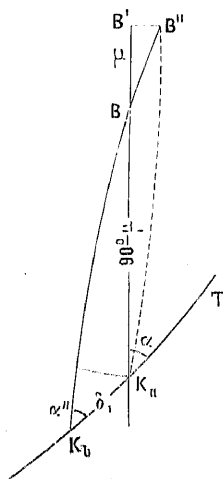


Fig. 2.



Zu diesem Zweck haben wir in vorstehender Fig. 1. im wesentlichen die Verhältnisse der früheren Fig. 1. § 67. S. 347 wiederholt, und dazu in Fig. 2. eine sphärische Figur gezeichnet, welche dadurch entsteht, dass man um A als Mittelpunkt eine Kugelfläche mit beliebigem Halbmesser beschreibt, auf welcher jeder von A ausgehende Strahl sich als Punkt, und jede von A ausgehende Ebene sich als Grosskreisbogen zeigt.

Wir haben auch alle Punkte in Fig. 2. mit denselben Buchstaben bezeichnet, welche auf den entsprechenden Strahlen von Fig. 1. vorkommen, so dass also B in Fig. 2. dem Strahle AB von Fig. 1., K_a in Fig. 2. dem Strahle AK_a von Fig. 1. entspricht u. s. w.

Die Normalschnitt-Ebene ABK_a in Fig. 1. giebt den Bogen BK_a in Fig. 2., und die Meridian-Ebene ATK_aK_b von Fig. 1. giebt den Bogen TK_aK_b in Fig. 2., folglich ist der Winkel $BK_aT = \alpha$ das Azimut der Normalschnitt-Ebene ABK_a im Punkte A .

Weniger einfach ist das Auffinden des Azimutes α' , welches der Gegen-Normalschnitt BK_bA in A hat. Als Winkel zweier Ebenen ist dieses Azimut α' in Fig. 1. zunächst nicht vertreten, weil die Ebene BK_bA in A nicht normal ist. Allerdings bildet diese Ebene BK_bA mit der Meridian-Ebene von A einen gewissen Winkel α'' , welchen wir schon in Fig. 1. § 67. S. 347 kennen gelernt haben, und von dem

wir auch schon wissen, dass er *nahezu* gleich dem Azimute α' ist; und jenen Winkel α'' finden wir in Fig. 2. leicht wieder, nämlich bei K_b zwischen dem Meridianbogen K_bK_aT und dem Gegen-Schnittbogen K_bB .

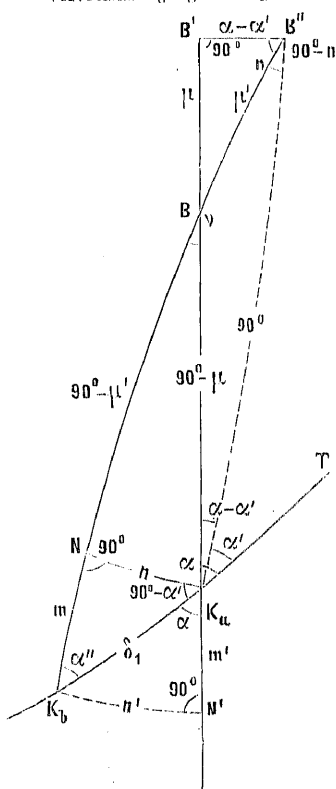
Das Gegen-Azimut α' selbst muss zunächst in Fig. 1. dadurch konstruiert werden, dass man die *Tangente* AB'' an die Gegen-Schnittkurve BA in A zieht; und wenn man gleichzeitig auch die Tangente AB' an den Schnittbogen AB in A zieht, so liegen diese beiden Tangenten in der Berührungs-Ebene des Punktes A , und fassen den kleinen Winkel $\alpha - \alpha'$ zwischen sich.

Auf diesem Wege ist die Differenz $\alpha - \alpha'$ auch leicht in Fig. 2. hinüber zu tragen; man macht den Bogen BB' entsprechend dem Depressions-Winkel μ der Sehne AB gegen die Tangente AB' , dann $B'B''$ rechtwinklig zu BB' , worauf sich B'' als Schnitt der Horizontalen $B'B''$ mit der Schiefen K_bB'' ergibt.

Indessen kann man nicht nur diese kleine Differenz $\alpha - \alpha'$, sondern auch das Azimut α' selbst in Fig. 2. auffinden, indem man den Bogen $B''K_a$ zieht, welcher der Ebene $B''AK_a$ entspricht, und mit dem Meridian K_aT das fragliche Azimut α' macht.

Um dieses und weitere Einzelheiten deutlicher zu zeigen, haben wir Fig. 3. als Vervoll-

Fig. 3.
Vervollständigung von Fig. 2.



ständigkeit von Fig. 2. gezeichnet, worin $B''K_aT = \alpha'$ das Azimut des Gegen-Normalschnittes BA in A ist.

Der soeben in Fig. 3. gezogene Bogen $B''K_a$ ist $= 90^\circ$, weil die Strahlen AB'' und AK_a in Fig. 1. als Tangente und als Normale des Ellipsoids auf einander rechtwinklig sind, und ebenso ist auch $B'K_a = 90^\circ$, also $BK_a = 90^\circ - \mu$.

Nun wollen wir noch den kurzen Bogen K_aN rechtwinklig zu $B''K_b$ ziehen, wodurch auch $B''N = 90^\circ$ und folglich der Bogen $K_aN = n$, gleich dem Winkel n bei B'' wird.

Dieses n ist der Neigungs-Winkel der Normalen AK_a gegen die Gegensechnitt-Ebene BAK_b , und eine entsprechende Neigung n' kann man $K_bN' = n'$ ebenfalls angeben, d. h. den Neigungs-Winkel n' , welchen die jenseitige Normale BK_b mit der diesseitigen Normalschnitt-Ebene ABK_a bildet.

Unsere Fig. 3. zeigt bei B den Winkel v , welchen die beiden Normalschnitt-Ebenen unter sich bilden, und endlich haben wir noch die kleine Seite $K_aK_b = \delta_1$ entsprechend dem kleinen Winkel $K_aAK_b = \delta_1$ in Fig. 1., den wir auch schon früher in Fig. 1. § 67. S. 347 kennen gelernt haben.

Nachdem wir so alle Winkel, die uns hier interessieren, in den sphärischen Dreiecken von Fig. 3. dargestellt haben, können wir alle Beziehungen, welche zwischen diesen Winkeln bestehen, durch die sphärische Trigonometrie aus Fig. 3. ableiten.

Wir gehen zuerst darauf aus, die Differenz $\alpha - \alpha''$ zu bestimmen; hiezu giebt eine Cotangenten-Gleichung der Gruppe (9) § 29. S. 195, auf das Dreieck BK_aK_b angewendet:

$$\begin{aligned} \cotg(90^\circ - \mu) \sin \delta_1 &= \cos \delta_1 \cos(180^\circ - \alpha) + \sin(180^\circ - \alpha) \cotg \alpha'' \\ \tan \mu \sin \delta_1 &= -\cos \delta_1 \cos \alpha + \sin \alpha \cotg \alpha'' \\ \tan \mu \sin \delta_1 &= \left(2 \sin^2 \frac{\delta_1}{2} - 1\right) \cos \alpha + \frac{\sin \alpha \cos \alpha''}{\sin \alpha''} \\ \tan \mu \sin \delta_1 - 2 \cos \alpha \sin^2 \frac{\delta_1}{2} &= \frac{\sin(\alpha - \alpha'')}{\sin \alpha''} \end{aligned} \quad (1)$$

Dadurch ist $\alpha - \alpha''$ bestimmt; und um auch die Differenz $\alpha'' - \alpha'$ zu finden, betrachten wir das kleine rechtwinklige Dreieck K_aK_bN , dessen sphärischer Exzess gerade zu $\alpha'' - \alpha'$ ist, denn der Winkel dieses rechtwinkligen Dreiecks bei K_a ist $= 90^\circ - \alpha'$, weil K_aB'' rechtwinklig auf K_aN steht; es ist also:

$$\alpha'' + (90^\circ - \alpha') = 90^\circ + (\alpha'' - \alpha')$$

Hiefür giebt die Hypotenusen-Formel (2) S. 194:

$$\begin{aligned} \cotg \alpha'' \cotg(90^\circ - \alpha') &= \cos \delta_1 \\ \cos \alpha'' \sin \alpha' &= \sin \alpha'' \cos \alpha' \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\delta_1}{2}\right) \\ \sin(\alpha'' - \alpha') &= 2 \sin^2 \frac{\delta_1}{2} \sin \alpha'' \cos \alpha' \end{aligned} \quad (3)$$

Nachdem durch (1) und (3) auch $\alpha - \alpha'$ bestimmt ist, erhält man aus dem oberen rechtwinkligen Dreieck $BB'B''$:

$$\tan v = \frac{\tan(\alpha - \alpha')}{\sin \mu} \quad (4)$$

und

$$\tan n = \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\tan \mu} \quad (5)$$

oder aus dem Dreieck BK_aN :

$$\sin n = \sin \nu \cos \mu \quad (6)$$

Dadurch ist n zweifach bestimmt, wie überhaupt noch manche Kontrollgleichung aus Fig. 3. abgelesen werden kann (wozu noch μ' , m und m' eingeschrieben sind). Um n und n' auch unmittelbar in δ_1 auszudrücken, hat man aus den kleinen rechtwinkligen Dreiecken $K_a K_b N$ und $K_a K_b N$:

$$\sin n = \sin \delta_1 \sin \alpha'' \quad \sin n' = \sin \delta_1 \sin \alpha \quad (7)$$

Reihen-Entwicklungen in erster Näherung.

Wenn man überall nur die ersten Näherungen haben will (welche zu vielen Zwecken ausreichen), so ist die Reihen-Entwicklung sehr einfach. Man hat nach (12*) § 67. S. 350:

$$\delta_1 = \eta^2 \frac{\Delta \varphi}{V^2} + \dots = \eta^2 \sigma \cos \alpha + \eta^2 \sigma^2 \dots \quad (8)$$

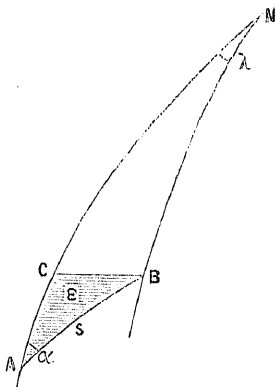
Ferner nach (17) § 68. S. 354 den Depressions-Winkel:

$$\mu = \frac{\sigma}{2} + \eta^2 \sigma \dots \quad (9)$$

Damit giebt (1) in erster Näherung:

$$\alpha - \alpha'' = \mu \delta_1 \sin \alpha = \eta^2 \frac{\sigma^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} \quad (10)$$

Fig. 4.



Hier hat der zweite Faktor die geometrische Bedeutung eines sphärischen Exzesses, wie in Fig. 4. angedeutet ist, weshalb wir setzen:

$$\frac{\sigma^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \varepsilon \quad (11)$$

Dieser Wert ε ist genähert der sphärische, oder sphäroidische Exzess eines Dreiecks ABC , welches bei C rechtwinklig ist, so dass BC nicht ein Parallel-Kreisbogen, sondern ein Bogen rechtwinklig zum Meridian ACN ist; doch kann in erster Näherung für die Fläche des Dreiecks ABC auch BC als Parallelbogen gelten.

Mit dieser Hilfs-Bezeichnung ε nach (11) lautet unsere Formel (10) kurz:

$$\alpha - \alpha'' = \eta^2 \varepsilon \quad (12)$$

Nach diesem betrachten wir die kleine Differenz $\alpha'' - \alpha'$, welche nach (3) in erster Näherung ist:

$$\alpha'' - \alpha' = \frac{\delta_1^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha = \eta^4 \varepsilon \cos^2 \alpha \quad (13)$$

Wenn wir aus (12) und (13) auch die Differenz $\alpha - \alpha'$ bilden wollen, so dürfen wir in erster Näherung nur schreiben:

$$\alpha - \alpha' = \eta^2 \varepsilon, \quad \text{d. h. } \alpha - \alpha' = \alpha - \alpha'' \quad (14)$$

Denn das Glied $\eta^4 \varepsilon \cos^2 \alpha$ nach (13) kommt neben anderen überhaupt schon in (12) vernachlässigten Gliedern von der Ordnung η^4 nicht mehr in Betracht.

Dieselbe Formel (14), welche hier für $\alpha - \alpha'$ gefunden wurde, gilt in gleicher Näherung auch für die Azimut-Differenz in dem zweiten Punkte B , also:

$$\alpha - \alpha' = \beta - \beta' = \eta^2 \varepsilon \quad (15)$$

Nimmt man beispielshalber eine Entfernung $s = 100\,000^m$ unter dem Azimut $\alpha = 45^\circ$, zugleich unter der Breite $q = 45^\circ$, so wird:

$$\varepsilon = 12,7'' \quad \alpha - \alpha' = 0,043'' \quad (15a)$$

In gleicher Weise haben wir als erste Näherung für den Winkel r , welchen die beiden Normalschnitt-Ebenen in der Sehne AB unter sich bilden, nach (4), (9) und (10):

$$r = \eta^2 \sigma \sin \alpha \cos \alpha = 2\eta^2 \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad (16)$$

Dieser Schnittwinkel r ist in Fig. 6. veranschaulicht. Denkt man sich in der Mitte der Sehne AB (Fig. 5.) eine Ebene KCD rechtwinklig gelegt, so wird diese ein nahezu gleichschenkeliges kleines Dreieck ausschneiden (Fig. 6.), dessen beide Schenkel p den Winkel r zwischen sich fassen und den Querabstand q dem Winkel r gegenüber haben. Die Schenkellänge p ist gleich der Pfeilhöhe eines Bogens s für den Halbmesser N , d. h. nach Fig. 5.:

$$p = \frac{s^2}{8N}$$

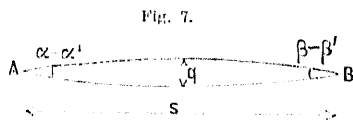
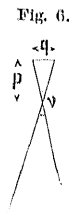
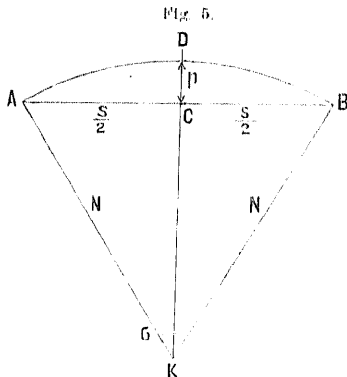
dann hat man:

$$q = p r = \frac{s^2}{8N} 2\eta^2 \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{s}{4} \eta^2 \varepsilon \quad (17)$$

Diesen Querabstand q kann man auch noch durch eine andere Betrachtung finden, indem man nach Fig. 7. die beiden Schnitt-Kurven zwischen A und B näherungsweise in einer Ebene abbildet.

Wenn man nun nichts weiter weiss, als dass bei A und B die Schnittwinkel $\alpha - \alpha' = \beta - \beta' = \eta^2 \varepsilon$ nach (15) stattfinden, und wenn man noch die Annahme macht, dass beide Kurven in Hinsicht auf Krümmung symmetrisch gegen A und B sind, so kann man, in Hinsicht auf den Querabstand q in der Mitte, den Wert $\frac{q}{2}$ berechnen als Pfeilhöhe eines Kreisbogens, welcher mit seiner Sehne AB die Winkel $\frac{\alpha - \alpha'}{2}$ und $\frac{\beta - \beta'}{2}$ beide $= \frac{\eta^2 \varepsilon}{2}$ bildet. Damit berechnet man leicht den Halbmesser dieses Kreisbogens, $R = \frac{s}{\alpha - \alpha'}$, und $\frac{q}{2} = \frac{s^2}{8R}$; dieses giebt also den Querabstand q :

$$q = \frac{s}{4} (\alpha - \alpha') = \frac{s}{4} \eta^2 \varepsilon \quad (18)$$



Die Ausrechnung mit denselben Annahmen wie bei (15) und (15a); nämlich φ und $\alpha = 45^\circ$, $s = 100\,000^m$ giebt:

$$q = 0,005^m \quad (18^*)$$

Die Berücksichtigung der Konvergenzen $\alpha - \alpha'$ bei einer Triangulierung wäre also entsprechend der Berücksichtigung einer Centrierung von 5 Millimetern auf 50 000 Meter Entfernung.

Die Formel (18) stimmt mit der früheren (17), und das mag wohl auch für die Zulässigkeit der Herleitung von (18) aus Fig. 7. eine gewisse Bürgschaft sein; wir haben jedoch diese Herleitung aus Fig. 7. nur andeutungsweise behandelt und die Annahme zweier flacher *Kreisbögen* nur in *Hinsicht auf den Querabstand q in der Mitte* als zulässig bezeichnet. Wir werden eine ähnliche ebene Abbildung mit der geodätischen Linie später gründlicher behandeln, bemerken aber jetzt schon, dass bei dieser Darstellung von zwei *Kreisbögen* die Sehne AB in Fig. 7. nicht das Abbild der geodätischen Linie AB ist.

Schärfere Entwicklung von $(\alpha - \alpha'')$ und $(\alpha - \alpha')$.

Obgleich die erste Näherung für $(\alpha - \alpha'')$ nach (13) und (14) vollständig genügt zur Beantwortung der praktisch wichtigen Frage, ob und mit welcher Annäherung man berechtigt ist, die beiden Normalschnitte zwischen zwei Punkten als zusammenfallend zu betrachten, besteht doch noch ein gewisses, mehr mathematisches Interesse, die Entwicklung für die Azimut-Differenz $\alpha - \alpha''$ bzw. $\alpha - \alpha'$ noch weiter zu treiben.

Wir haben hiezu von (1) S. 357 durch Entwicklung:

$$\alpha - \alpha'' = \left(\mu \delta_1 - \frac{\delta_1^2}{2} \cos \alpha \right) \sin \alpha \quad (19)$$

Der von der Breiten-Verkürzung herrührende Winkel δ_1 ist nach (12*) § 67. S. 350:

$$\delta_1 = \eta^2 \Delta \varphi' \left(1 + \frac{\Delta \varphi'}{2} t \right) \quad (20)$$

Dabei ist gesetzt:

$$\frac{\Delta \varphi}{V^2} = \Delta \varphi' \quad , \quad \tan \varphi = t \quad (21)$$

Der Depressions-Winkel μ ist nach (17) § 68. S. 354:

$$\mu = \frac{\sigma}{2} + \frac{\eta^2}{2} \frac{\Delta \varphi'^2}{\sigma} \quad (22)$$

Mit Einführung des *Mittel-Azimuthes* α_m hat man nach (28) § 63. S. 329:

$$\Delta \varphi' = \sigma \cos \alpha_m \quad (23)$$

und damit werden (20) und (22):

$$\delta_1 = \eta^2 \Delta \varphi' \left(1 + \frac{\sigma}{2} \cos \alpha_m t \right) \quad \text{und} \quad \mu = \frac{\sigma}{2} (1 + \eta^2 \cos^2 \alpha_m) \quad (24)$$

Wenn man (24) in (19) einsetzt, und in dem *quadratischen* Gliede $\delta_1^2 \cos \alpha$ in (19) die Näherung $\alpha = \alpha_m$ macht, so findet man (indem zwei Glieder $\eta^2 \cos \alpha_m$ sich heben):

$$\alpha - \alpha'' = \eta^2 \Delta \varphi' \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{\sigma}{2} \cos \alpha_m t \right) \sin \alpha \quad (25)$$

Dabei bezieht sich η^2 auf die *Mittelbreite*, wie auch α_m das *Mittel-Azimuth* ist; und um auch α auf α_m zu reduzieren, hat man nach (15) S. 315:

$$\alpha = \alpha_m - \frac{\sigma}{2} \sin \alpha_m \tan \varphi_m \quad (26)$$

$$\sin \alpha = \sin \alpha_m - \frac{\sigma}{2} \sin \alpha_m \cos \alpha_m \tan \varphi_m$$

$$\sin \alpha = \sin \alpha_m \left(1 - \frac{\sigma}{2} \cos \alpha_m t \right)$$

Setzt man dies in (25) ein, so hebt sich der Faktor mit $\sigma \cos \alpha_m t$ fort und man hat kurz:

$$\alpha - \alpha'' = \eta^2 \Delta \varphi' \frac{\sigma}{2} \sin \alpha_m \quad (27)$$

Dabei ist:

$$\sigma = \frac{s}{N} \quad (28)$$

wo s die lineare Länge des Bogens AB und N der Quer-Krümmungshalbmesser für die Bogenmitte ist. Man hat also:

$$\alpha - \alpha'' = \eta^2 \Delta \varphi' \frac{s}{2N} \sin \alpha_m \quad (29)$$

Nachdem so $\alpha - \alpha''$ bestimmt ist, wollen wir auch noch $\alpha'' - \alpha'$ nach (3) S. 357 zuziehen, nämlich:

$$\alpha'' - \alpha' = \frac{\delta_1^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha$$

Dieses giebt nach (20) und (23):

$$\alpha'' - \alpha' = \eta^4 \Delta \varphi' \frac{\sigma}{2} \cos^2 \alpha_m \sin \alpha_m \quad (30)$$

Dabei hatten wir α_m und α nicht mehr zu unterscheiden, da es sich nur um ein Glied von der Ordnung $\eta^4 \sigma^2$ handelte, also durch die Verwechslung von α_m mit α nur ein Glied $\eta^4 \sigma^3$ vernachlässigt ist. Nimmt man nun (28), (29) und (30) zusammen, so hat man:

$$\alpha - \alpha' = \eta^2 \Delta \varphi' \frac{s}{2N} \sin \alpha_m (1 + \eta^2 \cos^2 \alpha_m) \quad (31)$$

Nun ist aber nach (4) S. 214:

$$R = \frac{N}{1 + e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha} = \frac{N}{1 + \eta^2 \cos^2 \alpha}$$

Dieses giebt mit (31) zusammen:

$$\alpha - \alpha' = \eta^2 \Delta \varphi' \frac{s}{2R} \sin \alpha_m \quad (32)$$

Der Unterschied dieser Differenz $\alpha - \alpha'$ gegen $\alpha - \alpha''$ nach (29) besteht also darin, dass bei (29) der Quer-Krümmungshalbmesser N im Nenner steht, dagegen bei (32) der Krümmungshalbmesser R in der Richtung des Bogens AB .

Die Formeln (31) und (32) sind genau auf Glieder von der Ordnung $\eta^2 \sigma^3$ und $\eta^4 \sigma^2$ einschliesslich, wobei wie gewöhnlich $\eta^2 = e'^2 \cos \varphi$ und $\Delta \varphi'$ der verkürzte Breiten-Unterschied nach (21) ist.

Da in der Formel (32) sich sowohl $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ auf die *Mittelbreite* φ als auch α_m auf das *Mittel-Azimet* bezieht, und auch $\Delta \varphi'$ nach (21) mit dem *Mittelwert* V^2 zu berechnen ist, hat die Formel (32) jede Beziehung zu dem Ausgangspunkt A , woselbst die Azimute α und α' stattfinden, verloren und gilt deswegen ebenso genau auch für den anderen Punkt B , woselbst die Azimute β und β' stattfinden, d. h. die

Formel (32) ist deswegen so einfach geworden, weil überall Mittelwerte q und α_m eingeführt worden sind. Wir können also nun als Erweiterung von (32) schreiben:

$$\alpha - \alpha' = \eta^2 \frac{\Delta q}{V^2} \frac{s}{2R} \sin \alpha_m = \beta - \beta' \quad (32a)$$

Wenn man diese Formel auf das kleine sphäroidische Normal-Beispiel anwendet, das wir am Schlusse von § 67. S. 351 mit $q_1 = 49^\circ 30'$, $q_2 = 50^\circ 30'$ und $\lambda = 1^\circ 0'$ angenommen haben, so hat man:

$$q = 50^\circ, \quad \Delta q = 3600'', \quad \alpha_m = 32^\circ 48' 20''$$

nach (14) und (15) § 68. S. 354: $s = 132\,315''$;

nach S. [14] und [15] des Anhangs: $\log N = 6.805\,496$, $\log V^2 = 0.001\,204$,
 $\log \eta^2 = \log e'^2 \cos^2 q = 7.443\,454$;

nach (7) oder (8) § 34. S. 214: $\log R = 6.804\,645$.

Damit findet man nach (33):

$$\alpha - \alpha' = \beta - \beta' = 0,0560'' \quad (33)$$

Um dieses mit $\alpha - \alpha'' = 0,0555''$ und mit $\beta - \beta'' = 0,0563$ nach (28) § 67. S. 351 zu vergleichen, sollte man noch die Reduktion $\alpha'' - \alpha'$ nach (30) anbringen, welche aber nur $0,0001''$ bringt, und neben unserer weniger genauen trigonometrischen Rechnung zu vernachlässigen ist. Hiernach stimmt (33) genügend mit dem früheren (28) § 67. S. 351.

Für manche Zwecke ist es besser, statt des Mittel-Azimuths α_m in (32) das Anfangs-Azimuth α , und statt $\Delta q'$ den Bogen s einzuführen. Zu diesem Zwecke schreiben wir zunächst nach (23) und (28) die Formel (32) in diese Form:

$$\beta' - \beta = \alpha - \alpha' = \eta^2 \frac{s^2}{2NR} \sin \alpha_m \cos \alpha_m \quad (34)$$

Dabei ist nach (26):

$$\sin \alpha_m = \sin \alpha + \frac{\sigma}{2} \sin \alpha \cos \alpha t$$

$$\cos \alpha_m = \cos \alpha - \frac{\sigma}{2} \sin^2 \alpha t$$

und ferner:

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 q_m, \quad \eta_1^2 = e'^2 \cos^2 q_1 \\ \eta^2 = \eta_1^2 (1 - \sigma \cos \alpha t)$$

Setzt man all dieses in (32a) ein, so bekommt man:

$$\beta' - \beta = \alpha - \alpha' = \eta_1^2 \frac{s^2}{2NR} \sin \alpha \cos \alpha - \eta_1^2 \frac{s^3}{4N^2R} \sin \alpha t \quad (35)$$

Dabei ist übrigens bei den Krümmungs-Halbmessern N und R nicht unterschieden, ob sie sich auf den Anfang oder die Mitte des Bogens beziehen, denn das gibt nur Glieder $\eta^2 \sigma$, welche mit den übrigen Faktoren im ersten Gliede schon $\eta^4 \sigma^3$ gäbe, was wir überhaupt vernachlässigt haben.

Wir wollen hierbei die Bemerkung nicht unterdrücken, dass für solche Verhältnisse, wie wir sie in dem Zahlen-Beispiel (33) vorausgesetzt haben, kein praktisches Interesse besteht, so fein zu rechnen, wie dieses bei (32a) mit Unterscheidung von N und R und dergleichen geschieht. Den praktischen Zwecken ist durch die rohere Formel (15) S. 359 völlig genügt. Die theoretischen Formeln (32a) und ähnliche haben einen mittelbaren Nutzen, der sich bei späteren Vergleichen zeigen wird.

Zum Schlusse der Betrachtungen von § 67.—69. wollen wir noch darauf aufmerksam machen, dass man mit den Formeln von § 67.—§ 69. die Konvergenz der Normalschnitte und alles damit Verwandte, z. B. auch die Neigungen n und n' für beliebig weit entfernte Erdorte durch geschlossene Formeln streng berechnen kann.

Denkt man sich zwei Erdorte unter den Breiten φ_1 und φ_2 mit dem Längenunterschiede λ , so bekommt man δ_1 und δ_2 sowie S_1 und S_2 aus (12)—(18) § 67. S. 350. Damit kann man die beiden sphärischen Dreiecke (1) und (2) § 67. S. 351 streng sphärisch auflösen, wodurch man $\sigma_1, \sigma_2, \alpha, \alpha''$ β, β'' bekommt.

Nach diesem giebt (10) § 68. S. 354 den einen Depressions-Winkel μ in A und durch Formel-Umstellung auch den anderen Depressions-Winkel in B .

Damit ist die sphärische Figur Fig. 3. § 69. S. 350 vollständig bestimmt, sogar teilweise überbestimmt (α und α''), was zu Rechenproben führt; und da alle daraus hervorgehende sphärisch trigonometrischen Formeln streng richtig sind, hat man, wie oben behauptet, alle auf die beiden Normal-Schnittebenen bezüglichen Elemente streng berechnet.

In diesem Zusammenhange ist auch zu zitieren eine Schrift „Über das Geoid von J. Bischoff, München 1889“, in welcher noch weitere trigonometrische Beziehungen zwischen $\alpha, \alpha', \varphi, n, n'$ u. s. w. dadurch gefunden werden, dass statt unserer zwei sphärischen Dreiecke mit den Kugelmittelpunkten K_a und K_b Fig. 1. S. 347 ein sphärisches Hilfsdreieck aus φ_1, φ_2 und λ gebildet wird.

§ 70. Einfluss verschiedener Höhen.

Im Bisherigen haben wir immer die Voraussetzung gemacht, dass die in Betracht kommenden Punkte A, B beide auf der Oberfläche des Umdrehungs-Ellipsoid liegen. Für Triangulierung, Azimutmessung u. dgl. zwischen zwei Punkten ist diese Annahme physisch nicht möglich, weil die Erde nicht durchsichtig ist. In Wirklichkeit befinden sich die Punkte auf Berghöhen, Türmen u. dgl., und es fragt sich, ob dadurch eine Änderung gegen die frühere Annahme stattfindet.

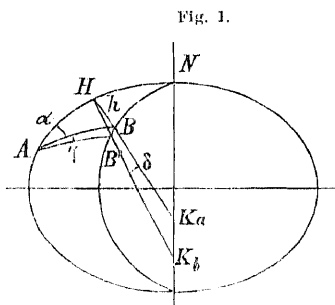


Fig. 1.

Wenn die Punkte in verschiedenen Höhen über der Ellipsoidfläche liegen, so denken wir uns dieselben auf das Ellipsoid projiziert mittelst der Ellipsoidnormalen (wobei von einer Krümmung der Lotlinien abgesehen wird). In Fig. 1. sei H ein hochgelegener Punkt und B' dessen Projektion, wobei HK_b die Normale von B ist. Wenn nun von einem entfernten Punkt A , der in der Ellipsoidfläche selbst liegt, mittelst des Theodolits nach B gemessen wird, so geschieht dieses in der Ebene AHK_a , welche in A normal ist, und der Theodolit projiziert den Punkt H nicht nach B' , sondern nach B .

Um den dadurch entstehenden Azimutal-Fehler $BAB' = \gamma$ zu bestimmen, brauchen wir wieder den kleinen Winkel $K_aHK_b = \delta$, nämlich nach (12) § 67. S. 350 in erster Näherung:

$$\delta = \varphi^2 \frac{A\varphi}{V^2} = \varphi^2 \frac{s}{N} \cos \alpha$$

wobei s die lineare Entfernung AB und N der Quer-Krümmungshalbmesser ist. Damit hat man den Projektionsfehler BB' im Meridian:

$$BB' = h\delta = \varphi^2 \frac{hs}{N} \cos \alpha$$

Der entsprechende Azimutfehler γ ist:

$$\gamma = \frac{BB' \sin \alpha}{s} = \varphi^2 \frac{h}{N} \sin \alpha \cos \alpha$$

Mit φ und $\alpha = 45^\circ$ giebt dieses:

$$\gamma = 0,054'' \frac{h}{1000}$$

Also für $h = 1000^m$ giebt dieses bereits $0,054''$.

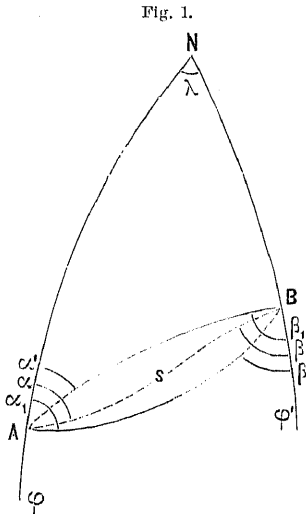
Wenn der Punkt A selbst nicht in der Ellipsoidfläche liegt, sondern darüber, so ändert das an der bisherigen Betrachtung nichts, weil A in seiner eigenen Normalen $K_a A$ gehoben ist, wobei die vertikale Theodolit-Axe von A mit der Normalen $A K_a$ zusammenfällt.

Ausser den wirklichen Höhen der Punkte A und B ist auch noch die scheinbare Erhebung durch Strahlenbrechung zu berücksichtigen.

§ 71. Sphärische Potenzreihen bis σ^3 mit sphäroidischen Korrektionsgliedern bis $\eta^2 \sigma^3$.

Nachdem wir uns durch die Einführung eines sphärischen Hilfsdreiecks in § 67. überzeugt haben, dass man die geodätische Hauptaufgabe auf dem Ellipsoid durch gewisse Nebenberechnungen für δ , σ u. s. w. auf eine sphärische Aufgabe zurückführen kann, kommen wir zu der Überzeugung, dass es auch möglich sein muss, die sphärischen Reihen-Entwicklungen von § 59., welche bis σ^3 gehen, durch Zugabe sphäroidischer Glieder von § 67.—69. so umzuwandeln, dass sie zur geodätischen Übertragung von Breite, Länge und Azimut auf dem Umdrehungs-Ellipsoid (Sphäroid) geeignet werden.

Wir können auf diese Weise Formeln finden, welche den später mit der geodätischen Linie abzuleitenden Formeln gleichwertig sind, welche wir sogar durch gewisse Umformungen mit den für die geodätische Linie gültigen Formeln *identisch* machen können.



Wenn dabei zu bemerken ist, dass die fraglichen Formeln sich aus der Theorie der geodätischen Linie viel *kürzer* ableiten lassen werden, als wir es nun thun, so ist uns doch auch die umständlichere Herleitung insofern sehr schätzbar, als dadurch eine grosse Kette von Entwicklungen, teils die vertikalen Schnitte, teils die geodätische Linie betreffend, in sich selbst abgeschlossen und kontrolliert werden wird. In diesem Sinne gehen wir an die Entwicklung von Formeln bis zur Ordnung σ^3 nebst $\eta^2 \sigma^3$ einschliesslich. Die Bezeichnungen sind im Folgenden nach nebenstehender Fig. 1. genommen.

Als sphärisches Hilfsdreieck nehmen wir dasjenige, welches in Fig. 1. § 67. S. 347 den Kugelmittelpunkt K_a hat, mit dem Centriwinkel σ_1 . Im übrigen die Bezeichnungen unserer nebenstehenden neuen Fig. 1. anwendend, haben wir von (8), (10), (15) § 59. S. 313—315 folgende drei *sphärische* Gleichungen (mit $\tan \varphi = t$):

$$(\varphi') - \varphi = \sigma_1 \cos \alpha_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \sin^2 \alpha_1 t - \frac{\sigma_1^3}{6} \sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_1 (1 + 3 t^2) \quad (1)$$

$$\lambda \cos \varphi = \sigma_1 \sin \alpha_1 + \sigma_1^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 t - \frac{\sigma_1^3}{3} \sin^3 \alpha_1 t^2 + \frac{\sigma_1^3}{3} \sin \alpha_1 \cos^2 \alpha_1 (1 + 3 t^2) \quad (2)$$

$$\beta' - \alpha_1 = \sigma_1 \sin \alpha_1 t + \frac{\sigma_1^2}{2} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 (1 + 2 t^2) - \frac{\sigma_1^3}{6} \sin^3 \alpha_1 t (1 + 2 t^2) + \frac{\sigma_1^3}{6} \sin \alpha_1 \cos^2 \alpha_1 t (5 + 6 t^2) \quad (3)$$

Der hier auftretende Wert σ_1 ist derselbe, der in (12) § 68. S. 353 mit σ bezeichnet ist, d. h. wir haben nun:

$$\sigma_1 = \frac{s}{N_1} \left(1 + \frac{\eta^2}{6} \sigma^2 \cos^2 \alpha_1 \right)$$

Der Kürze wegen wollen wir schreiben:

$$\frac{s}{N_1} = \sigma, \text{ also } \sigma_1 = \sigma \left(1 + \frac{\eta^2}{6} \sigma^2 \cos^2 \alpha_1 \right) \quad (4)$$

Mit σ ist also bezeichnet der Quotient der linearen Entfernung $AB = s$, dividiert durch den Quer-Krümmungshalbmesser N_1 der Ausgangsbreite φ .

Das in (1) benützte Zeichen (φ') bedeutet die *sphärisch* berechnete jenseitige Breite, d. h. es ist nach (13) § 67 S. 350:

$$(\varphi') = \varphi' - \delta_2 = \varphi' - \eta_1^2 \frac{\varphi' - \varphi}{V_1^2} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{\varphi' - \varphi}{V_1^2} t - \frac{2}{3} \left(\frac{\varphi' - \varphi}{V_1^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi' - \varphi}{V_1^2} \right)^2 t^2 \right\} \quad (5)$$

Dabei bezieht sich $t = \tan \varphi$ auf die *Anfangsbreite* φ , wie auch $\eta_1^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ und $V_1^2 = 1 + \eta_1^2$ sich auf die *Anfangsbreite* φ beziehen.

Wenn man nun (5) nebst (4) in (1) einsetzt, so bekommt man eine Gleichung, welche $\varphi' - \varphi$, $(\varphi' - \varphi)^2$ und $(\varphi' - \varphi)^3$ enthält; diese Gleichung kann man stufenweise nach $\varphi' - \varphi$ auflösen (allgemeines Schema hierfür s. (50) S. 203); das Ergebnis dieser Auflösung ist:

$$\frac{\varphi' - \varphi}{V_1^2} = \sigma \cos \alpha_1 - \frac{\sigma^2}{2} \sin^2 \alpha_1 t - \frac{3}{2} \eta^2 \sigma^2 \cos^2 \alpha_1 t - \frac{\sigma^3}{6} \sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_1 (1 + 3 t^2) - \frac{\eta^2}{2} \sigma^3 \cos^3 \alpha_1 (1 - t^2) + \frac{3}{2} \eta^2 \sigma^3 t^2 \sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_1 \quad (6)$$

Einfacher ist die Umwandlung von (2); man hat nur (4) zu berücksichtigen, und findet:

$$\lambda \cos \varphi = \sigma \sin \alpha_1 + \sigma^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 t - \frac{\sigma^2}{3} \sin^3 \alpha_1 t^2 + \frac{\sigma^3}{3} \sin \alpha_1 \cos^2 \alpha_1 (1 + 3 t^2) + \frac{\eta^2}{6} \sigma^3 \sin \alpha_1 \cos^2 \alpha_1 \quad (7)$$

Die dritte umzuwandelnde Formel (3) giebt vermöge ihrer sphärischen Herkunft die Azimut-Differenz $\beta' - \alpha_1$; wir wollen jedoch von (35) § 69. S. 362 hinzu nehmen mit Umsetzung in unsere neuen Bezeichnungen, und hinsichtlich R abgerundet:

$$\beta_1 - \beta' = \eta^2 \frac{\sigma^2}{2} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - \eta^2 \frac{\sigma^3}{4} \sin \alpha_1 t \quad (8)$$

Wenn man dieses (8) nebst dem früheren (4) in (3) einsetzt, so bekommt man:

$$\beta_1 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha_1 t + \frac{\sigma^2}{2} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 (1 + 2 t^2) + \frac{\eta^2}{2} \sigma^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - \frac{\sigma^3}{6} \sin^3 \alpha_1 t (1 + 2 t^2) + \frac{\sigma^3}{6} \sin \alpha_1 \cos^2 \alpha_1 t (5 + 6 t^2) + \frac{\eta^2}{6} \sigma^3 \sin \alpha_1 \cos^2 \alpha_1 t - \frac{\eta^2}{4} \sigma^3 \sin \alpha_1 t \quad (9)$$

Die Formeln (6), (7) und (9) bieten das, was wir uns zunächst vorgesetzt haben zu bestimmen, nämlich die Breiten-, Längen- und Azimut-Übertragung von einem Punkte mit der Breite φ aus, mit einem Bogen s , der in einem *Normalschnitte* liegt, dessen Ausgangs-Azimut α_1 ist.

Ohne nun schon von der geodätischen Linie etwas zu wissen, können wir willkürlich statt des Azimutes α_1 ein *anderes* Azimut α einführen, entsprechend der (später in (33) § 75. zu begründenden) Formel:

$$\alpha_1 - \alpha = \frac{\eta^2}{6} \sigma^2 \sin \alpha \cos \alpha + \sigma^3 \dots \quad (10)$$

also

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 &= \sin \alpha + \frac{\eta^2}{6} \sigma^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha \\ \cos \alpha_1 &= \cos \alpha - \frac{\eta^2}{6} \sigma^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

Dieses wollen wir überall in (6), (7) und (9) einführen (d. h. mit Vernachlässigung aller Glieder von der Ordnung η^4).

Ausserdem wollen wir aber auch noch in (9) eine zunächst willkürliche (später aus der Theorie der geodätischen Linie (35) § 75. folgende) Änderung machen, indem wir statt $\beta_1 - \alpha_1$ nun $\beta - \alpha$ bestimmen, wobei sein soll:

$$\beta - \alpha = \beta_1 - \alpha_1 + \eta^2 \frac{\sigma^3}{12} \sin \alpha t \quad (11)$$

Thut man all dieses, was wir bei (10) und (11) gesagt haben, so wird man folgende drei Schluss-Formeln finden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{q' - q}{r_1^2} &= \sigma \cos \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \sin^2 \alpha t - \frac{3}{2} \sigma^2 \cos^2 \alpha \eta^2 t - \frac{\sigma^3}{6} \sin^2 \alpha \cos \alpha (1 + 3 t^2) \\ &\quad - \frac{\sigma^3}{2} \cos^3 \alpha \eta^2 (1 - t^2) + \frac{\sigma^3}{6} \sin^2 \alpha \cos \alpha \eta^2 (9 t^2 - 1) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda \cos q &= \sigma \sin \alpha + \sigma^2 \sin \alpha \cos \alpha t + \frac{\sigma^2}{3} \sin \alpha \cos^2 \alpha (1 + 3 t^2) \\ &\quad - \frac{\sigma^3}{3} \sin^3 \alpha t^2 + \frac{\eta^2}{3} \sigma^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta - \alpha &= \sigma \sin \alpha t + \frac{\sigma^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha (1 + 2 t^2) + \frac{\eta^2}{2} \sigma^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &\quad - \frac{\sigma^3}{6} \sin^3 \alpha t (1 + 2 t^2) + \frac{\sigma^3}{6} \sin \alpha \cos^2 \alpha t (5 + 6 t^2) \\ &\quad + \frac{\eta^2}{6} \sigma^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha t - \frac{\eta^2}{6} \sigma^3 \sin^3 \alpha t \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Diese Gleichungen werden wir später in (25), (26), (27) § 78. wiederfinden.

Dadurch sollen sowohl die hier benützten Entwicklungen von § 67.—69. als auch die später folgenden Entwicklungen mit der geodätischen Linie gegenseitig versichert werden.

Wenn wir in den vorstehenden Gleichungen (10) und (11) bereits vorgehend, gewisse Formeln über Azimute der geodätischen Linie u. s. w. zitiert haben, so geschah es in dem Sinne, dass später *nach* Entwicklung dieser Formeln, sowie *nach* Erledigung von § 78. nochmals auf den gegenwärtigen §. 71. zurückgeblickt werden soll, worauf die Bedeutung der vorstehenden Gleichungen (12), (13), (14) als Schlussglieder einer langen Kette anderer wichtiger Entwicklungen, von selbst in richtigen Lichte erscheinen werden.

Kapitel VII.

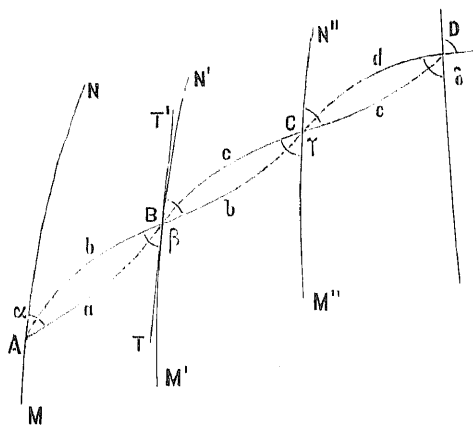
Die geodätische Linie.

§ 72. Geometrische Definition der geodätischen Linie.

Nachdem wir in § 62. und § 67. uns überzeugt haben, dass zwischen zwei Punkten A und B der ellipsoidischen Erdoberfläche im allgemeinen *zwei* verschiedene Normalschnitte bestehen, in welchen bei Theodolit-Beobachtungen von A nach B und von B nach A die Sicht-Linien sich befinden, können wir auch angeben, was für ein Linienzug erhalten wird, wenn man mehrere aufeinanderfolgende Punkte A, B, C (Fig. 1.) durch fortgesetztes Theodolit-Einweisen, wie eine Gerade in der Ebene, absteckt.

In Fig. 1. stehe in A ein Theodolit mit lotrechter Axe, mit welchem ein entfernter Punkt B angezielt, oder eingewiesen wird; wobei die Sicht AaB stattfindet. Hierauf begibt man sich mit dem Theodolit nach B , stellt denselben dort ebenfalls mit lotrechter Axe auf, zielt zurück nach A , was in der Sicht BbA geschieht, dreht dann um 180° und bekommt die neue Sicht BbC . Hierauf geht man nach C , nimmt wieder die Sicht rückwärts CcB , und um 180° gedreht vorwärts CcD , und so fort.

Fig. 1.



Die Theorie von § 62. und § 67. hat uns gezeigt, dass bei diesem Verfahren allerdings im allgemeinen *zwei* Verbindungslinien zwischen je zwei Punkten A und B , B und C , u. s. w. in Betracht kommen, nämlich AaB von A nach B und BbA von B nach A u. s. w., doch sind die Abweichungen zwischen a und b , c und d u. s. w. so klein, dass sie selbst bei Dreiecksseiten von 100 000 Meter auf unserer Erdoberfläche noch vernachlässigt werden können.

Wäre unsere Erde stärker abgeplattet, so würden auch diese Abweichungen stärker sein; und im Sinne der Theorie kommt es auf den Grössenbetrag der Abweichungen nicht an, sondern darauf, dass das mathematische Gesetz des Linienzuges A, B, C, D erkannt werde.

Jedenfalls würden bei stetig sich ändernder positiver Krümmung, wie sie unser Erdellipsoid hat, die Abweichungen ab immer kleiner, wenn die Zielweiten AB, BC u. s. w. fortgesetzt verkürzt werden. Die kleinen Azimutverschiebungen aAb u. s. w. wachsen nach (10) § 69. S. 358 nur mit dem *Quadrate* der Zielweiten; und lässt man die Zielweiten $AB, BC \dots$ selbst unendlich klein (im Sinne der Differential-Rechnung) werden, so werden die Schleifen $AaBb$ u. s. w. sich schliessen, und man bekommt statt des Schleifen-Zuges *eine* stetige Linie $ABCD$, welche *geodätische Linie* heisst, und im allgemeinen eine Kurve doppelter Krümmung ist.

Als Richtungswinkel, bzw. Azimute der geodätischen Linie, welche nach dem Zusammenfallen der Schleifen in Fig. 1. entsteht, sind die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu betrachten, oder genauer die Grenzwerte, gegen welche diese Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bei unbegrenzt abnehmenden Strecken AB, BC u. s. w. konvergieren.

Mit den Begriffen der Feld- und Landmessung in der Ebene kann man die geodätische Linie auch kurz so erklären:

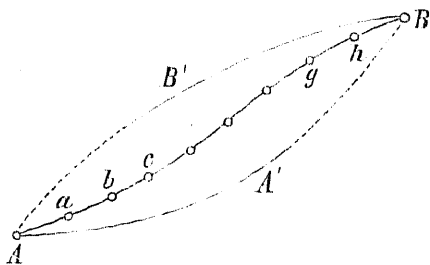
Man macht auf der ellipsoidischen Erdoberfläche genau dasselbe, was der Landmesser thut, wenn er eine sehr lange Gerade AD in der Ebene stückweise absteckt, indem er seinen Theodolit zuerst in A , dann in B, C, D aufstellt, und jedesmal einen Brechungswinkel von 180° absetzt.

Oder: eine geodätische Linie ist in Bezug auf fortgesetztes Einweisen mit kurzen Zielweiten auf einer krummen Fläche dasselbe, was in der Ebene ein gerade gestrecktes Polygon mit lauter Brechungswinkeln von 180° ist.

Eine geodätische Linie auf irgend einer krummen Fläche ist in der angegebenen Beziehung auch dasselbe, was auf einer Kugelfläche ein grösster Kreisbogen ist.

Wenn hiernach die Absteckung in kleinen *Teilstrecken* in der Ebene für die Gerade, auf der Kugel für den Grosskreisbogen und auf dem Ellipsoid oder irgend einer andern krummen Fläche für die geodätische Linie, einander analog sind, so ist dagegen für die Absteckung oder Sichtung auf die *Gesamtlänge* diese Analogie nicht mehr vorhanden, was durch Fig. 2. näher erläutert werden soll.

Fig. 2.



In Fig. 2. sei eine geodätische Linie $Aa b c \dots gh B$ durch schrittweises Abstecken mit den kleinen Zielweiten $Aa = ab = bc$ u. s. w. erhalten, wobei der Theodolit in a, b, c u. s. w. immer Brechungswinkel von 180° zeigt.

Stellt man aber nach Absteckung der Einzelpunkte den Theodolit wieder in A lotrecht auf, und zielt auf einmal nach dem Endpunkte B (sofern die Erdkrümmung dieses gestattet), so be-

kommt man eine ganz andere Sichtlinie als vorher, nämlich nun $AA'B$ als vertikalen Schnitt von A nach B , und ebenso in B die Sicht $BB'A$ als vertikalen Schnitt von B nach A .

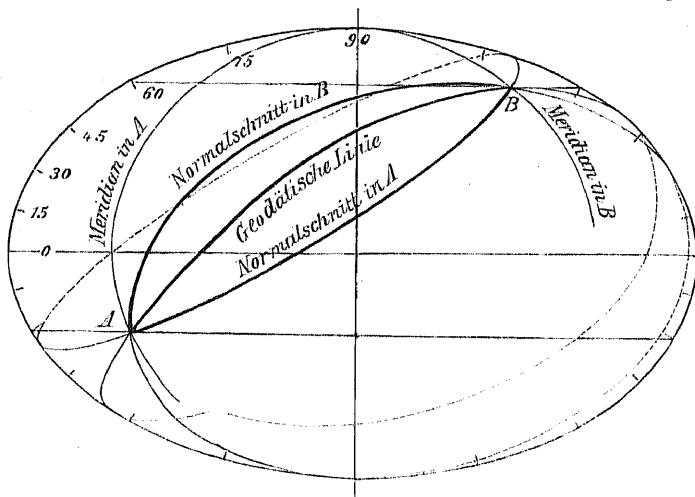
Um dieses noch deutlicher zu zeigen, haben wir in Fig. 3, S. 369 die beiden Normalschnitte (Vertikalschnitte) zwischen zwei Punkten A und B , nebst der dazwischen verlaufenden geodätischen Linie auf einem Umdrehungs-Ellipsoid mit der Abplattung 1:3 dargestellt.

Diese Fig. 3. ist nach einem Modell gemacht, dessen grosse Halbaxe $a = 15^m$ und dessen kleine Halbaxe $b = 10^m$ ist. Es ist also die Abplattung $\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{3}$,

die Exzentrizität $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = 0,745$ und $e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}} = 1,118$. Die Normalschnitte und die geodätische Linie sind nach mathematischen Gesetzen konstruiert.

Fig. 3. (zu S. 368).

Normalschnitte und Geodätische Linie auf einem Umdrehungs-Ellipsoid mit der Abplattung 1:3.



Schmiegungs-Ebene und Scheitel-Azimute.

Wenn wir die im vorstehenden, aus den Begriffen des Feld- und Landmessens hergeleitete Erklärung der geodätischen Linie in abstraktere Form fassen, so brauchen wir den Begriff der *Schmiegungs-Ebene* (Osculations-Ebene), d. h. einer Ebene, welche durch zwei aufeinander folgende Elemente einer Kurve, in unserem Falle zwei aufeinander folgende Elemente der geodätischen Linie geht.

Nach unserer Feld-Absteckungs-Erklärung ist dieses die Ebene, in welcher in jedem Punkte der rückwärts und vorwärts gerichtete Strahl eines Brechungswinkels von 180° liegt, und da diese Ebene durch die Vertikalaxe des Theodolits geht, ist sie Normal-Ebene der krummen Fläche, auf welcher die geodätische Linie abgesteckt gedacht wird; und deswegen gilt der Satz:

Die Schmiegungs-Ebene der geodätischen Linie ist überall Normal-Ebene der krummen Fläche, auf welcher die geodätische Linie verläuft.

Wenn in irgend einem Punkte der geodätischen Linie, z. B. B Fig. 1. S. 367, irgend eine Flächen-Tangente $T'T''$ gezogen wird, so sind die beiden Scheitelwinkel $bBT = \beta$ und $T''Bb = \beta$, welche die geodätische Linie mit dieser Tangente bildet, einander gleich.

Es könnte auf den ersten Blick scheinen, als ob das selbstverständlich und bei allen Kurven der Fall wäre; allerdings sind Scheitelwinkel zwischen zwei Geraden, also auch zwischen zwei Flächen-Tangenten in einem Punkte einander gleich, und es wäre also im Punkte B für jede Kurve $\beta = \beta'$, wenn ABC als ein Element der Kurve gilt; wenn dagegen der Kurventheil ABC aus zwei oder mehr Elementen bestehend angenommen wird, oder mit anderen Worten, wenn man gerade in dem Punkte B die Krümmung der Kurve ABC untersuchen will, dann sind die beiden mit β bezeichneten Winkel nur für den Fall gleich, dass die beiden in dem Punkte B zusammentreffenden Elemente der Kurve gemeinsam in einer Ebene liegen, welche auch

die Flächen-Normale des Punktes B enthält, d. h. Schnieggungs-Ebene in B ist, so dass dann auch diese Flächen-Normale in B als Schnitt der Schnieggungs-Ebene und der durch TT' gehenden Flächen-Normalebene erscheint.

All dieses ist nun bei der geodätischen Linie erfüllt, und wenn man daher eine geodätische Linie $ABCD \dots$ (Fig. 1.) durch eine Schar von anderen geodätischen Linien MN , $M'N'$ u. s. w. schneidet, so sind alle dabei auftretenden Schnittwinkel β und β in B , γ und γ in C u. s. w. einander gleich.

Wir werden als geodätische Linien MN , $M'A'$ u. s. w. von Fig. 1., welche sämtlich von einer geodätischen Linie $ABCD$ geschnitten werden, später namentlich die Meridiane des Umdrehungs-Ellipsoids finden, wo α , β , γ die Azimute sind, und deswegen sprechen wir das, was über die Winkel β , β , sowie γ , γ u. s. w. erkannt wurde, sofort aus in dem Satze: *die geodätische Linie schneidet jeden Meridian unter gleichen Scheitel-Azimuten.*

Krümmungs-Linien.

Zur allgemeinen Klärung der Begriffe, empfiehlt es sich, neben der geodätischen Linie auch noch die Krümmungslinie zu erwähnen. Eine auf einer krummen Fläche gezogene Krümmungslinie hat die Eigenschaft, dass je zwei aufeinander folgende, ihr zugehörige Flächen-Normalen sich schneiden, wie bei der geodätischen Linie nicht der Fall ist, wie z. B. aus den zwei Punkten K_1 und K_2 Fig. 1. § 62. S. 325 zu sehen ist.

Eine Krümmungslinie folgt stets der größten oder der kleinsten Krümmung, deren Richtungen nach dem Eulerschen Satze ((1) § 34. S. 213) zu einander rechtwinklig sind, und daher bilden die sämtlichen Krümmungslinien einer Fläche zwei Scharen von Kurven, die sich überall gegenseitig rechtwinklig schneiden.

Ein Flächenpunkt, in welchem die beiden Haupt-Krümmungshalbmesser (und damit auch alle Normalschnitts-Krümmungshalbmesser) gleich sind, heisst *Nabelpunkt* der Fläche. Z, B sind die beiden Pole des Umdrehungs-Ellipsoids Nabelpunkte in diesem Sinne; die Meridiane sind Krümmungs-Linien der einen Schar, und die Parallelkreise sind Krümmungs-Linien der zweiten Schar. Das strahlenförmige Ausgehen der Meridiane als erster Schar vom Pol als Nabelpunkt ist jedoch nur besonderer Fall, und findet z. B. bei den 4 Nabelpunkten des dreiaxigen Ellipsoids nicht statt.

Wenn eine Krümmungslinie zugleich geodätische Linie sein soll, so muss sie ganz in einer Ebene liegen, weil jede Flächen-Normale sowohl von den beiden benachbarten Flächen-Normalen geschnitten werden, als auch in der Ebene zweier benachbarten Kurven-Elemente liegen muss, was bloss bei einer ebenen Kurve möglich ist; dagegen umgekehrt eine Krümmungs-Linie, die in einer Ebene liegt, ist deswegen nicht notwendig geodätische Linie.

Auf dem Umdrehungs-Ellipsoid (sowie auf jeder anderen Umdrehungsfläche) ist jeder Meridian geodätische Linie und Krümmungslinie; ein Parallelkreis ist Krümmungs-Linie aber nicht geodätische Linie.

Weiteres über die allgemeine Theorie der geodätischen Linie, der Krümmungs-Linien u. s. w. giebt „Analytische Geometrie der Kurven im Raume und der algebraischen Flächen von Salmon, deutsch bearbeitet von Fiedler, Leipzig 1865“.

§ 73. Differential-Gleichungen der geodätischen Linie auf dem Umdrehungs-Ellipsoid.

Nachdem wir am Schluss des vorigen § 72. den Satz von den gleichen Scheitel-Azimuten der geodätischen Linie gefunden haben, können wir die Differential-Gleichungen dieser Linie auf irgend einer Umdrehungsfläche aufstellen, in ähnlicher Weise wie wir früher bei Fig. 1. § 56. S. 302 die Differential-Gleichungen des grössten Kreises auf der Kugel durch geometrische Betrachtungen nachgewiesen haben.

Obgleich die nachfolgenden Betrachtungen auf jede beliebige Umdrehungsfläche bezogen werden können, legen wir doch sofort in Fig. 1. unser Umdrehungs-Ellipsoid zu Grunde, weil wir für andere Flächen keine Anwendung haben.

Im Anschluss an Fig. 1. und Fig. 2. stellen wir eine geometrische Differential-Betrachtung an, welche ganz analog dem früheren Falle auf der Kugel (Fig. 1. und Fig. 2. § 56. S. 302) ist. Wir betrachten dabei Fig. 2. als poly- zu der wirklichen krummen Fläche, und haben dabei den Grenzfal- abnehmendes ds im Auge.

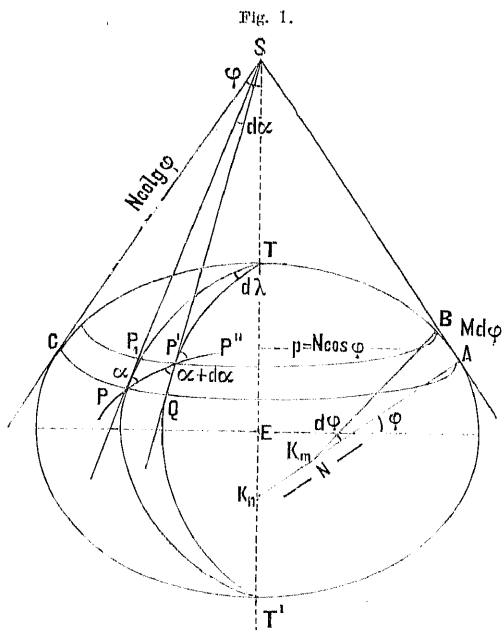
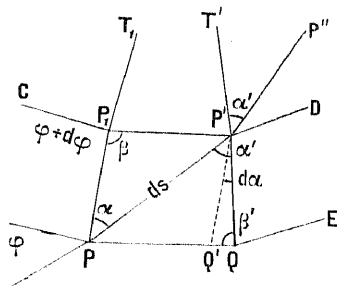


Fig. 2.
Besonderer Teil von Fig. 1.



Eine geodätische Linie $P'P'P''$ schneidet schief über zwei Meridiane und zwei Parallelkreise des Umdrehungs-Ellipsoids hin, wodurch ein Trapez $P'P_1P''Q$ für uns von Wichtigkeit wird, dessen Diagonale $P'P''$ ein Stück ds der geodätischen Linie ist.

Indem wir die Breiten φ und $\varphi + d\varphi$ und den Längenunterschied $d\lambda$ sowie den Meridian-Krümmungshalbmesser M und den Quer-Krümmungshalbmesser N nach alter Bezeichnung annehmen, haben wir (nach Andeutung von K_m und K_n in Fig. 1. und Fig. 2.) die Seiten des Trapezes:

$$AB \text{ oder } P'P_1 = M d\varphi \quad (1)$$

$$P'Q \text{ oder } P_1P'' = N \cos \varphi d\lambda \quad (2)$$

Wenn nun das Azimut der geodätischen Linie bei P den Wert α hat, und das Element der geodätischen Linie selbst $= ds$ gesetzt wird, so erhält man in erster Näherung, da der Winkel β bei P_1 mit unbegrenzt abnehmendem ds gegen 90° konvergiert:

$$\text{aus (1):} \quad ds \cos \alpha = M d\varphi \quad (3)$$

$$\text{aus (2):} \quad ds \sin \alpha = N \cos \varphi d\lambda = p d\lambda \quad (4)$$

Um auch für $d\alpha$ eine Differential-Formel zu erhalten, betrachten wir das langgestreckte schmale Dreieck $P'P'S$, welches oben bei S den Winkel $d\alpha$ enthält; das-

selbe giebt genau in derselben Weise, wie früher in (3a) § 56. S. 303 gezeigt wurde, die Gleichung:

$$d\alpha = d\lambda \sin \varphi \quad (5)$$

Dabei ist aber zu beachten, dass dieses $d\alpha$ zunächst nur gilt für die Differenz:

$$Q'P'P - P_1PP' = d\alpha \quad (6)$$

allein wegen des Satzes von den gleichen Scheitel-Azimuthen der geodätischen Linie, den wir eingangs zitiert haben, sind die *beiden* in Fig. 2. bei P' mit α' bezeichneten Azimute einander *gleich*, oder noch ausführlicher geschrieben:

$$T'P'P'' = Q'P'P, \text{ also nach (6): } T'P'P'' - P_1PP' = d\alpha \quad (7)$$

Nun haben wir in (3), (4) und (5) bereits die gesuchten Differential-Gleichungen der geodätischen Linie auf dem Umdrehungs-Ellipsoid, und überzeugen uns auch, dass dieselben ähnliche Form haben wie die früheren Gleichungen (1), (2), (3) S. 302, welche für den Grosskreisbogen auf der Kugel gelten.

Die Meridian-Konvergenz $d\alpha$ kann man auch dadurch darstellen, dass man in Fig. 2. eine Parallele $P'Q'$ zu P_1P zieht, dann wird der kleine Winkel $Q'P'Q = d\alpha$ derselbe Wert wie $d\alpha$ an der Spitze S von Fig. 1. Dieses führt auch auf eine neue Formel für $d\alpha$, denn es ist nach Fig. 2.:

$$d\alpha = \frac{Q'Q}{P'Q'} = \frac{Q'Q}{ds \cos \alpha} \quad (8)$$

Nun ist QQ' das Differential von PQ oder von P_1P' , wofür wir diesesmal den Parallelkreishalbmesser $N \cos \varphi = p$ einführen wollen, indem $PQ = p d\lambda$ ist. Damit wird:

$$QQ' = -d(p d\lambda) = -dp d\lambda \quad (9)$$

Wir haben dieses negativ genommen, weil der Parallelkreisbogen bei wachsender Breite ($d\varphi$ positiv) abnimmt. Wir haben also nun aus (8) und (9):

$$d\alpha = -\frac{dp d\lambda}{ds \cos \alpha}$$

Wenn man hiezu wieder (4) nimmt, und $d\lambda$ eliminiert, so hat man:

$$p \cos \alpha d\alpha = -dp \sin \alpha \quad (10)$$

Dieses ist das Differential von:

$$p \sin \alpha = k \text{ (konstant)} \quad (11)$$

und damit haben wir als erste Integration der Differential-Gleichungen der geodätischen Linie einen wichtigen Satz (11), welcher in Worten lautet:

Das Produkt aus dem Parallelkreishalbmesser p in den Sinus des Azimuths α ist für den ganzen Lauf der geodätischen Linie konstant.

Dieser Satz, welchem auf der Kugel der Sinussatz der sphärischen Trigonometrie entspricht, giebt sofort Aufschluss über den Gesamtverlauf einer geodätischen Linie auf dem Umdrehungs-Ellipsoid.

Die beiden Faktoren p und $\sin \alpha$, deren Produkt nach (11) konstant $= k$ bleiben muss, schwanken selbst zwischen leicht angebbaren Grenzen. Das Azimut α kann im allgemeinen nicht $=$ Null werden (was dem besonderen Fall des Meridians entspricht), sondern hat seinen kleinsten Wert dann, wenn p seinen grössten Wert hat, d. h. im Äquator, wo $p = a$ ist; also:

$$\sin \alpha_{\min} = \frac{k}{a} \quad (12)$$

Der grösste Wert von α , d. h. 90° , entspricht dem kleinsten Wert von p , d. h. mit $\sin \alpha = 1$ hat man:

$$p_{\min} = k \quad (13)$$

Die Konstante k der Formel (11) ist also der Halbmesser des nördlichsten oder südlichsten Parallelkreises, den die geodätische Linie erreichen kann; und dadurch ist auch eine gewisse äusserste geographische Breite bestimmt, über welche eine geodätische Linie nicht hinaus kommen kann.

In Fig. 3. § 72. S. 369 ist diese äusserste Breite $= 60^\circ$. Die geodätische Linie berührt abwechselnd den nördlichen und den südlichen äussersten Parallelkreis, und da sie im allgemeinen nicht in sich selbst zurückkehrt, unläuft sie zwischen den genannten äussersten Parallelen das Sphäroid in unendlich vielen spiralförmigen Windungen.

Übersicht der Haupt-Formeln.

Wir wollen unsere gefundenen Formeln, die zu weiterem gebraucht werden, nochmals zusammenstellen:

$$(3) \quad ds \cos \alpha = M d\varphi \quad (\varphi)$$

$$(4) \quad ds \sin \alpha = N \cos \varphi d\lambda \quad (\lambda)$$

$$(5) \text{ und } (4) \quad d\alpha = d\lambda \sin \varphi \quad \text{oder} \quad d\alpha = \frac{ds}{N} \sin \alpha \tan \varphi \quad (\alpha)$$

$$(11) \quad p \sin \alpha = k \quad (p = N \cos \varphi) \quad (\psi)$$

Dabei ist M der Meridian-Krümmungshalbmesser, N der Quer-Krümmungshalbmesser und p der Parallelkreis-Halbmesser für die Breite φ .

Die letzte der vorstehenden Gleichungen, welche wir mit (ψ) bezeichnet haben, weil sie nachher auf die „reduzierte Breite“ ψ angewendet wird, kann man auch unmittelbar aus Fig. 2. herleiten, indem man in erster Näherung setzt:

$$P_1 P' = ds \sin \alpha \quad \text{und} \quad PQ = ds \sin \alpha' \quad (14)$$

$$\text{also} \quad P_1 P' \sin \alpha' = PQ \sin \alpha \quad (15)$$

$$p' \sin \alpha' = p \sin \alpha = \text{Konstant.} \quad (16)$$

Diese letztere Begründung, welche zu der ersten Veröffentlichung unserer vorstehenden elementaren Herleitung der geodätischen Grundformeln („Zeitschr. f. Verm. 1880“, S. 298) in der „Zeitschr. f. Verm. 1880“ S. 337 von Wiener als Zusatz beigelegt wurde, entspricht weniger unseren Zwecken als die erste Herleitung (11) durch Integration von (10), denn dadurch wird gezeigt, dass die wichtige Gleichung (ψ) eine erste *Folgerung* aus den zuerst aufzustellenden, und jedenfalls nötigen Differential-Grundformeln (φ) , (λ) , (α) (bzw. aus (λ) und (α)) ist, während die Herleitung (14), (15), (16) zu der Anschauung führen könnte, dass die Gleichung (ψ) eine *neue*, in den vorhergehenden Formeln noch nicht enthaltene sei.

Dieses veranlasst auch zu einer näheren Betrachtung der von uns gemachten Annahme, dass die Winkel β und β' in Fig. 2. bei unbegrenzt abnehmendem ds gegen 90° konvergieren, und dass deswegen die Formeln (3) und (4) wie für ein *rechtwinkliges* Dreieck angeschrieben werden durften.

Wenn man die Winkel β und β' zunächst nicht $= 90^\circ$ setzt, so hat man nach Fig. 2.:

$$P P_1 = \frac{ds}{\sin \beta} \sin (\alpha + \beta) \quad , \quad P' Q = \frac{ds}{\sin \beta'} \sin (\alpha' + \beta') \quad (17)$$

$$P_1 P' = \frac{ds}{\sin \beta} \sin \alpha \quad , \quad P' Q = \frac{ds}{\sin \beta'} \sin \alpha' \quad (18)$$

$$\text{Dabei ist} \quad \beta = 90^\circ + \frac{d\alpha}{2} \quad \beta' = 90^\circ - \frac{d\alpha}{2} \quad (19)$$

Führt man dieses weiter aus, und vernachlässigt höhere Glieder, so kommt man wieder auf die Formeln (3) und (4).

Die wichtige Frage der gleichen Scheitel-Azimute α' und α'' in Fig. 2. wollen wir dadurch

weiter aufklären, dass wir zeigen, dass z. B. der Parallelkreis $CP_1P'D$ solche gleiche Scheitel-Azimute *nicht* hat.

Der Parallel-Kreisbogen hat bei dem Überschreiten des Meridians bei P' zwei Scheitel-Azimute, deren Differenz zunächst mit δ bezeichnet sei, d. h.:

$$P_1P'Q - T'P'D = \delta \quad (20)$$

Hier ist innerhalb der Grössenordnung $d\alpha$ genau: $T'P'D = P'QE$ oder auch $= P'QP = \beta$ also auch wegen (19):

$$P_1P'Q - P'QP = \delta \quad \text{oder} \quad 90^\circ - \frac{d\alpha}{2} - \left(90^\circ + \frac{d\alpha}{2}\right) = -d\alpha = \delta \quad (21)$$

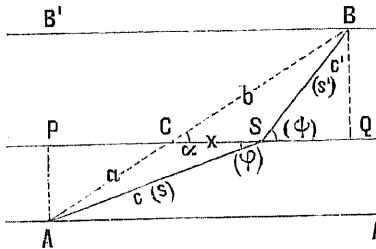
d. h. die Scheitel-Azimute des Parallelkreises sind *nicht* gleich, sondern differieren gerade um die Meridian-Konvergenz $d\alpha$, welche bei der geodätischen Linie die Differenz der Azimute auf *zwei* aufeinander folgenden Meridianen ist.

§ 74. Die geodätische Linie als kürzeste Linie.

Im Anschluss an Fig. 1. nehmen wir zuerst folgende Aufgabe: Man habe ein Prisma mit den drei Kanten AA' , $B'B$, PQ ; die wir (zur Vereinfachung der Anschauung)

Fig. 1.

Die eingeklammerten Masse (s) , (s') , (φ) , (ψ) beziehen sich auf die *schiefen* Ebenen.



so gelegt denken, dass AA' und $B'B$ in einer horizontalen Ebene und PQ im Abstand h darüber sich befindet. Es soll auf der oberen Kante ein Punkt S so bestimmt werden, dass die Summe der *schiefen* Verbindungen $AS + SB = (s) + (s')$ nach zwei festen Punkten A und B möglichst klein werde.

Wenn die in Fig. 1. eingeschriebenen Masse a , b , c , c' , x nebst dem Winkel α für die Grundriss-Ebene gelten, so hat man:

$$c^2 = a^2 + x^2 + 2ax \cos \alpha, \quad c'^2 = b^2 + x^2 - 2bx \cos \alpha \quad (1)$$

Wenn weiter (s) und (s') die *schiefen* Entfernungen AS und SB bedeuten, und h die Höhe von S über A und B , so ist:

$$(s)^2 = c^2 + h^2, \quad (s')^2 = c'^2 + h^2 \quad (2)$$

Nun soll $(s) + (s')$ ein Minimum werden, d. h.:

$$\sqrt{a^2 + x^2 + 2ax \cos \alpha} + \sqrt{b^2 + x^2 - 2bx \cos \alpha} = \text{Minimum} \quad (3)$$

Wenn man dieses nach der unabhängigen Veränderlichen x differenziert, so findet man:

$$\frac{x + a \cos \alpha}{(s)} + \frac{x - b \cos \alpha}{(s')} = 0 \quad (4)$$

Es ist aber nach Fig. 1.:

$$x + a \cos \alpha = PS, \quad b \cos \alpha - x = QS$$

Damit wird (4):

$$\frac{PS}{(s)} = \frac{QS}{(s')} \quad \text{oder} \quad \cos(\varphi) = \cos(\varphi') \\ \text{also: } (\varphi) = (\varphi') \quad (5)$$

Diese Gleichung (5) sagt: der kürzeste Weg auf zweien sich schneidenden Ebenen, über die Kante PQ hinweg, liegt so, dass auf der Scheitel-Kante PQ die beiden Winkel (φ) und (ψ) einander *gleich* sind.

Wenn wir diese einfache Betrachtung dazu anwenden, um die Differential-Eigenschaft der kürzesten Linie auf irgend einer krummen Fläche, insbesondere auf dem Umdrehungs-Ellipsoid, zu bestimmen, so können wir an Stelle der Kanten AA' , BB' u. s. w. die aufeinander folgenden Meridiane treten lassen, und wir wissen nun, dass eine Kurve alle diese Meridiane auf kürzestem Wege überschreitet, wenn die dabei vorkommenden *Scheitel-Azimute* gleich sind, d. h. die kürzeste Linie hat, in Hinsicht auf die Azimute, dieselbe Eigenschaft wie die geodätische Linie, wie wir am Schluss von § 72. S. 370 gesehen haben.

Wir schliessen hieraus, dass die geodätische Linie und die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten identisch sind.

Dabei und bei allen ähnlichen Betrachtungen nehmen wir stillschweigend an, dass zwischen zwei Punkten nur *eine* geodätische Linie und nur *eine* kürzeste Linie bestehe, wir schliessen also Fälle, welche z. B. einem Centriwinkel über 180° auf der Kugel entsprechen, und ähnliche aus, weil solche Fälle unserem Zwecke der mathematischen Vorbereitung praktisch geodätischer Formeln nicht entsprechen.

Geodätischer Kreis und geodätische Parallele.

Aus dem Begriffe der *kürzesten* Linie lassen sich durch einfache geometrische Betrachtung zwei Sätze herleiten, betreffend den „*geodätischen Kreis*“ und die „*geodätische Parallele*“. Gauss hat in der Abhandlung „*Disquisitiones generales circa superficies curvas*“, Art. 15. und 16. dieses so dargestellt:

Geodätischer Kreis. Wenn auf einer krummen Fläche von einem Anfangspunkte unendlich viele kürzeste Linien, alle von gleicher Länge ausgehen, so ist die ihre Enden verbindende Linie zu allen einzelnen normal.

Es seien in Fig. 2. AB und AB' zwei gleich lange kürzeste Linien, welche den unendlich kleinen Winkel A zwischen sich fassen; und wir wollen zunächst annehmen, die beiden Winkel bei B und B' seien *nicht* beide $= 90^\circ$, sondern weichen um eine endliche Grösse von 90° ab, so dass nach dem Gesetz der Stetigkeit der eine grösser, der andere kleiner als 90° wäre, z. B. $B = 90^\circ - \omega$. Dann nehmen wir auf der Linie BA einen Punkt C so an, dass $BC = BB' \operatorname{cosec} \omega$ wird; und insofern das unendlich kleine Dreieck $BB'C$ als eben angesehen werden kann, folgt hieraus $CB' = BC \cos \omega$ und ferner:

$$AC + CB' = AC + BC \cos \omega = AB - BC(1 - \cos \omega).$$

Es ist aber von vornherein angenommen, dass $AB = AB'$ sei, also:

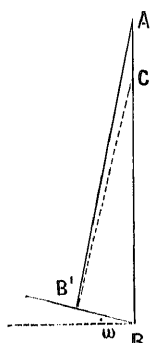
$$AC + CB' = AB' - BC(1 - \cos \omega).$$

Hiernach würde man von A nach B' einen *kürzeren* Weg über C haben als unmittelbar AB' , was der Annahme, dass AB' selbst eine Kürzeste sei, widerspricht. Es kann also ω keine endliche Grösse sein, sondern die Winkel bei B und bei B' sind beide $= 90^\circ$.

Geodätische Parallele. Wenn auf einer krummen Fläche eine beliebige Linie gezogen wird, von deren einzelnen Punkten rechtwinklig zu der Linie und nach derselben Seite kürzeste Linien von gleicher Länge ausgehen, so schneidet die Kurve, welche ihre Enden verbindet, sie alle rechtwinklig.

Man kann dieses ganz ähnlich beweisen wie bei Fig. 2., indem man wieder einen Winkel ω einführt und $\cos^2 \omega$ benützt.

Fig. 2.



Ein naheliegendes Beispiel für geodätische Kreise *und* für Parallelen bietet das System der Meridiane und der Parallelkreise auf dem Umdrehungs-Ellipsoid (und auf anderen Umdrehungs-Flächen). Die Parallelkreise sind geodätische Kreise in Bezug auf den Pol als Centralpunkt der Meridiane und geodätische Parallelen in Bezug auf irgend einen Parallelkreis.

Ebenso wie diese Parallelkreise selbst *nicht* geodätische Linien sind, sind auch die geodätischen Kreise und geodätischen Parallelen im allgemeinen selbst nicht geodätische Linien.

Kürzeste Linie auf einer abwickelbaren Fläche.

Bei der geometrischen Betrachtung von Fig. 1. sind die Kanten BB' und AA' selbst unwesentlich, es handelt sich nur um zwei Punkte A und B , welche über die dritte Kante PQ hinweg verbunden werden sollen. Durch A und B selbst können beliebige andere Gerade gehen. Man kann deswegen aus Fig. 1. auch schliessen, dass eine kürzeste Linie auf einer abwickelbaren Fläche nach Abwicklung in die Ebene eine Gerade sein muss (Gleichheit der Winkel (φ) und (ψ)). Die Kanten AA' , BB' und PQ , welche in unserer Fig. 1. parallel angenommen wurden, können auch auf einer abwickelbaren Fläche parallel sein (Cylinder), im allgemeinen aber müssen, wenn die Fläche abwickelbar sein soll, je zwei aufeinander folgende solcher Geraden sich schneiden.

§ 75. Vergleichung der geodätischen Linie mit den Normal-Schnitten.

Die geodätische Linie erscheint auf kurze Erstreckung im Sinne des Feldmessens in allen ihren Teilen wie eine Gerade; würde man dieselbe in kurzen Strecken als polygonalen Zug aufnehmen, so würde man lauter Brechungswinkel von 180° finden, wie bei einer Geraden in der Ebene.

Dagegen ein Normal-Schnitt auf weitere Entfernung erscheint nur in unmittelbarer Nähe des Punktes, in welchem er normal ist (durch dessen Lotlinie er geht) im Sinne des Feldmessens als Gerade, in seinem weiteren Verlaufe würde er durch eine Polygon-Aufnahme nicht mehr Brechungswinkel von 180° geben, sondern eine Aufnahme liefern wie eine flache Kurve in der Ebene.

Wir wollen darauf ausgehen, von einem Normal-Schnitt als Kurve in diesem Sinne den Krümmungshalbmesser zu bestimmen; dadurch wird es möglich werden, eine geodätische Linie mit den Normal-Schnitten sowohl in Bezug auf Azimute als auch in Bezug auf die lineare Ausdehnung zu vergleichen.

Wir brauchen zuerst die Neigung n , welche eine Normalschnitt-Ebene im Abstände s von dem Punkte, in welchem sie selbst normal ist, mit der Flächen-Normale des Ellipsoids bildet. Mit dieser Neigung haben wir uns in § 69. ausführlich beschäftigt, und wir haben daselbst in (7) S. 358 gefunden:

$$\sin n = \sin \delta_1 \sin \alpha'' \quad \text{oder genähert} \quad n = \delta_1 \sin \alpha \quad (1)$$

Um diese Formel unserer vorliegenden Aufgabe anzupassen, haben wir zuerst in Fig. 1. S. 377 alle Verhältnisse veranschaulicht; die Gerade AB stellt eine geodätische Linie zwischen zwei Punkten A und B vor; AaB ist der Normal-Schnitt in A , und BbA der Normal-Schnitt in B . Das sind dieselben Bezeichnungen wie in Fig. 1. § 67. S. 347, während nun die Azimutal-Bezeichnungen verschieden von Fig. 1. § 67. S. 347, dagegen mit Fig. 1. § 71. S. 364 übereinstimmend sind, nämlich Azimute der geodätischen Linie in A und B , bzw. α und β , dann α_1 das Azimut AaB und α' das Azimut AbB , und entsprechend bei B . Die Differenzen $\alpha_1 - \alpha'$ und $\beta_1 - \beta'$ sind, wie wir in § 69. gesehen haben, nur von der Ordnung $\eta^2 \sigma^2$; und da auch die

Differenzen $\alpha_1 - \alpha$ und $\alpha - \alpha'$ u. s. w. nur von diesem Range sind, werden wir, von Anfang an, entsprechend kleine Vernachlässigungen eintreten lassen. Wenn die Formel (1) mit α sich auf den Punkt A bezieht, so gilt entsprechend für den Punkt B die Formel:

$$n' = \delta_2 \sin \beta \quad (2)$$

Hiezu ist nach (13) § 67. S. 350:

$$\delta_2 = \eta_1^2 \frac{\Delta \varphi}{V_1^2} - \frac{3}{2} \eta_1^2 \left(\frac{\Delta \varphi}{V_1^2} \right)^2 t_1 + \dots \quad (3)$$

Nun hat man aus den Reihen-Entwicklungen von § 59. in Verbindung mit (28) § 63. S. 329:

$$\frac{\Delta \varphi}{V_1^2} = \sigma \cos \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \sin^2 \alpha t_1 \quad (4)$$

$$\text{und:} \quad \beta = \alpha + \sigma \sin \alpha t_1 \quad (5)$$

$$\text{also:} \quad \sin \beta = \sin \alpha + \sigma \sin \alpha \cos \alpha t_1$$

$$\text{dabei ist:} \quad \sigma = \frac{s}{N} \quad t_1 = \tan \varphi_1 \quad (6)$$

Setzt man (3), (4) und (5) in (2), so bekommt man:

$$n' = \eta_1^2 \sigma \sin \alpha \cos \alpha - \eta_1^2 \frac{\sigma^2}{2} \sin \alpha t_1 \quad (7)$$

Dieses ist die Neigung, welche die Schnitt-Ebene AaB im jenseitigen Punkte B mit der Flächen-Normalen von B bildet, und wenn wir noch den Krümmungshalbmesser R' der Schnitt-Kurve AaB im Punkte B wüssten, so könnten wir sofort den Krümmungshalbmesser ϱ der Kurve AaB im Horizont von B angeben:

$$\varrho = \frac{R'}{\sin n'} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\sin n'}{R'} = \frac{n'}{R'} \quad (8)$$

Ausführlicher beschrieben ist ϱ der Krümmungshalbmesser derjenigen Kurve, welche durch Projektion der Schnitt-Kurve AaB auf die Berührungs-Ebene von B entsteht.

Den nun erforderlichen Krümmungshalbmesser R' haben wir in Voraussicht dieses Falles früher am Schlusse von § 68. (20) S. 355 bestimmt, nämlich:

$$R' = R \left(1 - \eta_1^2 \frac{\Delta \varphi}{2} t + \dots \right) \quad (9)$$

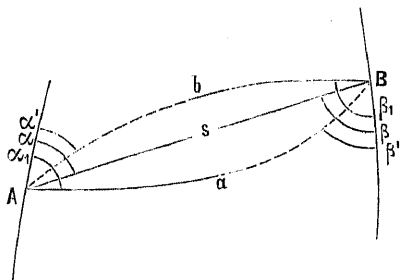
Dabei bedeutet R den Krümmungshalbmesser der Schnitt-Kurve AaB in der Mitte von AB , und da wir nun aus (7), (8) und (9) sehen, dass die Mitführung des zweiten Gliedes von (9) nur eine Korrektur von der Ordnung $\eta^4 \sigma^2$ geben würde, deren Ordnung in (7) ohnehin vernachlässigt ist, nehmen wir nun schlechtlin $R' = R$ als konstant, und bilden aus (7), (8) und (9):

$$\frac{1}{\varrho} = \eta_1^2 \frac{s}{RN} \sin \alpha \cos \alpha - \eta_1^2 \frac{s^2}{2 RN^2} \sin \alpha t_1 \quad (10)$$

Nun denken wir uns die drei Kurven von Fig. 1. durch ein rechtwinkliges Koordinaten-System in folgender Art verbunden:

In einer Ebene wird eine Gerade AB gezogen, welche als Abbild einer geodätischen Linie AB auf dem Ellipsoid betrachtet wird. Diese Linie dient als Ab-

Fig. 1.



scissen-Axe; und durch kurze geodätische Ordinaten-Linien rechtwinklig hiezu, werden benachbarte Punkte auf die geodätische Abscissen-Linie bezogen, ähnlich wie in der Ebene, und auf der Kugel bei den *Soldnerschen* Coordinaten (S. 261).

Was die nun nötigen Vernachlässigungen betrifft, so wissen wir schon von (17) § 69. S. 359, dass die Ordinaten eines solchen Systems nur von der Ordnung $\eta^2 \sigma^3$ sind. Die Ordinaten-Konvergenz (in erster Näherung sphärisch nach Fig. 3. S. 266 berechnet), wird dann nur von der Ordnung $\eta^2 \sigma^4$, woraus man weiter schliesst, dass es für unsere Zwecke genügt, die fraglichen Coordinaten wie *ebene* rechtwinklige Coordinaten zu behandeln.

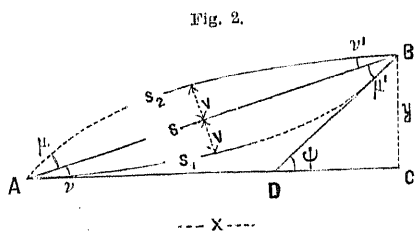


Fig. 2.

Diesen Bedingungen entsprechend ist das Coordinaten-System in nebenstehender Fig. 2. gezeichnet. AB ist das geradlinig erscheinende Abbild der geodätischen Linie AB ; jedoch als Abscissen-Axe des Coordinaten-Systems wird nicht AB , sondern die Tangente AC des Normalschnittes von $A s_1 B$ genommen.

Die Normalschnitt-Kurve $A s_1 B$ von A nach B habe eine Gleichung, deren zweiter Differential-Quotient sei:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = P x + Q \frac{x^2}{2} \quad (11)$$

Diesen zweiten Differential-Quotienten dürfen wir in bekannter, hier genügender, Annäherung gleich der Reciproken des Krümmungshalbmessers ϱ nach (10) setzen, ebenso ist auch $s = x$ zu setzen, und damit folgt aus (10) und (11):

$$P = \frac{\eta_1^2}{R N} \sin \alpha \cos \alpha, \quad Q = -\frac{\eta_1^2}{R N^2} \sin \alpha \iota_1 \quad (12)$$

Damit ist auch bestimmt, dass die zunächst unbestimmt angenommene Gleichung (11) kein Glied ohne x hat. Man kann die Kurven-Gleichung (11) zweimal integrieren:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P x^2}{2} + \frac{Q x^3}{6} \quad (13)$$

$$y = \frac{P x^3}{6} + \frac{Q x^4}{24} \quad (14)^*)$$

Nun ist es leicht, die Winkel ν und μ anzugeben, welche, nach Fig. 2., die Kurve $A s_1 B$ an beiden Enden mit der geodätischen Linie (Schnur) AB bildet.

Aus (14) findet man mit $x = s$:

$$\nu = \frac{P s^2}{6} + \frac{Q s^3}{24}$$

und ebenso aus (13):

$$\psi = \nu + \mu' = \frac{P s^2}{2} + \frac{Q s^3}{6} \quad \text{also} \quad \mu' = \frac{P s^2}{3} + \frac{Q s^3}{8}$$

Durch Einsetzen der Coefficienten P und Q von (12) gehen diese beiden Gleichungen:

*) Diese Gleichung (14) ist in erster Näherung (mit Vernachlässigung von x^4) die Gleichung einer kubischen Parabel, d. h. derselben Kurve, welche wir in Band II, S. 690 als Übergangs-Kurve für Eisenbahnen kennen gelernt haben.

$$\nu = \frac{\eta_1^2}{6} \frac{s^2}{R N} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\eta_1^2}{24} \frac{s^3}{R N^2} \sin \alpha t_1 \quad (15)$$

$$\mu' = \frac{\eta_1^2}{3} \frac{s^2}{R N} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\eta_1^2}{8} \frac{s^3}{R N^2} \sin \alpha t_1 \quad (16)$$

Die Länge s_1 der Kurve $A s_1 B$ findet sich, indem $AC = c$ gesetzt wird, in erster Näherung:

$$s_1 = \int_0^c \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^c \left(1 + \frac{P^2 x^4}{8}\right) dx = c + \frac{P^2 c^5}{40} \quad (17)$$

Zur Vergleichung hat man die Länge der Geraden AB :

$$s = \sqrt{c^2 + \left(\frac{P c^3}{6}\right)^2} = c + \frac{P^2 c^5}{72} \quad (18)$$

Aus (17) und (18) hat man die Differenz, indem $c = AC$ nun genügend $= s$ gesetzt wird:

$$s_1 - s = \frac{P^2 s^5}{90} = \frac{\eta_1^4}{90} \frac{s^5}{R^2 N^2} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \quad (19)$$

Auch den Querabstand v findet man leicht als Differenz der Mittel-Ordinaten, in erster Näherung:

$$v = \frac{1}{2} \frac{P s^3}{6} - \frac{P}{6} \left(\frac{s}{2}\right)^3 = \frac{1}{16} P s^3 = \frac{\eta_1^2}{16} \frac{s^3}{R N} \sin \alpha \cos \alpha \quad (20)$$

Bei diesen Formeln (19) und (20) haben wir die zweiten Glieder mit Q vernachlässigt, welche in (15) und (16) noch beibehalten sind.

Wir wollen nun die wichtigen Formeln (15) und (16) noch umformen, so dass die *Mittelbreite* und das *Mittelazimut* eingeführt werden.

Wir setzen hiezu:

$$\frac{q_1 + q_2}{2} = q_m \quad \frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha_m \quad (21)$$

Damit wird:

$$\eta_1^2 = e'^2 \cos^2 q_1 \quad , \quad \eta_2^2 = e'^2 \cos^2 q_m \quad (22)$$

$$\eta_1^2 = \eta_2^2 (1 + 2(q_m - q_1) \tan q_m) = \eta_2^2 (1 + o \cos \alpha t) \quad (22)$$

$$\alpha = \alpha_m - \frac{o}{2} \sin \alpha t \quad (23)$$

$$\sin \alpha = \sin \alpha_m - \frac{o}{2} \sin \alpha \cos \alpha t \quad (24)$$

$$\cos \alpha = \cos \alpha_m + \frac{o}{2} \sin^2 \alpha t \quad (25)$$

All dieses (22), (24), (25) in (15) und (16) eingesetzt, giebt:

$$\nu = \frac{\eta_2^2}{6} \frac{s^2}{R N} \sin \alpha_m \cos \alpha_m + \frac{\eta_2^2}{24} \frac{s^3}{R N^2} \sin \alpha t \quad (26)$$

$$\mu' = \frac{\eta_2^2}{3} \frac{s^2}{R N} \sin \alpha_m \cos \alpha_m + \frac{\eta_2^2}{24} \frac{s^3}{R N^2} \sin \alpha t \quad (27)$$

Wenn man nun auch noch die Winkel ν' und μ von Fig. 2. haben will, so muss man die vorstehende Entwicklung von den Anfangs-Gleichungen (2) und (3) an für den Fall der zweiten Kurve *wiederholen* (was wir hier nicht ausführen); dadurch wird man die Werte ν' und μ finden, die wir nun im Zusammenhang mit den vorstehenden ν und μ' in abgekürzter Bezeichnung zusammenstellen. Wir wollen dabei setzen:

$$\frac{s^2}{2RN} \sin \alpha_m \cos \alpha_m = \varepsilon \quad (28)$$

$$\frac{s}{N} \sin \alpha t = \gamma, \quad \frac{s}{R} = \sigma \quad (29)$$

Es ist nämlich ε in erster Näherung der sphärische Excess eines Dreiecks nach § 69. S. 358, und γ ist in erster Näherung die Meridian-Konvergenz zwischen den Punkten A und B , welche wir auch sonst mit γ bezeichnet haben. Damit erhalten die 4 kleinen Winkel von Fig. 2. folgende Formeln:

$$\mu = \eta^2 \left(\frac{2}{3} \varepsilon - \frac{\sigma^2}{24} \gamma \right) \quad \nu' = \eta^2 \left(\frac{1}{3} \varepsilon - \frac{\sigma^2}{24} \gamma \right) \quad (30)^*$$

$$\nu = \eta^2 \left(\frac{1}{3} \varepsilon + \frac{\sigma^2}{24} \gamma \right) \quad \mu' = \eta^2 \left(\frac{2}{3} \varepsilon + \frac{\sigma^2}{24} \gamma \right) \quad (31)^*$$

$$\mu + \nu = \eta^2 \varepsilon \quad \nu' + \mu' = \eta^2 \varepsilon \quad (32)$$

Diese beiden letzten Formeln (32) stimmen mit den früheren (15) und (32) § 69. —361. Wenn man auch wieder die Azimute selbst nach Fig. 1. einführt, so hat man zwei wichtigsten der vorstehenden Formeln so:

$$\alpha_1 - \alpha = \nu = \eta^2 \left(\frac{1}{3} \varepsilon + \frac{\sigma^2}{24} \gamma \right) \quad (33)$$

$$\beta_1 - \beta = \nu' = \eta^2 \left(\frac{1}{3} \varepsilon - \frac{\sigma^2}{24} \gamma \right) \quad (34)$$

Hieraus auch:

$$(\beta - \alpha) - (\beta_1 - \alpha_1) = \eta^2 \frac{\sigma^2}{12} \gamma = \eta^2 \frac{\sigma^3}{12} \sin \alpha t \quad (35)$$

(Diese Formel haben wir schon früher in (11) § 71. S. 366 angewendet.)

Wenn man die Abkürzungen (28) und (29) auch in (19) und (20) einführt, so erhält man (ohne Unterscheidung von η_1 und η):

$$v = \frac{1}{8} \eta^2 s \frac{\varepsilon}{\rho} \quad \text{und} \quad s_1 - s = \frac{2}{45} \eta^4 s \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right)^2 \quad (36)$$

Die Formeln (30) und (31) mit der zugehörigen Fig. 2. geben über den Lauf der geodätischen Linie zu erkennen, dass dieselbe im allgemeinen zwischen den beiden Normal-Schnitten liegt.

Jedoch ist hier der besondere Fall zu betrachten, dass die Punkte A und B , zwischen denen die geodätischen Linien und die beiden Normal-Schnitte gezogen sind, auf gleicher Höhe liegen, wie in Fig. 3. angedeutet ist. In diesem Falle fallen die beiden Nor-



*) Diese Formeln (bzw. die vorhergehenden von (26) und (27) S. 379) sind die Glieder von der Ordnung $\eta^2 \sigma^3$ übereinstimmend mit den früher von *Andrae* erhaltenen Formeln in dem Werke: „Den Danske Gradmaaling, IV. Bind, Kjøbenhavn 1884“, S. 390 und *Problèmes de haute géodésie, extraits de l'ouvrage Danois: Danske Gradmaaling“ par C. G. Andrae, 1^{er} Cahier, Copenhague 1881, S. 17.* Unsere Entwicklung (welche in erster Näherung in der „Zeitschr. f. Verm. 1884“, S. 241 mitgeteilt wurde) ist unabhängig entstanden und unterscheidet sich von den vielfachen anderen Lösungen der vorliegenden Aufgabe durch die Kürze der Begründung aus unmittelbarer geometrischer Anschauung.

malschnitte daher nicht

Dass

sammenfallen

Fall nicht s

Die 1

Das 2

während dar

annimmt. 1

Die g

geodätische

selben bei A

Denk

gibt dieses

Von

Ordnung σ^3

diese höhere

Zu ei

Damit

nächst $\varepsilon = 1$

Ein 2

mit der Mitt

gibt:

Also

F. =

Dageg

Glied:

und damit v

malschnitte (vertikale Schnitte) in *einen* zusammen, und die geodätische Linie kann daher nicht mehr *zwischen* den beiden liegen.

Dass die geodätische Linie nicht selbst mit diesen beiden ebenen Schnitten zusammenfallen kann, ist unmittelbar einzusehen, insofern die geodätische Linie in diesem Fall nicht selbst eine ebene Kurve sein kann.

Die Formeln (28)–(31) geben weitere Aufklärung:

Das *Mittel*-Azimut ist in diesem Falle $\alpha_m = 90^\circ$, wodurch nach (28) $\varepsilon = 0$ wird, während damit γ nach (29) nicht verschwindet, sondern seinen grössten Wert $= \sigma t$ annimmt. Die Formeln (30) und (31) geben nun:

$$\mu = \nu' = -\eta^2 \frac{\sigma^2}{24} \gamma, \quad \nu = \mu' = +\eta^2 \frac{\sigma^2}{24} \gamma \quad (37)$$

Die geometrische Deutung dieser beiden Formeln ist in Fig. 3. gegeben; die geodätische Linie verläuft über den beiden vertikalen Schnitten, und bildet mit denselben bei *A* und bei *B* einen kleinen Winkel ζ , dessen absoluter Werth nach (37) ist:

$$\zeta = \eta^2 \frac{\sigma^2}{24} \gamma = \eta^2 \frac{\sigma^3}{25} t \quad \text{oder} \quad = e' \frac{\sigma^3}{24} \sin \varphi \cos \varphi \quad (38)$$

Denkt man sich eine Dreiecksseite $s = 100\,000^m$ in der Breite $\varphi = 45^\circ$, so giebt dieses nur $\zeta = 0,0001''$.

Von ähnlich kleinem Werte sind auch die übrigen höheren Glieder von der Ordnung σ^3 in den vorstehenden Formeln; und für messbare Dreiecksseiten kommen diese höheren Glieder nicht in Betracht.

Zu einem ersten Zahlen-Beispiel nehmen wir rund:

$$s = 100\,000^m, \quad \varphi = \alpha = 45^\circ.$$

Damit wird nach S. 215, $\log N = 6,8054$, $\log R = 6,8046$ und damit zunächst $\varepsilon = 12,66''$, und im übrigen nach den vorstehenden Formeln:

$$\mu = \frac{2}{3} \eta^2 \varepsilon = 0,028'' \quad \nu = \frac{1}{3} \eta^2 \varepsilon = 0,014'' \quad (39)$$

$$2\nu = 0,0052'' \quad s_1 - s = s_2 - s = 0,000\,000\,0002'' \quad (40)$$

Ein zweites Beispiel (kleines sphäroidisches Normal-Beispiel (2) § 77, S. 386) mit der Mittelbreite $\varphi = 50^\circ$, Breiten-Unterschied $= 1^\circ$ und Längen-Unterschied $= 1^\circ$ giebt:

$$s = 132\,315^m, \quad \alpha = 32^\circ 48' 20''$$

$$\log N = 805\,496, \quad \log R = 6,804\,645$$

$$\log \eta^2 = 7,443\,454, \quad \eta^2 \varepsilon = 0,056\,015$$

Also in erster Näherung:

$$\nu = \nu' = \frac{1}{3} \eta^2 \varepsilon = 0,018\,672'' \quad \text{und} \quad \mu = \mu' = \frac{2}{3} \varepsilon = 0,037\,343''$$

Dagegen nach den genaueren Formeln (30) und (31) hat man noch ein zweites Glied:

$$\eta^2 \frac{\sigma^2}{24} \gamma = \eta^2 \frac{\sigma^3}{24} \sin \alpha \tan \varphi \varphi'' = 0,000\,137''$$

und damit wird:

$$\mu = 0,037\,206'' \quad \nu' = 0,018\,535'' \quad (41)$$

$$\nu = 0,018\,809'' \quad \mu' = 0,037\,480'' \quad (42)$$

$$\mu + \nu = 0,056\,015'' \quad \nu' + \mu' = 0,056\,015'' \quad (43)$$

Diese Summen $\mu + \nu = \nu' + \mu'$ stimmen hinreichend mit dem früheren (28) § 67. S. 351 und namentlich mit (33) § 69. S. 362.

Nach (36) berechnen wir auch noch:

$$2\nu = 0,0090^m \quad \text{und} \quad s_1 - s = s_2 - s = 0,000\,000\,000\,4^m \quad (44)$$

Die Differenz $s_1 - s = s_2 - s$ zwischen der linearen Grösse eines Normalschnittes und der geodätischen Linie ist nach (40) und (44) eine nicht einmal mehr mikroskopisch messbare Grösse. Auch für $s = 1\,000\,000^m$, mit α und $\varphi = 45^\circ$, erreicht diese Differenz nur den Wert von $0,02^m$. Diese Differenz ist in allen praktischen Fällen zu vernachlässigen.

§ 76. Bedeutung der geodätischen Linie für die praktischen Vermessungen.

Die geodätische Linie ist niemals Gegenstand der unmittelbaren *Messung*, sondern nur der *Berechnung*, und dadurch mittelbar ein Hilfsmittel für ausgedehnte geodätische Messungen.

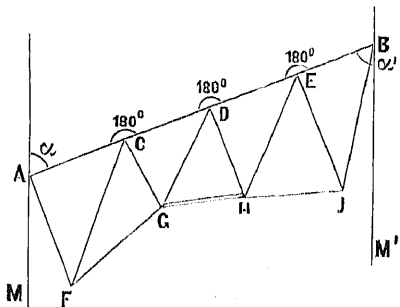
Bei der Messung der einzelnen Dreiecke ist von geodätischen Linien nicht die Rede, denn die Sichten der Theodolit-Messung erfolgen zweifellos in vertikalen Schnitten, und nicht in geodätischen Linien; und auch die astronomischen Azimut-Messungen beziehen sich nicht auf die geodätische Linie, sondern ebenfalls auf vertikale Schnitte.

Nun kann man die gemessenen Azimute und die gemessenen Horizontal-Winkel von den vertikalen Schnitten auf die geodätischen Linien *reduzieren*, wie im vorigen § 75. bei Fig. 2. S. 378 gezeigt worden ist; die Reduktion beträgt sehr wenig, nämlich für 45° Breite und Azimut 45° bei einer Entfernung von $100\,000^m$ nur $0,04''$ im Azimut, so dass diese Reduktion meist vernachlässigt wird; und jedenfalls kann die Reduktion für die Entfernung selbst immer vernachlässigt werden.

Sei es nun, dass man diese kleinen Reduktionen (nebst anderen, z. B. von § 70.) vernachlässigt, oder sie in Rechnung bringt; jedenfalls *kann* man letzteres thun, und an Stelle eines in Normalschnitten gemessenen Dreiecks-Netzes kann man also nun ein Dreiecks-Netz setzen, dessen Seiten geodätische Linien sind, und dessen Winkel von den horizontalen Tangenten der geodätischen Linien in den Eckpunkten eingeschlossen werden.

Wie man ein solches sphäroidisches Dreiecks-Netz geodätischer Linien in theoretischer Strenge berechnen kann, werden wir erst in unserem späteren Kapitel X. kennen lernen; in der Praxis genügt fast immer die *sphärische* Dreiecks-Berechnung, welche wir in § 39. — § 42. behandelt haben.

Fig. 1.



Um nun weiter zu langen geodätischen Linien überzugehen, welche die Ausdehnung nicht bloss einzelner Dreiecks-Seiten, sondern ganzer Dreiecks-Ketten haben, wollen wir nach Fig. 1. die Annahme machen, eine Dreiecks-Kette zwischen den Punkten A und B enthalte einen Zug $ACDEB$, welcher in C, D und E bei der Messung *zufällig* Winkel von 180° geliefert habe.

In diesem Falle kann die Linie $AC + CD + DE + EB = AB$, mit den Azimuten α und α' an ihren Endpunkten ge-

radezu als *eine* lange geodätische Linie weiter behandelt werden, indem man in den einzelnen Strecken AC , CD u. s. w. die Azimut-Reduktionen zwischen der geodätischen Linie und den Normalschnitten entweder vernachlässigt, oder nach den Formeln (33) und (34) § 75. S. 380 in allen Beziehungen in Rechnung gebracht denkt.

Ohne diese kleinen Reduktionen erscheinen die Strecken AC , CD , DE u. s. w. mit Brechungs-Winkeln von 180° , als Elemente der geodätischen Linie AD in dem differentialen Sinne der früheren Fig. 2. § 72. S. 368.

Die in Fig. 1. gemachte Annahme, dass bei der Triangulierung zwischen A und B in den Punkten C , D und E Brechungs-Winkel von 180° erhalten werden, kann als Vorbereitung des allgemeineren Falles von Fig. 2. dienen, wobei die geodätische Linie zwischen A und B nicht mit Dreiecks-seiten selbst zusammenfällt, sondern verschiedene Dreiecks-Seiten in den Punkten $a b c d e$ schneidet, und am Anfang und am Ende gewisse Winkel δ und γ mit Dreiecks-Seiten bildet.

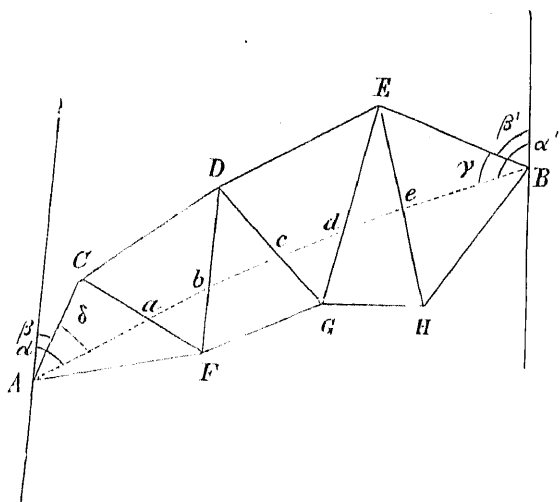
Sobald man *einen* dieser Winkel δ und γ wüsste, könnte man die ganze geodätische Linie $A a b c d e B$ sphärisch berechnen, indem man die einzelnen Strecken als Seiten sphärischer Dreiecke behandelt, z. B. Aa als Seite des Dreiecks ACa oder AFa , dann ab als Seite des Dreiecks aFb u. s. w. Die Azimut-Übertragung in

a , b u. s. w. müsste stets nach dem Gesetz der gleichen Scheitel-Winkel geschehen, also so, dass Winkel $AaC = \text{Winkel } baF$ u. s. w.

All dieses setzt, wie schon erwähnt, voraus, dass man den einen Winkel δ oder γ kenne, und da das in Wirklichkeit nicht genau der Fall ist, kann das ganze Verfahren nur *mittelbar* angewendet werden. Man rechnet nämlich die ganze Dreiecks-Kette, mit Ausnahme eines mittleren Krümmungshalbmessers zuerst sphärisch durch, und dadurch sind auch die beiden Winkel δ und γ sphärisch bestimmt. Man kann zu ihrer Ausmittlung z. B. *Soldnersche* Coordinaten (§ 46.—§ 48.) oder sphärische geographische Coordinaten (§ 57.—§ 60.) oder irgend welche andere geschlossene oder entwickelte Formeln der sphärischen Trigonometrie anwenden; erste Näherungen der Winkel δ und γ werden sich jedenfalls finden lassen.

Mit einer solchen Näherung, z. B. für δ , beginnt man nun eine zweite schärfere Rechnung, formell auch sphärisch, aber so, dass in jedem der Dreiecke AaF , baF , u. s. w. ein *besonderer*, der mittleren geographischen Breite des Dreiecks entsprechender Krümmungshalbmesser angewendet wird. Wenn dann am Ende das letzte Dreieck HeB oder eHB nicht schliesst, d. h. wenn man den Endpunkt B verfehlt hat, so

Fig. 2.



kann man aus der Querabweichung und der Gesamtlänge AB leicht eine Verbesserung berechnen, mit welcher die ganze Rechnung wiederholt und dann wohl zum Schluss gebracht werden kann.

Stimmt diese ganze Rechnung von A bis B in sich, sind also auch die Winkel δ und γ bekannt, so kann man auch die in A und B etwa gemessenen Azimute β und β' , welche sich als astronomische Messungen auf die Dreiecks-Seiten AC und BE beziehen, nun auf die Azimute α und α' der geodätischen Linie AB , bzw. BA reduzieren, denn es ist:

$$\alpha = \beta + \delta \quad , \quad \alpha' = \beta' + \gamma \quad (1)$$

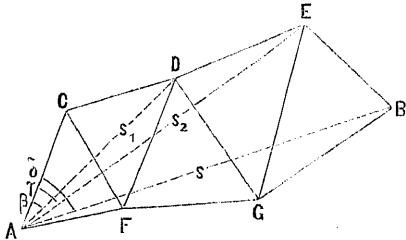
Sphärische Polar-Coordinationen.

Wenn man bei der soeben beschriebenen Berechnung geodätischer Linien, welche durch vorstehende Fig. 2. veranschaulicht ist, sich begnügen will, für *alle* in Frage kommenden Dreiecke *einen* gemeinschaftlichen Krümmungshalbmesser anzuwenden, dann ist indirekte Rechnung und Wiederholung nicht nötig, und von den verschiedenen möglichen Formen der sphärischen Coordinaten, die wir hiebei erwähnt haben, wollen wir *eine* Form, nämlich sphärische Polar-Coordinationen noch besonders betrachten, weil diese Form bei *Bessels* „Gradmessung in Ostpreussen“ zur Anwendung kam und zu manchen Erörterungen Veranlassung gegeben hat.

Denken wir uns in Fig. 3., welche im wesentlichen dieselbe Bedeutung hat, wie Fig. 2., ausser AB auch noch die Linien AD und AC gezogen, so ist klar, dass man das Dreieck ACD berechnen kann aus den zwei Seiten AC , CD und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel bei C . Damit hat man die Entfernung $AD = s_1$ und auch den Winkel β bei A , und alle Winkel bei D .

Man kann daher nun ein zweites langgestrecktes Dreieck ADE berechnen,

Fig. 3.



welches die neue Entfernung $AE = s_2$, den kleinen Winkel $\gamma - \beta$ bei A und alle Winkel bei E liefert. Ein letztes langgestrecktes Dreieck endlich liefert die Entfernung $AB = s$, den kleinen Winkel $\delta - \gamma$ bei A , also auch δ selbst, und alle Winkel bei B . Hiebei kann man die einzelnen Dreiecke nicht bloss sphärisch, sondern auch sphäroidisch berechnen (vgl. das am Schlusse dieses Paragraphen folgende Citat *Hansen*).

Ein letztes, und wohl das beste Verfahren, lange geodätische Linien aus Dreiecksketten zu berechnen, können wir durch vorgreifendes Zitieren der Theorien unseres *nächsten* Kapitels angeben: Man rechnet die geodätische Übertragung von Länge, Breite und Azimut schrittweise von Dreiecksseite zu Dreiecksseite durch die ganze Kette hindurch nach § 79. (oder auch nach § 78.) und dann kann man die ganze Linie vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt nach § 83. berechnen, sowie etwa nach § 82. noch eine Kontroll-Rechnung dazu machen.

Bei diesem Verfahren braucht man, ohne indirekt rechnen zu müssen, nicht *mehr* Voraussetzungen zu machen, in Bezug auf die Erddimensionen und auf die Breiten des Anfangspunktes und das Azimut der Anfangs-Richtung, als unbedingt nötig ist. Eine völlig voraussetzungslose Berechnung geodätischer Linien giebt es nicht.

Über die Bedeutung der geodätischen Linie für die praktische Geodäsie im allgemeinen lässt sich so viel sagen: Die Einführung der Theorie der geodätischen Linie in der Geodäsie ist keine Notwendigkeit, wie z. B. die Theorie der geradlinigen ebenen Dreiecke es für die ebene Triangulierung ist; man könnte die Aufgaben der höheren Geodäsie auch z. B. durch *Sehnen*-Dreiecke und polyedrisch-räumliche Punkt-Bestimmungen und in noch manch anderer Weise behandeln; allein die geodätische Linie hat sich bis jetzt als bestes Mittel bewährt, zwischen den unmittelbaren geodätischen und astronomischen Messungen einerseits und den Annahmen über die Erdoberfläche andererseits, die nötigen mathematischen Beziehungen herzustellen.

Geodätische Linien als Repräsentanten ganzer Triangulierungs-Ketten sind z. B. die Verbindungslinien des astronomisch-geodätischen Netzes von Fig. 1. § 28. S. 193.

Die sphärische Berechnung langer geodätischer Linien aus Dreiecks-Ketten ist von *Bessel* in der „Gradmessung in Ostpreussen“ § 61. S. 253–254 ausgeführt worden. Um hierbei ganz sicher den *Besselschen* Rechnungsgang zu verstehen, haben wir in unserer vorigen Auflage, Karlsruhe 1878, § 61. und § 77., S. 297–300 und S. 340–342, ein Zahlen-Beispiel mit allen Einzelheiten nachgerechnet. Es besteht hierbei eine unaufgeklärte Frage, warum *Bessel* als Kugelhalbmesser den Äquatorhalbmesser a und nicht den mittleren Krümmungshalbmesser für seine Breite von etwa 55° genommen hat? In der Gesamtausgabe, „Abhandlungen von *P. W. Bessel*, herausgegeben von *Engelmann*, 3. Band, Leipzig 1876“, S. 109 ist auch eine briefliche Notiz hierüber von uns abgedruckt, zu der jedoch jetzt zu bemerken ist, dass ein anderer dort berührter Fehler wohl nicht mit jenem Äquatorhalbmesser zusammenhängt.

Die Frage des *Besselschen* Kugelhalbmessers ist erörtert von *Helmert*, Höhere Geodäsie I. S. 404–405, mit dem Ergebnis, dass der Äquatorhalbmesser in einem Falle von 10 Dreiecken mit rund 60 km Seite, einen Azimut-Übertragungsfehler von $0,6'' \cos 2\varphi$ ergeben würde, der sich auf $0,013'' \sin 2\varphi$ vermindert, bei der Annahme eines mittleren Krümmungshalbmessers für die Mitte der Kette.

Da aber keine besonderen Vorteile aus einer rein sphärischen Rechnung erwachsen, ist solche Rechnung offenbar nicht weiter anzuwenden; am besten wird die im vorstehenden von uns empfohlene Rechnung nach unseren § 79. und § 83. sein.

Zur allmählichen Entwicklung der Berechnungs-Arten für lange geodätische Linien ist auch zu erwähnen General *Baeyers* „Messen auf der sphäroidischen Oberfläche, Berlin 1862“, § 23, mit einer späteren Berichtigung von *Baeyer* nach *Wiegarten* im 60. Bande der „Astr. Nachrichten“, 1863, S. 134–136.

Aus älterer Zeit ist auch zu erwähnen eine Anleitung von *Hansen* zur Berechnung geodätischer Linien, in der Abhandlung von *Hansen*: „Von der Methode der kleinsten Quadrate“ des VIII. Bandes d. Abh. d. m. ph. Cl. d. K. S. Ges. d. W. Nr. V, Leipzig 1867, Art. 154–156, S. 803–806. *Hansen* beschreibt das Verfahren, das in unserer vorstehenden Fig. 3. S. 384 angedeutet ist, empfiehlt aber nicht *sphärische* Berechnung, sondern *sphäroidische* Berechnung der einzelnen Dreiecke (wobei unser späteres Kap. XI. handeln wird).

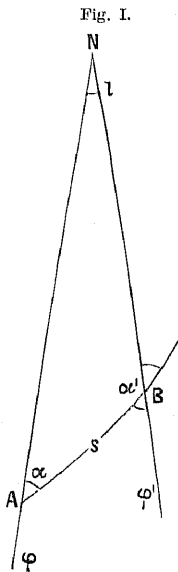
Kapitel VIII.

Geodätische Hauptaufgabe mit Reihen-Entwicklungen für die geodätische Linie.

§ 77. Sphäroidische Normal-Beispiele.

In Fig. 1. S. 386 bezeichnet A einen Punkt des Umdrehungs-Ellipsoids (Sphäroids) mit der Breite φ , entsprechend B einem Punkt mit der Breite φ' ; der Längen-Unterschied dieser beiden Punkte, d. h. der Winkel welchen ihre Meridian-Ebenen NA und NB einschliessen, sei l (von West nach Ost positiv gezählt). Die beiden Punkte sind durch eine geodätische Linie AB verbunden, deren lineare Grösse $= s$ sei und welche bei A und B die Azimute α und α' hat.

Wir zählen im allgemeinen die Azimute von Nord über Ost, wie α im Punkt A ; und das gleichfalls nordöstlich gezählte Azimut im Punkte B wäre also $= \alpha' \pm 180^\circ$, wenn α' der in Fig. 1. eingeschriebene Winkel ist.



Indem man in solchen Fällen unterscheidet *diesseitiger* Punkt *A* und *jenseitiger* Punkt *B*, kann man auch festsetzen, dass im diesseitigen Punkt α von Nord über Ost gezählt und im jenseitigen Punkt stets $\pm 180^\circ$ zu dem Wert α' zuzufügen ist, den die Formeln geben. (Mit anderen Worten: Wir wollen die Azimute nordöstlich zählen, aber das dabei für den jenseitigen Punkt nötige Zusetzen von $\pm 180^\circ$ in den Formeln weglassen.)

Zwischen diesen 6 Grössen, $\varphi, \varphi', l, s, \alpha, \alpha'$, bestehen Beziehungen von ähnlicher Art wie für das *sphärische* Dreieck Fig. 1. § 54. S. 293, welche hauptsächlich in zwei Aufgabenformen sich ausdrücken, nämlich *erstens*: gegeben φ, φ' und l , gesucht s, α und α' oder *zweitens*: gegeben φ, s und α ; gesucht φ', l und α' .

Diese beiden Aufgaben, deren Lösungen gegenseitig mehrfach ineinander übergehen, werden unter dem Namen *Geodätische Hauptaufgabe* zusammengefasst.

Ehe wir an die verschiedenen Auflösungen der fraglichen Aufgabe selbst gehen, schicken wir einige Beispiele hiefür voraus (ähnlich wie wir dieses auch für die sphärische Aufgabe S. 294 gethan haben). Dass diese Beispiele in sich richtig sind, können wir jetzt noch nicht beweisen; dieses wird sich aus der übereinstimmenden Berechnung nach den verschiedenen später zu entwickelnden Methoden ergeben.

Die Bezeichnungen sind bei diesen Beispielen nach vorstehender Fig. 1. genommen.

I. Kleines sphäroidisches Normal-Beispiel.

$$\left. \begin{array}{lll} \varphi = 49^\circ 30' 0'' & \varphi' = 50^\circ 30' 0'' & l = 1^\circ 0' 0'' \\ \frac{\varphi' + \varphi}{2} = 50^\circ 0' 0'' & \varphi' - \varphi = 1^\circ 0' 0'' & \\ \frac{\alpha' + \alpha}{2} = 32^\circ 48' 20,4580'' & \alpha' - \alpha = 0^\circ 45' 57,8942'' & \\ \frac{\alpha' - \alpha}{2} = 0^\circ 22' 58,9471'' & \log s = 5.121\,6103\,131 & \\ \alpha' = 33^\circ 11' 19,4051'' & s = 132\,315,375^m & \\ \alpha = 32^\circ 25' 21,5109'' & & \end{array} \right\} \quad (1)$$

II. Grosses sphäroidisches Normal-Beispiel.

$$\left. \begin{array}{lll} \varphi = 45^\circ 0' 0'' & \varphi' = 55^\circ 0' 0'' & l = 10^\circ 0' 0'' \\ \frac{\varphi' + \varphi}{2} = 50^\circ 0' 0'' & \varphi' - \varphi = 10^\circ 0' 0'' & \\ \frac{\alpha' + \alpha}{2} = 32^\circ 54' 11,4302'' & \alpha' - \alpha = 7^\circ 41' 51,9408'' & \\ \frac{\alpha' - \alpha}{2} = 3^\circ 50' 55,9704'' & \log s = 6.120\,6674\,805 & \\ \alpha' = 36^\circ 45' 7,4006'' & s = 1\,320\,284,366^m & \\ \alpha = 29^\circ 3' 15,4598'' & & \end{array} \right\} \quad (2)$$

Ein zweites kleines Beispiel, mit nicht runden Zahlen, nehmen wir aus *Bohnenbergers* Triangulierung von Württemberg.

$$\begin{array}{ll}
 \text{III. } P = \text{Hornisgrinde.} & P' = \text{Tübingen.} \\
 \varphi = 48^\circ 36' 21,8966'' & \varphi' = 48^\circ 31' 12,4000'' \\
 l = 0^\circ 50' 55,5537'' = 3055,5537'' & \\
 \alpha = 98^\circ 21' 29,9583'' & \alpha' = 98^\circ 59' 40,6800'' \\
 \log s = 4.801\,8443.0 & s = 63\,364,218
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \varphi \\ l \\ \alpha \\ \log s \end{array}} \right\}$$

Endlich nehmen wir noch ein grösseres Beispiel mit nicht runden Zahlen, welches auch schon von *Bremiker* und *Helmert* mehrfach benützt worden ist.

$$\begin{array}{ll}
 \text{IV. } P = \text{Berlin.} & P' = \text{Königsberg.} \\
 \varphi = 52^\circ 30' 16,7'' & \varphi' = 54^\circ 42' 50,6'' \\
 l = 7^\circ 6' 0'' = 25\,560'' & \\
 \alpha = 59^\circ 33' 0,6892'' & \alpha' = 65^\circ 16' 9,3650'' \\
 \log s = 5,724\,2591.353 & s = 529\,979,578^m
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \varphi \\ l \\ \alpha \\ \log s \end{array}} \right\} \quad (4)$$

(Das Beispiel Berlin-Königsberg ist in dem Werke: „Das Messen auf der sphäroidischen Oberfläche von *Baeyer*, Berlin 1862, S. 104—121 mit anderen Zahlenwerten gegeben; die runden Werte $\varphi = 52^\circ 30' 16,7''$, $\varphi' = 54^\circ 42' 50,6''$ und $l = 7^\circ 6' 0''$ haben wir für ein Normal-Rechenbeispiel angenommen nach *Helmert*, Höhere Geodäsie I. S. 158.)

§ 78. Reihen-Entwicklungen nach Potenzen von s .

(Bezeichnungen nach Fig. 1. S. 386.)

Die drei Differential-Gleichungen, welche wir in § 73. S. 373 entwickelt haben, sind, wenn wir nun den Längenunterschied mit l bezeichnen, folgende:

$$ds \cos \alpha = M d\varphi \quad (1)$$

$$ds \sin \alpha = N \cos \varphi dl \quad (2)$$

$$d\alpha = dl \sin \varphi \quad (3)$$

Dabei ist M der Meridian-Krümmungshalbmesser und N der Quer-Krümmungshalbmesser für die Breite φ , d. h. nach (21) und (19) § 33. S. 210:

$$M = \frac{c}{V^3}, \quad N = \frac{c}{V}, \quad \text{wobei } V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad (4)$$

Wenn man diese Bezeichnung V einführt, und zugleich dl aus (3) mittelst (2) eliminiert, so erhält man aus (1), (2) und (3):

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{c} V^3 \cos \alpha \quad (5)$$

$$\frac{dl}{ds} = \frac{1}{c} V \sin \alpha \quad (6)$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{c} V \sin \alpha \tan \varphi \quad (7)$$

Hierauf kann man eine Entwicklung nach dem *Maclaurinschen* Satze gründen, ganz entsprechend der früheren sphärischen Entwicklung von § 60. S. 316. Wir haben, zunächst bis zur dritten Potenz:

$$\varphi' - \varphi = \frac{d\varphi}{ds} \left[s + \frac{d^2\varphi}{ds^2} \right] \frac{s^2}{2} + \frac{d^3\varphi}{ds^3} \left[\frac{s^3}{6} \right] \quad (8)$$

$$l = \frac{dl}{ds} \left[s + \frac{d^2l}{ds^2} \right] \frac{s^2}{2} + \frac{d^3l}{ds^3} \left[\frac{s^3}{6} \right] \quad (9)$$

$$\alpha' - \alpha = \frac{d\alpha}{ds} \left[s + \frac{d^2\alpha}{ds^2} \right] \frac{s^2}{2} + \frac{d^3\alpha}{ds^3} \left[\frac{s^3}{6} \right] \quad (10)$$

Da wir bei den fortgesetzten Differentiierungen stets auch die Ableitung von V brauchen, schicken wir diese voran:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad , \quad \frac{dV}{d\varphi} = - \frac{e'^2 \sin \varphi \cos \varphi}{V} \quad (11)$$

Zur Abkürzung werden wir immer schreiben:

$$e'^2 \cos^2 \varphi = \eta^2 \quad \text{und} \quad \tan \varphi = t \quad (12)$$

$$\text{und damit wird (11):} \quad V^2 = 1 + \eta^2 \quad \frac{dV}{d\varphi} = - \frac{\eta^2}{V} t \quad (13)$$

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = - \eta^2 \frac{V^2}{c} \cos \alpha t \quad (14)$$

Nun leiten wir (5) weiter ab:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{V^3}{c} \cos \alpha \quad , \quad \frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{3V^2}{c} \frac{dV}{ds} \cos \alpha - \frac{V^3}{c} \sin \alpha \frac{d\alpha}{ds}$$

also wegen (14) und (7):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{ds^2} &= -3\eta^2 \frac{V^4}{c^2} \cos^2 \alpha t - \frac{V^4}{c^2} \sin^2 \alpha t \\ \frac{d^2\varphi}{ds^2} &= -\frac{V^4}{c^2} (\sin^2 \alpha t + 3 \cos^2 \alpha \eta^2 t) \end{aligned} \quad (15)$$

Wenn wir dieses weiter ableiten, so ist es nützlich, die Funktion η^2 , welche nach (12) Funktion von φ ist, stets so zu behandeln:

$$\frac{d\eta^2}{d\varphi} = -\eta^2 t \quad \text{allgemeiner} \quad \frac{d\eta^n}{d\varphi} = -n \eta^n t \quad (16)$$

In dieser Weise leiten wir (15) nochmals ab (mit Beachtung, dass $V^3 = V(1 + \eta^2)$):

$$\begin{aligned} \frac{d^3\varphi}{ds^3} &= -\frac{4V^3}{c^2} \left(-\eta^2 \frac{V^2}{c} \cos \alpha t \right) \left\{ \sin^2 \alpha t + 3 \cos^2 \alpha \eta^2 t \right\} \\ &\quad - \frac{V^4}{c^2} \left\{ 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{V}{c} \sin \alpha t^2 + \sin^2 \alpha (1 + t^2) \frac{V}{c} \cos \alpha (1 + \eta^2) \right. \\ &\quad \left. - 6 \cos \alpha \sin \alpha \frac{V}{c} \sin \alpha t \eta^2 t + 3 \cos^2 \alpha (-2 \eta^2 t^2 + \eta^2 (1 + t^2)) \frac{V}{c} \cos \alpha (1 + \eta^2) \right\} \end{aligned}$$

Wenn man dieses ordnet, so findet man:

$$\frac{d^3\varphi}{ds^3} = -\frac{V^5 \cos \alpha}{c^3} \left\{ \sin^2 \alpha (1 + 3 t^2 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2) + \cos^2 \alpha (3 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2 + 3 \eta^4 - 15 \eta^4 t^2) \right\} \quad (17)$$

In gleicher Weise werden auch die anderen Ableitungen behandelt, so dass wir bis zur dritten Ordnung einschliesslich erhalten:

$$\frac{d^2 l}{ds^2} = \frac{2V^2}{c^2 \cos \varphi} \sin \alpha \cos \alpha t \quad (18)$$

$$\frac{d^3 l}{ds^3} = \frac{2V^3}{c^3 \cos \varphi} \left\{ \sin \alpha \cos^2 \alpha (1 + 3 t^2 + \eta^2) - \sin^3 \alpha t^2 \right\} \quad (19)$$

$$\frac{d^2 \alpha}{ds^2} = \frac{V^2}{c^2} \sin \alpha \cos \alpha (1 + 2 t^2 + \eta^2) \quad (20)$$

$$\frac{d^3 \alpha}{ds^3} = \frac{V^3}{c^3} \left\{ \sin \alpha \cos^2 \alpha t (5 + 6 t^2 + \eta^2 - 4 \eta^4) - \sin^3 \alpha t (1 + 2 t^2 + \eta^2) \right\} \quad (21)$$

Ehe wir die Schluss-Formeln zusammensetzen, wollen wir noch ab-
zeichnungen einführen, wobei wir uns nach (21) § 33. S. 210 zuerst zu mei-
dass $\frac{c}{V} = N$ der Quer-Krümmungshalbmesser für die Breite φ ist. Wir setzen

$$s \frac{V}{c} \varrho = \frac{s}{N} \varrho = S \quad (\text{also } S \text{ in Sekunden}) \quad (22)$$

$$\text{oder mit:} \quad \frac{\varrho}{N} = [2] \quad , \quad s [2] = S \quad (23)$$

$$\text{ferner:} \quad S \sin \alpha = n \quad S \cos \alpha = m \quad (24)$$

Dabei ist [2] aus unserer Hilfstafel des Anhangs Seite [2] — [23] zu entnehmen;
oder wenn es sich um ausnahmsweise sehr scharfe Rechnung handelt, ist die 10stellige
Tafel Seite [44] — [45] des Anhangs anzuwenden, welche zunächst 10stellig $\log V$
gibt und dann:

$$[2] = V \frac{\varrho}{c} \quad \text{wo} \quad \log \frac{\varrho}{c} = 8.508\,3274\cdot897 \quad (23a)$$

Nun können wir die Formeln (8), (9), (10) zusammensetzen und finden (mit
Zusetzung der nötigen ϱ im Nenner):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi' - \varphi}{V^2} = m - \frac{n^2}{2 \varrho} t - \frac{3}{2} \frac{m^2}{\varrho} \eta^2 t - \frac{n^2 m}{6 \varrho^2} (1 + 3 t^2 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2) \\ - \frac{m^3}{2 \varrho^2} \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 - 5 \eta^2 t^2) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$l \cos \varphi = n + \frac{n m}{\varrho} t - \frac{n^3}{3 \varrho^2} t^2 + \frac{n m^2}{3 \varrho^2} (1 + 3 t^2 + \eta^2) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha = n t + \frac{n m}{2 \varrho} (1 + 2 t^2 + \eta^2) - \frac{n^3}{6 \varrho^2} t (1 + 2 t^2 + \eta^2) \\ + \frac{n m^2}{6 \varrho^2} t (5 + 6 t^2 + \eta^2 - 4 \eta^4) \end{aligned} \quad (27)$$

Wenn man in diesen Formeln das Azimut $\alpha = 90^\circ$ setzt, so wird $m = 0$, und
indem wir weiter dann $n = \frac{y}{N_1} \varrho$ setzen, sehen wir die Formeln (25), (26), (27) über-
gehen in die früher schon entwickelten Formeln (8), (9) und (11) von § 64. S. 331
für rechtwinklige Coordinaten. Dabei ist das frühere φ_1 nun vertreten durch φ , also
 $\text{tang } \varphi_1$ durch t , u. s. w.

Wenn man in den Formeln (25), (26), (27) die Glieder mit η^2 fortlässt, so hat
man die früheren *sphärischen* Formeln (27), (28), (29) S. 318—319 bis zur dritten Ord-
nung, wie es sein muss.

Andererseits kann man von den früheren *sphärischen* Formeln (27), (28), (29)
S. 318—319 die Glieder vierter Ordnung (mit n^4 , $n^3 m$ u. s. w.) unseren neuen sphä-
roidischen Formeln (25), (26), (27) einfach zusetzen, womit man dasselbe erhält, wie

wenn man von den *nachfolgenden* Entwicklungen S. 391–392 die Glieder vierter Ordnung mit Weglassung von η^2 , $\eta^2 t^2$ u. s. w. benützte.

Wenn wir die Glieder vierter Ordnung ohne alle η^2 nun zu (25), (26), (27) hinzunehmen, wollen wir auch bei den Gliedern dritter Ordnung eine passende Abstufung eintreten lassen, indem wir in der dritten Ordnung η^4 weglassen.

Damit bekommen wir folgende zur praktischen Anwendung zugerichtete Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi' - \varphi}{V^2} &= m - \frac{1}{2\varrho} n^2 t - \frac{3}{2\varrho} m^2 \eta^2 t \\ &\quad - \frac{n^2 m}{6\varrho^2} (1 + 3t^2 + \eta^2 - 9\eta^2 t^2) - \frac{m^3}{2\varrho^2} \eta^2 (1 - t^2) \\ &\quad + \frac{n^4}{24\varrho^3} t (1 + 3t^2) - \frac{n^2 m^2}{6\varrho^3} t (2 + 3t^2) \end{aligned} \right\} \quad (25^*)$$

$$\left. \begin{aligned} l \cos \varphi &= n + \frac{1}{\varrho} n m t \\ &\quad - \frac{n^3}{3\varrho^2} t^2 + \frac{n m^2}{3\varrho^2} (1 + 3t^2 + \eta^2) \\ &\quad - \frac{n^3 m}{3\varrho^3} t (1 + 3t^2) + \frac{n m^3}{3\varrho^3} t (2 + 3t^2) \end{aligned} \right\} \quad (26^*)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= n t + \frac{n m}{2\varrho} (1 + 2t^2 + \eta^2) \\ &\quad - \frac{n^3}{6\varrho^2} t (1 + 2t^2 + \eta^2) + \frac{n m^2}{6\varrho^2} t (5 + 6t^2 + \eta^2) \\ &\quad - \frac{n^3 m}{24\varrho^3} (1 + 20t^2 + 24t^4) + \frac{n m^3}{24\varrho^3} (5 + 28t^2 + 24t^4) \end{aligned} \right\} \quad (27^*)$$

Die hiebei nötigen konstanten Logarithmen sind:

$$\left. \begin{aligned} \log \frac{1}{\varrho} &= 4.685\,5750-10, \quad \log \frac{1}{2\varrho} = 4.384\,5449-10, \quad \log \frac{3}{2\varrho} = 4.861\,6661-10 \\ \log \frac{1}{2\varrho^2} &= 9.070\,120-20, \quad \log \frac{1}{3\varrho^2} = 8.894\,028-20, \quad \log \frac{1}{6\varrho^2} = 8.592\,998-20 \\ \log \frac{1}{3\varrho^3} &= 3.57960-20, \quad \log \frac{1}{6\varrho^3} = 3.27857-20, \quad \log \frac{1}{24\varrho^3} = 2.67651-20 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Mit diesen konstanten Coefficienten kann man auch unsere Hilfstafeln Seite [34]–[37] des Anhangs benützen.

Wir wollen unser kleines sphäroidisches Normal-Beispiel (1) §. 77. S. 386 in dieser Weise berechnen:

$$\text{Gegeben } \varphi = 49^\circ 30' 0'' \quad \alpha = 32^\circ 25' 21,5109''$$

$$\begin{array}{l|l} \text{hiezv von Seite [15] des Anhangs} & \log s = 5.121\,6103\cdot1 \\ & \log [2] = 8.508\,9420\cdot3 \\ & \log S = 3.630\,5523\cdot4 \end{array}$$

Im übrigen giebt die Ausrechnung nach dem angegebenen Verfahren, in ähnlicher Weise wie bei dem sphärischen Beispiel S. 316:

Breite $q' - q$	Länge l	Azimuth $\alpha' - \alpha$	(29)
+ 3615,6269"	+ 3526,1653"	+ 2681,8172"	
— 15,2415	+ 72,1660	+ 74,9467	
— 0,3773	— 0,1986	— 0,2063	
+ 0,0006	+ 1,8371	+ 1,8061	
— 0,0085	+ 0,0300	+ 0,0303	
3600,0002"	3599,9998"	2757,8940"	
Soll 3600,0000"	3600,0000"	2757,8942"	

Die Rechnung stimmt also befriedigend; sie ist aber ziemlich umständlich, und würde nur etwa durch Beigabe ausführlicher Coëfficienten-Tabellen die nötige Geschmeidigkeit erlangen.

Anders steht die Sache, wenn man nur *Näherungswerte* auf etwa 1" genau berechnen will, welche nach dem später zu beschreibenden Verfahren von § 79. noch verbessert werden sollen. In diesem Falle rechnet man nur die Hauptglieder mit dem Coëfficienten [2] streng, nebst V^2 bei der Breite, im übrigen nimmt man nur noch die sphärischen Glieder (setzt also $\eta^2 = 0$) und kann dann die Coëfficienten-Tabelle unseres Anhangs Seite [36] — [37] benützen.

Die Formeln (25), (26), (27) sind bis auf Glieder von der Ordnung η^2 einschliesslich übereinstimmend mit denjenigen Formeln, welche wir früher auf ganz *anderem* Wege entwickelt haben, nämlich mit den Formeln (12), (13), (14) § 71. S. 366, wobei nur die theilweise verschiedene Bezeichnungsart zu berücksichtigen ist, indem das frühere σ von S. 366 nun durch S , und λ durch l ersetzt ist.

Dadurch ist die schon auf S. 366 zum voraus behauptete Gesamt-Kontrollierung aller unserer Entwicklungen von § 67. — § 75. nun bestätigt, und zwar bis auf Glieder von der Ordnung $\eta^2 S^2$ und $\eta^2 S^3$ einschliesslich ($\eta^4 S^3$ ausschliesslich; $\eta^4 S^2$ kommt explicit überhaupt nicht vor).

Weitere Entwicklungen bis zur sechsten Ordnung.

Ohne zunächst die Frage zu erörtern, welche Glieder bei gewissen Ausdehnungen der Dreiecks-Seiten s bzw. S noch von Einfluss auf gewisse Rechnungs-Ergebnisse sind, stellen wir im folgenden die Differential-Quotienten zusammen, welche wir in gleicher Weise, wie bei (13) — (21) angegeben wurde, entwickelt haben; und zwar bis zur fünften Ordnung mit *allen* Gliedern die überhaupt auftreten, bei der sechsten Ordnung nur noch mit den Gliedern ohne η^2 , d. h. mit den sphärischen Gliedern. Um die Abkürzungen n und m nach (24) anwenden zu können, setzen wir links immer s , s^2 , s^3 u. s. w. als Faktor zu, und nehmen auch den konstanten Faktor V^2 bei q und $\cos q$ bei l auf die linke Seite herüber.

$$\frac{dq}{ds} \frac{s}{V^2} = +m$$

$$\frac{d^2 q}{ds^2} \frac{s^2}{V^2} = -n^2 t - m^2 (3 \eta^2 t)$$

$$\frac{d^3 q}{ds^3} \frac{s^3}{V^2} = -n^2 m (1 + 3 t^2 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2) - 3 m^3 \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 - 5 \eta^2 t^2)$$

$$\frac{d^4 q}{d s^4} \frac{s^4}{V^2} = + n^4 t (1 + 3 t^2 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2) - 2 n^3 m^2 t (4 + 6 t^2 - 13 \eta^2 - 9 \eta^2 t^2 - 17 \eta^4 + 45 \eta^4 t^4) \\ + m^4 t \eta^2 (12 + 6 \eta^2 - 45 \eta^2 t^2 + 57 \eta^4 - 105 \eta^4 t^2)$$

$$\frac{d^5 q}{d s^5} \frac{s^5}{V^2} = + n^4 m (1 + 30 t^2 + 45 t^4 + 2 \eta^2 - 72 \eta^2 t^2 - 90 \eta^2 t^4 + \eta^4 - 102 \eta^4 t^2 + 225 \eta^4 t^4) \\ - 2 n^3 m^3 (4 + 30 t^2 + 30 t^4 - 9 \eta^2 - 18 \eta^2 t^2 - 45 \eta^2 t^4 - 30 \eta^4 + 354 \eta^4 t^2 - 36 \eta^4 t^4 \\ - 17 \eta^6 + 402 \eta^6 t^2 - 525 \eta^6 t^4) \\ + m^5 \eta^2 (12 - 12 t^2 + 81 \eta^2 - 426 \eta^2 t^2 + 45 \eta^2 t^4 + 126 \eta^4 - 1406 \eta^4 t^2 + 1030 \eta^4 t^4 \\ + 57 \eta^6 - 1042 \eta^6 t^2 + 945 \eta^6 t^4)$$

$$\frac{d^6 q}{d s^6} \frac{s^6}{V^2} = - n^6 t (1 + 30 t^2 + 45 t^4 + \eta^2 \dots) \\ + 4 n^4 m^2 t (22 + 135 t^2 + 135 t^4 + \eta^2 \dots) \\ - 8 n^2 m^4 t (17 + 60 t^2 + 45 t^4 + \eta^2 \dots)$$

$$\frac{d l}{d s} s \cos q = + n$$

$$\frac{d^2 l}{d s^2} s^2 \cos q = + 2 n m t$$

$$\frac{d^3 l}{d s^3} s^3 \cos q = + 2 n m^2 (1 + 3 t^2 + \eta^2) - 2 n^3 t^2$$

$$\frac{d^4 l}{d s^4} s^4 \cos q = 8 n m^3 t (2 + 3 t^2 + \eta^2 - \eta^4) - 8 n^3 m (1 + 3 t^2 + \eta^2)$$

$$\frac{d^5 l}{d s^5} s^5 \cos q = 8 n m^4 (2 + 15 t^2 + 15 t^4 + 3 \eta^2 + 6 \eta^2 t^2 - 3 \eta^4 t^2 - \eta^6 + 6 \eta^6 t^2) \\ - 8 n^3 m^2 (1 + 20 t^2 + 30 t^4 + 2 \eta^2 + 13 \eta^2 t^2 + \eta^4 - 7 \eta^4 t^2) \\ + 8 n^5 t^2 (1 + 3 t^2 + \eta^2)$$

$$\frac{d^6 l}{d s^6} s^6 \cos q = 16 n m^5 t (17 + 60 t^2 + 45 t^4 + \eta^2 \dots) \\ - 32 n^3 m^3 t (13 + 75 t^2 + 75 t^4 + \eta^2 \dots) \\ + 16 n^5 m t (2 + 30 t^2 + 45 t^4 + \eta^2 \dots)$$

$$\frac{d \alpha}{d s} s = n t$$

$$\frac{d^2 \alpha}{d s^2} s^2 = n m (1 + 2 t^2 + \eta^2)$$

$$\frac{d^3 \alpha}{d s^3} s^3 = n m^2 t (5 + 6 t^2 + \eta^2 - 4 \eta^4) - n^3 t (1 + 2 t^2 + \eta^2)$$

$$\frac{d^4 \alpha}{d s^4} s^4 = n m^3 (5 + 28 t^2 + 24 t^4 + 6 \eta^2 + 8 \eta^2 t^2 - 3 \eta^4 + 4 \eta^4 t^2 - 4 \eta^6 + 24 \eta^6 t^2) \\ - n^3 m (1 + 20 t^2 + 24 t^4 + 2 \eta^2 + 8 \eta^2 t^2 + \eta^4 - 12 \eta^4 t^2)$$

$$\frac{d^5 \alpha}{d s^5} s^5 = n m^4 t (61 + 180 t^2 + 120 t^4 + 46 \eta^2 + 48 \eta^2 t^2 - 3 \eta^4 - 36 \eta^4 t^2 + 100 \eta^6 - 96 \eta^6 t^2 + 88 \eta^8 - 192 \eta^8 t^2) \\ - n^3 m^2 t (58 + 280 t^2 + 240 t^4 + 72 \eta^2 + 104 \eta^2 t^2 - 30 \eta^4 - 32 \eta^4 t^2 - 44 \eta^6 + 144 \eta^6 t^2) \\ + n^5 t (1 + 20 t^2 + 24 t^4 + 2 \eta^2 + 8 \eta^2 t^2 + \eta^4 - 12 \eta^4 t^2)$$

$$\frac{d^6 \alpha}{d s^6} s^6 = n m^5 (61 + 662 t^2 + 1320 t^4 + 720 t^6 + \eta^2 \dots) \\ - n^3 m^3 (58 + 1316 t^2 + 3600 t^4 + 2400 t^6 + \eta^2 \dots) \\ + n^5 m (1 + 182 t^2 + 840 t^4 + 720 t^6 + \eta^2 \dots)$$

In allen diesen vorstehenden Entwicklungen ist $t = \tan \varphi$ und $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$, s ist die lineare geodätische Linie, n und m sind durch (22), (23), (24) S. 389 bestimmt.

Man kann diese höheren Entwicklungen zunächst dazu benützen, um die Formeln (25), (26), (27) nach Bedarf weiter zu führen, indem man nichts mehr zu thun hat, als den vorstehenden höheren Ableitungen von der vierten Ordnung an, die Nenner 24, 120, 720 u. s. w. nebst den nötigen φ , nach dem Schema (1), (2), (3) §. 60. S. 316 beizugeben.

Wir wollen dieses hier nicht im einzelnen ausführen, denn bis zur vierten Ordnung haben wir bereits in (25*), (26*), (27*) abgekürzte Formeln aufgestellt, und strenge Formeln bis zur vierten Ordnung einschliesslich erhält man besser durch das Prinzip der *Mittelbreite*, wie in unserem nachfolgenden § 79. gezeigt werden wird.

Die Glieder fünfter und sechster Ordnung werden zum unmittelbaren Gebrauche zu umständlich; wenn man es mit so grossen Entfernungen zu thun hat, dass diese Glieder fünfter und sechster Ordnung nötig würden, so möge man lieber nach unserem späteren § 83. verfahren.

Die Glieder fünfter und sechster Ordnung sind aber dazu nützlich, dass man überlegen kann, welche Fehler durch ihre Vernachlässigung entstehen, wie wir bereits in § 58. S. 311—312, und in § 60. S. 319—320 gezeigt haben.

Wenn wir hiernach von den höheren Gliedern, namentlich von den Gliedern mit η^2 , η^4 u. s. w. unserer vorstehenden höheren Entwicklungen S. 392 wegn. bzw. keinen unmittelbaren Gebrauch machen, so ist die darauf verwendete Arbeit doch nicht als verloren zu bezeichnen; es wird sich mancher mittelbare Gebrauch ergeben.

Auch war es, ohne Rücksicht auf unmittelbare Anwendung, erwünscht, die *Formen* kennen zu lernen, in welchen die höheren Glieder auftreten, z. B. ob die zu Anfang vorkommenden Ausdrücke $\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$, $\sin \varphi \cos \varphi$ u. s. w. auch sonst einen Übergang auf *Vieffache* 2φ u. s. w. nützlich erscheinen lassen u. dergl. Es ergab sich, dass $\sin 3\varphi$, $\cos 3\varphi$ u. s. w. höchstens gezwungen herzustellen sind; dagegen ist der Modul $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ sehr nützlich, weil e'^2 in jeder Entwicklung *jedenfalls* mit dem Faktor $\cos^2 \varphi$ auftritt, während $e'^2 \sin^2 \varphi$ und ähnliche Formen sich gut auf η^2 e'^2 bringen lässt, zumal die Funktion $t = \tan \varphi$ auch anderwärts als einzige Funktion von φ sich empfiehlt.

Die erste Entwicklung nach Potenzen der geodätischen Linie (bis s^3 einschliesslich) zur Übertragung von Breiten, Längen und Azimuten, ist gegeben von *Legendre* in den Memoiren der Pariser Akademie von 1806. (Als Citat hieraus sind die *Legendreschen* Formeln bei der Badischen Landesvermessung benützt worden zur Berechnung der geographischen Coordinaten aller Hauptpunkte, von Punkt zu Punkt nach den Seiten des Dreiecksnetzes.)

Legendres Entwicklung wurde fortgesetzt von *Leverr* („Comptes rendus, 76. Band, 1873“, S. 410—413) und *Trepied* („Comptes rendus, 80. Band, 1875“, S. 36—40), ferner von *v. Orff* in dem Werke: „Die Bayerische Landesvermessung u. s. w., München 1873“, S. 539—548, und namentlich von *Helmert*, „Höhere Geodäsie I.“ S. 296—300. *Helmert* giebt hier S. 300 geschichtlich-kritische Notizen über die Formeln von *Legendre* bis *v. Orff*.

Unsere vorstehenden Entwicklungen schliessen sich an *Helmert*, „Höhere Geodäsie I.“ S. 298 an, erstrecken sich aber auf höhere Glieder und haben durch konsequente Einführung zusammenfassender Zeichen (V^2 und η^2) die Formelhäufungen gelichtet.

An dieser Stelle ist auch ein Abschnitt aus *Gauss'* „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“ zu erwähnen, nämlich zweite Abhandlung, Göttingen 1846, Art. 26—32. Dabei werden die zahlreichen Differenzierungen zunächst in ganz unbestimmter Form gemacht, worauf (Art. 28) „nur noch eine mechanische Rechnung, nämlich die Entwicklung der Werte der verschiedenen Differential-Quotienten und deren Substitution übrig bleibt“. Derselbe Weg wird auch in einer an *Gauss* anschliessenden Entwicklung (*Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen I.“, S. 115—117) eingeschlagen, und es könnte dieser Weg wohl von Anfang der beste scheinen. Indessen, wenn einmal das Prinzip einer solchen Entwicklung erkannt ist, so bleibt gerade die „mechanische Rechnung“ (fortgesetztes Differenzieren) als Hauptarbeit übrig, und dabei finden wir im Gegensatz zu allgemeinen Formeln mit nachheriger Anwendung auf den besonderen Fall, dass es nützlicher ist, den besonderen Fall schrittweise zu verfolgen, wobei jedoch solche Formeln, welche mehrfach wiederkehren, erkannt und herausgehoben werden müssen.

§ 79. Sphäroidische Mittelbreiten-Formeln.

Den Grundsatz der *Mittel-Breiten*, welchen wir auf die sphärischen Entwicklungen schon in § 57. und in § 61. angewendet haben, können wir nun auch auf die sphäroidischen Reihen anwenden, welche wir im vorigen § 78. gefunden haben.

Dieses (4) in (3) eingesetzt giebt nach Ordnung der Glieder:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = S \cos \alpha_0 - \frac{S^3}{24} \left(3 \frac{\sin^4 \alpha_0}{\cos \alpha_0} t^2 + \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3 t^2 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2) \right. \\ \left. + \cos^3 \alpha_0 (3 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2 + 3 \eta^4 + 12 \eta^4 t^2) \right) \quad (5)$$

Ehe wir dieses weiter verfolgen, machen wir dieselbe Behandlung auch mit den Azimuten, d. h. nach (27) § 78. S. 389:

$$\alpha_2 - \alpha_0 = S_2 \sin \alpha_0 t + \frac{S_2^3}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2 + \eta^2) \\ - \frac{S_2^3}{6} \sin^3 \alpha_0 t (1 + 2 t^2 + \eta^2) + \frac{S_1^3}{6} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 t (5 + 6 t^2 + \eta^2 - 4 \eta^4) \quad (6)$$

$$\alpha_1 - \alpha_0 = -S_1 \sin \alpha_0 t + \frac{S_1^3}{2} \dots + \frac{S_1^3}{6} \sin^3 \alpha_0 \dots - \frac{S_1^3}{6} \sin \alpha_0 \dots \quad (7)$$

Hievon brauchen wir zunächst nur die Addition, d. h.:

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} - \alpha_0 \text{ oder } \alpha - \alpha_0 = \frac{S_2 - S_1}{2} \sin \alpha_0 t + \frac{S_2^3 + S_1^3}{4} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2 + \eta^2) \quad (8)$$

Die Differenz $S_2 - S_1$ von (4) hier in (8) eingesetzt giebt:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{S^2}{8} \left(\frac{\sin^3 \alpha_0}{\cos \alpha_0} t^2 + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2 + \eta^2 + 3 \eta^2 t^2) \right) \quad (9)$$

Damit werden die mehrfach gebrauchten $S \sin \alpha_0$ und $S \cos \alpha_0$:

$$S \sin \alpha_0 = S \sin \alpha - \frac{S^3}{8} \left(\sin^3 \alpha t^2 + \sin \alpha \cos^2 \alpha (1 + 2 t^2 + \eta^2 + 3 \eta^2 t^2) \right) \quad (10)$$

$$S \cos \alpha_0 = S \cos \alpha + \frac{S^3}{8} \left(\frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} t^2 + \sin^2 \alpha \cos \alpha (1 + 2 t^2 + \eta^2 + 3 \eta^2 t^2) \right) \quad (11)$$

Wenn man dieses (11) in (5) einsetzt, wobei man in den Gliedern mit S^3 schlechthin α statt α_0 schreiben darf, so erhält man:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = S \cos \alpha \left\{ 1 + \frac{S^2}{24} \sin^2 \alpha (2 + 3 t^2 + 2 \eta^2) - \frac{S^3}{8} \cos^2 \alpha \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 + 4 \eta^2 t^2) \right\} \quad (12)$$

Nun bilden wir auch die Subtraktion von (6) und (7):

$$\alpha_2 - \alpha_1 = (S_2 + S_1) \sin \alpha_0 t + \frac{S_2^3 - S_1^3}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2 + \eta^2) \\ - \frac{S_2^3 + S_1^3}{6} \left(\sin^3 \alpha_0 t (1 + 2 t^2 + \eta^2) - \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 t (5 + 6 t^2 + \eta^2 - 4 \eta^4) \right)$$

Hier ist wieder $S_2 - S_1$ nach (4) zu berücksichtigen; dieses giebt:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = S \sin \alpha_0 t + \frac{S^3}{24} t \left(\sin^3 \alpha_0 (2 + 4 t^2 + 2 \eta^2) \right. \\ \left. + \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (5 + 6 t^2 + 10 \eta^2 + 18 \eta^2 t^2 + 5 \eta^4) \right)$$

und wenn man endlich noch $S \sin \alpha_0$ nach (10) einsetzt, wobei in den höheren Gliedern α_0 mit α schlechthin verwechselt werden darf, so erhält man:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = S \sin \alpha t \left\{ 1 + \frac{S^2}{24} \sin^2 \alpha (2 + t^2 + 2 \eta^2) + \frac{S^2}{24} \cos^2 \alpha (2 + 7 \eta^2 + 9 \eta^2 t^2 + 5 \eta^4) \right\} \quad (13)$$

Es bleibt nun noch die Formel für l zu entwickeln, wozu wir in zweifacher Anwendung von (26) § 78. S. 389 haben:

$$+ l_2 \cos \varphi = S_2 \sin \alpha_0 + S_2^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 t - \frac{S_2^3}{3} \left(\sin^3 \alpha_0 t^2 - \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 + 3 t^2 + \eta^2) \right) \quad (14)$$

$$- l_1 \cos \varphi = - S_1 \sin \alpha_0 + S_1^2 \dots + \frac{S_1^3}{3} \left(\dots \right) \quad (15)$$

Die Differenz hiervon giebt (da $l_2 + l_1 = l$, und $S_2 + S_1 = S$ ist):

$$l \cos \varphi = S \sin \alpha_0 + (S_2^2 - S_1^2) \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 t - \frac{S_2^3 + S_1^3}{3} \left(\sin^3 \alpha_0 t^2 - \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 + 3 t^2 + \eta^2) \right)$$

Hier ist wieder $S_2 - S_1$ nach (4) und $S \sin \alpha_0$ nach (10) zu berücksichtigen, wodurch man erhalten wird:

$$l \cos \varphi = S \sin \alpha + \frac{S^3}{24} \sin \alpha \left\{ \sin^2 \alpha t^2 - \cos^2 \alpha (1 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2) \right\} \quad (16)$$

Wenn man von (14) und (15) auch die Summe bildet, so bekommt man eine Gleichung, welche jetzt nicht nötig ist, aber später noch nützlich sein wird, nämlich:

$$(l_2 - l_1) \cos \varphi = \frac{S^2 \sin^3 \alpha}{4 \cos \alpha} t + \frac{S^2}{4} \sin \alpha \cos \alpha t (2 + 3 \eta^2) \quad (17)$$

Die Gleichungen (12), (13) und (16) enthalten die Lösung der gestellten Aufgabe; man kann jedoch durch Division von (13) und (16) auch noch eine vierte Gleichung bilden:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = l \sin \varphi \left\{ 1 + \frac{S^2}{24} \left(\sin^2 \alpha (2 + 2 \eta^2) + \cos^2 \alpha (3 + 8 \eta^2 + 5 \eta^4) \right) \right\} \quad (18)$$

Dabei kann man auch in dem Gliede mit $\sin^2 \alpha$ schreiben:

$$2 + 2 \eta^2 = 2 (1 + \eta^2) = 2 V^2 \quad (18a)$$

Die ersten Näherungen von (12) und (16) sind:

$$S \cos \alpha = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = \frac{b}{V^2} \quad (19)$$

$$S \sin \alpha = l \cos \varphi \quad (\text{und } S \sin \alpha t = l \sin \varphi) \quad (20)$$

Dabei soll b nur als Abkürzung für $\varphi_2 - \varphi_1$ dienen.

Damit lassen sich die Formeln (12), (16) und (18) so schreiben:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = S \cos \alpha \left(1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{24} (2 + 3 t^2 + 2 \eta^2) + \frac{b^2}{8 V^4} \eta^2 (t^2 - 1 - \eta^2 - 4 \eta^2 t^2) \right) \quad (21)$$

$$l \cos \varphi = S \sin \alpha \left(1 + \frac{l^2 \sin^2 \varphi}{24} - \frac{b^2}{24 V^4} (1 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2) \right) \quad (22)$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = l \sin \varphi \left(1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{12} V^2 + \frac{b^2}{24 V^4} (3 + 8 \eta^2 + 5 \eta^4) \right) \quad (23)$$

Nun wollen wir die Coefficienten der gefundenen Formeln besonders bezeichnen und herausheben, und dabei auch die nötigen ϱ zusetzen. Zuerst nehmen wir für die Glieder erster Ordnung die schon zu anderen Zwecken mehrfach eingeführten Haupt-
Coefficienten:

$$\frac{\varrho}{N} = [2] \quad , \quad \frac{\varrho}{M} \quad \text{oder} \quad \frac{\varrho}{N} V^2 = [1] \quad (24)$$

Es ist also wegen der Bedeutung von S wie bei (22) — (24) § 78. S. 389:

$$S \sin \alpha = [2] s \sin \alpha \quad , \quad S \cos \alpha = [1] s \cos \alpha \quad (25)$$

Zugleich wollen wir noch folgende weitere Coëfficienten festsetzen:

$$(3) = \frac{1}{24 \varrho^2} \quad (4) = \frac{1}{24 \varrho^2} \frac{1 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2}{V^4} \quad (26)$$

$$(5) = \frac{1}{24 \varrho^2} (2 + 3 t^2 + 2 \eta^2) \quad (6) = \frac{1}{8 \varrho^2} \eta^2 \frac{t^2 - 1 - \eta^2 - 4 \eta^2 t^2}{V^4} \quad (27)$$

$$(7) = \frac{1}{12 \varrho^2} V^2 \quad (8) = \frac{1}{24 \varrho^2} \frac{3 + 8 \eta^2 + 5 \eta^4}{V^4} \quad (28)$$

Ausserdem seien für *logarithmische* Berechnung noch angenommen die Zeichen:

$$[3] = \mu(3) \quad , \quad [4] = \mu(4) \quad \dots \quad [8] = \mu(8)$$

wobei, wie gewöhnlich, μ der logarithmische Modul ist. Für diese letzteren Werte [3], [4] ... [8] haben wir eine Hilfstafel auf Seite [38] — [39] des Anhanges berechnet; wir fügen auch die dabei erforderlichen konstanten Logarithmen bei:

$$\log \frac{\mu}{8 \varrho^2} = 5.105\,8441-10, \quad \log \frac{\mu}{12 \varrho^2} = 4.929\,7528-10, \quad \log \frac{\mu}{24 \varrho^2} = 4.628\,7228-10 \quad (30)$$

Mit diesen Abkürzungen für die Coëfficienten werden die Formeln (22), (21), (23) so geschrieben:

$$l = [2] \frac{s \sin \alpha}{\cos \varphi} (1 + (3) l^2 \sin^2 \varphi - (4) b^2) \quad (31)$$

$$\Delta \varphi = [1] s \cos \alpha (1 + (5) l^2 \cos^2 \varphi + (6) b^2) \quad (32)$$

$$\Delta \alpha = l \sin \varphi (1 + (7) l^2 \cos^2 \varphi + (8) b^2) \quad (33)$$

Die Umkehrung hievon giebt:

$$s \sin \alpha = \frac{l \cos \varphi}{[2]} (1 - (3) l^2 \sin^2 \varphi + (4) b^2) \quad (34)$$

$$s \cos \alpha = \frac{\Delta \varphi}{[1]} (1 - (5) l^2 \cos^2 \varphi - (6) b^2) \quad (35)$$

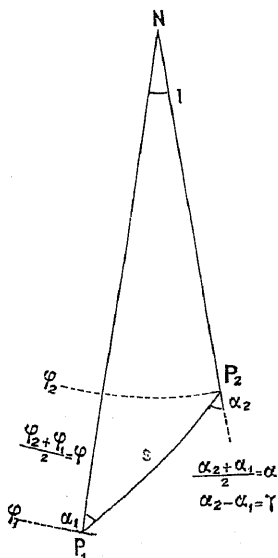
$$\Delta \alpha = l \sin \varphi (1 + (7) l^2 \cos^2 \varphi + (8) b^2) \quad (36)$$

Die entsprechenden logarithmischen Formeln sind als Gebrauchs-Formeln bei dem Zahlen-Beispiel S. 398 angegeben.

Dieses Beispiel, dessen Bezeichnungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi$ u. s. w. ebenso wie die vorstehenden Formeln, der nebenstehenden Fig. 2. entsprechen, ist unser kleines Normal-Beispiel (1) § 77. S. 386.

Zu der Rechnung S. 398, welche mit unseren sonst üblichen Zeichen und Abkürzungen geführt ist, möge nur noch bemerkt werden, dass dieselbe ursprünglich von uns mit 10stelligen Logarithmen geführt und nachher auf 8 Stellen in den logarithmischen Hauptgliedern, und auch sonst entsprechend abgekürzt wurde, so dass vielleicht an einzelnen Stellen der formelle Übelstand kleiner Inkonsistenzen in den letzten Stellen entsteht, der sich aber in solchen Fällen nicht wohl vermeiden lässt.

Fig. 2.



Geodätische Hauptaufgabe mit sphäroidischen Mittelbreiten-Formeln.

Gegeben $\varphi_1 = 49^\circ 30'$ $\varphi_2 = 50^\circ 30'$ $l = 1^\circ 0'$
 $\varphi = 50^\circ 0' 0''$ $b = 1^\circ = 3600''$ $l = 1^\circ = 3600''$.

Gesucht sind s , α_1 und α_2 .

Die Hilfstafeln des Anhangs geben mit $\varphi = 50^\circ 0'$:

Seite [15]: $\log [1] = 8.510\ 1335.3$ $\log [2] = 8.508\ 9295.0$
 Seite [39]: $\log [3] = 4.6287$ $\log [4] = 4.6119$
 $\log [5] = 5.4257$ $\log [6] = 2.151$
 $\log [7] = 4.9310$ $\log [8] = 5.1066$

$$\log s \sin \alpha = \log \frac{l \cos \varphi}{[2]} - [3] l^2 \sin^2 \varphi + [4] b^2$$

$$\log s \cos \alpha = \log \frac{A \varphi}{[1]} - [5] l^2 \cos^2 \varphi - [6] b^2$$

$$\log A \alpha = \log l \sin \varphi + [7] l^2 \cos^2 \varphi + [8] b^2$$

Länge.		Breite.		Azimut.	
$\log l$	3.556 3025.0	$\log b$	3.556 3025.0	$\log l$	3.556 3025.0
$\log \cos \varphi$	9.808 0675.0	$\log [1]$	8.510 1335.3	$\log \sin \varphi$	9.884 2539.7
$\log l \cos \varphi$	3.364 3700.0	$\log b$	5.046 1689.7	$\log l \sin \varphi$	3.440 5564.7
$\log [2]$	8.508 9295.0				
$\log \frac{l \cos \varphi}{[2]}$	4.855 4405.0				
$\log l^2 \cos^2 \varphi$	6.7287	$\log b^2$	7.1126	$\log l^2 \sin^2 \varphi$	6.8811
$l^2 \sin^2 \varphi$	6.8811	b^2	7.1126	$l^2 \cos^2 \varphi$	6.7287
$- [3]$	4.6287 _n	$[4]$	4.6119	$[7]$	4.9310
	1.5098 _n		1.7245	$[8]$	5.1066
					2.2192
$- 32.35$	$+ 53.02$	$- 142.72$	$- 0.18$	$+ 45.68$	$+ 165.67$
	$+ 20.67$		$- 142.90$		$+ 211.35$
	4.855 4405.0		5.046 1689.7		3.440 5564.7
$s \sin \alpha$	4.855 4425.7	$s \cos \alpha$	5.046 1546.8		3.440 5776.0
$s \cos \alpha$	5.046 1546.8				
$\tan \alpha$	9.809 2878.9				
$\alpha = 32^\circ 48' 20.458''$		$s \sin \alpha$	4.855 4425.7	$s \cos \alpha$	5.046 1546.8
$\frac{A \alpha}{2} = 0^\circ 22' 58.947''$		$\sin \alpha$	9.733 8322.5	$\cos \alpha$	9.924 5443.7
		$\log s$	5.121 6103.2	$\log s$	5.121 6103.1
$\alpha_2 = 33^\circ 11' 19.405''$					
$\alpha_1 = 32^\circ 25' 21.511''$		$s = 132\ 315.38^m$			
				$\Delta \alpha = 2757.8942''$	
				$\Delta \alpha = 0^\circ 45' 57.8942''$	
				$\Delta \alpha = 0^\circ 22' 58.9471''$	
				$\frac{\Delta \alpha}{2}$	

Indirekte Anwendung der Mittelbreiten-Formeln.

Wenn φ_1 , α_1 und s gegeben und φ_2 , α_2 und l gesucht sind, so kann man die Mittelbreiten-Formeln nicht unmittelbar anwenden, wohl aber mittelbar durch Einführung von Näherungs-Werten, wie wir schon bei den entsprechenden *sphärischen* Formeln von § 57. S. 307—309 genügend gezeigt haben.

Wir wollen wenigstens die Hauptglieder für solche mittelbare Berechnung des Beispiels von S. 398 hier vorführen:

$$\text{Gegeben } \varphi_1 = 49^\circ 30' 0'' \quad \alpha_1 = 32^\circ 25' 21,511'' \quad s = 132\,315,375^m.$$

Wir wollen annehmen, man habe durch Versuche nach Anleitung von S. 308—309 gefunden $b = 1^\circ 0' 0''$ und $A\alpha = 0^\circ 45' 57,894''$, und man wolle die Probe machen, ob diese Werte keiner abermaligen Verbesserung mehr bedürfen; hiezu hat man folgende Rechnung:

Länge		Breite		Azimut	
		$\varphi_1 = 49^\circ 30' 0''$		$\alpha_1 = 32^\circ 25' 21,511''$	
		$A\varphi = 1^\circ 0' 0''$		$A\alpha = 0\ 45\ 57,894$	
$s = 132\,315,375^m$		$\varphi_2 = 50^\circ 30' 0''$		$\alpha_2 = 33^\circ 11' 19,405''$	
		$\varphi = 50^\circ 0' 0''$		$\alpha = 32^\circ 48' 20,458''$	
$\log s$	5.121 6103.1	$\log s$	5.121 6103.1	$\log l$	3.556 3025.0
$\log \sin \alpha$	9.733 8322.5	$\log \cos \alpha$	9.924 5443.7	$\log \sin \varphi$	9.884 2539.7
$\log \sec \varphi$	0.191 9325.0	$\log [1]$	8.510 1335.3	$\log l \sin \varphi$	3.440 5564.7
$\log [2]$	8.508 9295.0	$\log (b)$	3.556 2882.1		
$\log (l)$	3.556 3045.6				

Die Berechnung der Korrektions-Glieder ist dieselbe wie auf S. 398, und die Probe besteht darin, dass nach den Formeln (32) und (33) S. 397 die Schlusswerte $A\varphi$ und $A\alpha$ wieder unten ebenso herauskommen müssen, wie sie oben eingesetzt wurden.

Man muss dabei sich eines vorgedruckten logarithmischen Rechenschemas bedienen, in welchem die ersten Näherungen und die allmählich entstehenden Verbesserungen zuerst mit Blei, und *nicht* in der Aufeinanderfolge der Formeln eingesetzt werden, bis die Rechnung stille steht, d. h. in sich selbst stimmt, worauf man das Ganze endgültig mit Tinte schreibt oder in ein neues Blatt überträgt. Die Zwischen-Ergebnisse brauchen nicht aufbewahrt zu werden.

Näherungs-Formeln für die Meridian-Konvergenz.

Wenn man in der Formel (23) S. 396 die Glieder mit η^4 vernachlässigt, so bekommt man zunächst:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = A\alpha = l \sin \varphi \left(1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{12} V^2 + \frac{b^2}{24 V^4} (3 + 8 \eta^2) \right) \quad (37)$$

Dabei ist $V^2 = 1 + \eta^2$, und wenn man η^4 vernachlässigt, so kann man $\frac{1}{V^4} = 1 - 2\eta^2$ setzen, wodurch im letzten Gliede von (37) sich ergibt:

$$(1 - 2\eta^2) (3 + 8\eta^2) = 3 + 2\eta^2 = 3 \left(1 + \frac{2}{3} \eta^2 \right) = 3 V^{\frac{2}{3}}$$



und damit kann man (37) so schreiben:

$$\Delta \alpha = l \sin \varphi \left(1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{12} V^2 + \frac{b^2}{8} V^4 \right) \quad (38)$$

Diese Formel unterscheidet sich von der sphärischen Formel (15) S. 306 nur durch die beigegebenen Faktoren V^2 und V^4 , welche keine besondere Mühe verursachen, wenn wir die zu vielen anderen Zwecken ohnehin nötige Funktion $\log V$ als stets tabellarisch verfügbar betrachten. Jedoch die beiden anderen Formeln (34) und (35) S. 397 lassen sich nicht ähnlich behandeln.

Die Gleichung (37) lässt sich auch noch in eine andere Form bringen, welche als *Dalbyscher Satz* bekannt ist. Wenn man nämlich die Meridian-Konvergenz nicht auf die geodätische Linie, sondern auf die beiden Normalschnitte bezieht, so fallen alle Glieder mit η^2 und V^2 fort. Um dieses zu zeigen, brauchen wir die Formel (35) § 75. S. 380, welche mit den Bezeichnungen von Fig. 1. § 75. S. 377 so lautet:

$$\beta_1 - \alpha_1 = \beta - \alpha - \eta^2 \frac{\sigma^3}{12} \sin \alpha t \quad (39)$$

Dabei bezieht sich $\beta_1 - \alpha_1$ auf die Normalschnitte und $\beta - \alpha$ auf die geodätische Linie, d. h. es ist $\beta - \alpha$ der Wert $\Delta \alpha$ von (37).

Indem wir nun in (39) schreiben:

$$\sigma \sin \alpha t = l \sin \varphi \quad \text{und} \quad \sigma^2 = l^2 \cos^2 \varphi + \frac{b^2}{V^4}$$

können wir aus (37) und (39) zusammen bilden:

$$\begin{aligned} \beta_1 - \alpha_1 = l \sin \varphi \left(1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{12} V^2 + \frac{b^2}{24 V^4} (3 + 8 \eta^2) \right) \\ + l \sin \varphi \left(- \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{12} \eta^2 - \frac{b^2}{12 V^4} \eta^2 \right) \end{aligned}$$

Da $V^2 = 1 + \eta^2$ ist, giebt dieses:

$$\beta_1 - \alpha_1 = l \sin \varphi \left(1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{12} + \frac{b^2}{8} \right) \quad (40)$$

Dieses stimmt vollständig überein mit der sphärischen Formel (15) S. 306, und der in der Formel (40) enthaltene *Dalbysche Satz* sagt also:

Die Meridian-Konvergenz $\beta_1 - \alpha_1$ bezogen auf die beiden Gegen-Normalschnitte (Fig. 1. § 75. S. 377) wird bis auf Glieder von der Ordnung $\eta^2 \sigma^3$ einschliesslich ($\eta^4 \sigma^3$ ausschliesslich), erhalten durch *sphärische* Berechnung mit den Breiten φ_1 und φ_2 zweier Punkte des Erd-Ellipsoids und dem Längen-Unterschiede l derselben.

(Weiteres über *Dalbys Satz* giebt *Helmert*, „Höhere Geodäsie I“ S. 150.)

Näherungs-Formeln mit der verkürzten Breiten-Differenz.

Nachdem wir schon in § 63. S. 327—329 durch einfache geometrische Betrachtung gefunden hatten, dass man sphärische Formeln in sphäroidische Formeln näherungsweise umformen kann, lediglich durch konsequente Einsetzung der verkürzten Breiten-Differenz $\frac{\Delta \varphi}{V^2}$ an Stelle der wirklichen Breiten-Differenz $\Delta \varphi$, können wir nun die auf S. 329 noch offen gelassene Frage, wie weit die so erhaltenen Näherungsformeln brauchbar sind, beantworten:

Die Formeln (11)–(17) S. 327 (in welchen man auch $\frac{N}{M} = V^2$ setzen kann) geben erste Annäherungen an die Formeln für die geodätische Linie; und es sind dabei Glieder bis zur Ordnung $\eta^2 \sigma^2$ berücksichtigt, dagegen $\eta^2 \sigma^3$ und sogar σ^3 selbst vernachlässigt; indessen kann man diese letzteren Glieder von der Ordnung σ^3 leicht nach Anleitung von S. 329 zusetzen.

Die einfache geometrische Betrachtung des verkürzten Breiten-Unterschiedes, § 63. S. 325–329, hat also zu Formeln geführt, welche im Lichte der weitergeführten Theorie als genau bis $\eta^2 \sigma^2$ und σ^3 einschliesslich ($\eta^2 \sigma^3$ ausschliesslich) sich erweisen. Da nun z. B. mit $s = 25\,000^m$, also $\sigma = \frac{25}{6370}$ bei 45° Breite, ein Glied $\eta^2 \sigma^3$ nur $0,00004''$ ausmacht, so kann man sagen, dass die theoretisch einfachen Formeln von § 63. in Verbindung mit den sphärischen Formeln von § 57. zur Lösung der geodätischen Aufgaben für Dreiecke III. und IV. Ordnung ausreichen. Es ist aber dabei wesentlich, dass die verkürzte Breiten-Differenz, welche nach der Entstehung aus Fig. 1. S. 326 kein scharfer Begriff für endliche Differenzen ist, stets auf die Mittelbreite bezogen werde.

Die Entwicklung sphäroidischer Mittelbreiten-Formeln zur Auflösung der geodätischen Hauptaufgabe und ihrer Umkehrung bildet den Inhalt der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“ von Gauss, zweite Abhandlung, Göttingen 1846. Gauss hat hier den ungemein nützlichen Grundsatz des Mittel-Arguments bei Reihen-Entwicklungen auf Geodäsie mit schönsten Erfolge angewendet, und eine zweifach unabhängige Begründung gegeben, erstens durch das Prinzip der konformen Flächen-Abbildung und zweitens durch unmittelbare Reihen-Entwicklung nach Potenzen der geodätischen Linie.

Die von Gauss beigegebene Coefficienten-Tabelle erstreckt sich nur von 51° – 54° Breite. Eine Ausdehnung dieser Tabelle auf 45° – 55° gaben wir in den früheren Auflagen dieses Buches, und eine Tafel der Gaussischen Coefficienten-Logarithmen $\log(1)$, $\log(2)$, ..., $\log(6)$ in der ganzen Ausdehnung von $\varphi = 34^\circ$ bis $\varphi = 70^\circ$ wurde berechnet von Bick, und veröffentlicht in der russischen Übersetzung von Jordan, „Handbuch der Vermessungskunde“ S. 652–665 (vgl. das genauere Citat S. 231).

Ebenfalls auf das Prinzip der Mittelbreite, jedoch mit Azimuten der vertikalen Schnitte (nicht der geodätischen Linie) sind gegründet die Entwicklungen und Formeln von Schols („Extraits des Archives Néerlandaises“, T. XVII, Delft, 1882), von welchen ein Auszug von Fener gebracht wurde in der „Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 555–568 und S. 589–597, mit Anmerkung von Helmert S. 597–598.

Hieran schloss sich auch eine kleine Mitteilung unsererseits, „Zeitschr. f. Verm. 1883“, S. 127–128, enthaltend die vorstehende Formel (38) und betreffend § 58. S. 311–312.

Wir überzeugten uns dabei, dass die Gaussische Form der Korrekptions-Glieder mit drei Elementen β , μ und τ (Meridian-Konvergenz) dabei ohne λ , in mancher Beziehung nicht günstig ist.

Inzwischen hat das geodätische Institut ein von gleichem Gedanken ausgehendes System von Mittelbreiten-Formeln als Umformung der Gaussischen Formeln, mit Coefficienten-Tabellen mitgeteilt in der „Veröffentlichung des geod. Instituts, Lotabweichungen, Heft 1, Formeln und Tafeln u. s. w. Berlin 1886.“ Anhang S. 1–26. Diese Formeln unterscheiden sich von den unsrigen (34), (35), (36) S. 397 nur dadurch, dass in den Hauptgliedern für die Meridian-Konvergenz und für $s \cos \alpha$, bzw. die Faktoren $\sec \frac{b}{2}$ und $\cos \frac{l}{2}$ auftreten, welche in unseren Formeln (36) und (35) in die Korrekptions-Glieder gezogen sind. Im übrigen sind folgende Coefficienten einander entsprechend:

J.	[3]	[4]	[6]	[7]
G. Inst.	[4]	[7]	— [8]	[3]

In den Bezeichnungen findet folgende Vergleichung statt:

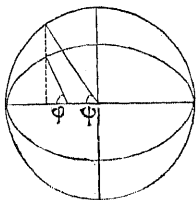
$$\begin{array}{ccccccc}
 J. & \varphi & e'^2 & e'^2 \cos^2 \varphi = \eta^2 & 1 + \eta^2 = V^2 & & \\
 G. Inst. & B & \frac{e^2}{1 - e^2} & \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 B & \frac{1 - e^2 \sin^2 B}{1 - e^2} = \frac{W^2}{1 - e^2} & &
 \end{array}$$

Wenn man alles auf einerlei Elemente bringt (am besten überall η^2 und V^2), so kann man sich überzeugen, dass unsere Formeln (34), (35), (36) und die zitierten Formeln des geodätischen Instituts, mit den Gaussischen Formeln von Art. 33. der Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, zweite Abhandlung, identisch sind.

§ 80. Die reduzierte Breite.

In vielen mathematisch-geodätischen Entwicklungen wird man auf einen Hilfs-
winkel geführt, der „reduzierte Breite“ heisst, und den wir im folgenden allgemein
mit ψ bezeichnen wollen, während die geographische Breite wie
immer mit φ bezeichnet werden soll.

Fig. 1.



Man kann schon die gewöhnliche Ellipsen-Gleichung zur
Einführung von ψ benützen, denn wenn (nach (1) § 33. S. 208)
die Gleichung besteht:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

so kann man unbedingt setzen:

$$\frac{x}{a} = \cos \psi, \quad \frac{y}{b} = \sin \psi \quad (2)$$

Dabei ist nach (11) S. 209:

$$\frac{x}{a} = \frac{\cos \varphi}{W}, \quad \frac{y}{b} = \frac{\sin \varphi}{a \sqrt{1-e^2}} = \frac{\sin \varphi}{W} \sqrt{1-e^2} \quad (3)$$

also:
$$\cos \psi = \frac{\cos \varphi}{W}, \quad \sin \psi = \frac{\sin \varphi}{W} \sqrt{1-e^2} \quad (4)$$

wobei gesetzt ist:

$$W = \sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi} \quad (5)$$

Die geometrische Bedeutung des so eingeführten Winkels ψ ist durch Fig. 1.
veranschaulicht, man wird auf die Hilfsbreite ψ auch geführt durch eine bekannte
Ellipsen-Konstruktion, bei welcher zwei konzentrische Kreise mit den Halbmessern a
und b benützt werden.

Eine mehr zwingende Veranlassung zur Einführung der reduzierten Breite haben
wir in dem Satze von der geodätischen Linie, den wir in (11) § 73. S. 372 gefunden
haben, nämlich:

$$p \sin \alpha = k \quad (6)$$

wo p der Parallelkreis-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids ist, d. h. derselbe Wert,
der in (1) und (2) mit x bezeichnet wurde, man hat also:

$$p = x = \frac{a \cos \varphi}{W} = a \cos \psi, \text{ d. h. } \cos \psi = \frac{\cos \varphi}{W} \quad (7)$$

Der dadurch bestimmte Wert ψ ist derselbe, den wir schon in (4) kennen ge-
lernt, und *reduzierte Breite* genannt haben. Damit giebt die Gleichung (6):

$$a \cos \psi \sin \alpha = a \cos \psi' \sin \alpha' = k \quad (8)$$

Die letzte Gleichung ist eine Anwendung des Satzes (6) auf zwei zusammen-
gehörige Wertpaare ψ, α und ψ', α' ; und indem man dabei den konstanten Faktor a
und das allgemeine Zeichen k fortlässt, hat man aus (6) oder (8):

$$\cos \psi \sin \alpha = \cos \psi' \sin \alpha' \quad (9)$$

Dieser Gleichung (9) entspricht ein *sphärisches* Dreieck, das wir in Fig. 2. des
nächsten § 81. näher betrachten wollen; und damit erlangt die reduzierte Breite ψ ,
welche nun als Repräsentant des sphäroidischen Parallelkreis-Halbmessers ($p = x$ in
Gleichung (7)) erscheint, erhöhte Bedeutung.

Dieser Herleitung des Begriffes der reduzierten Breite ψ entsprechend, wollen
wir dieselbe definieren durch die Gleichung (7), d. h. ausführlicher:

$$\cos \varphi = \frac{\cos \psi}{W} \quad (\text{wo } W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}) \quad (10)$$

oder auch mit Einführung von V :

$$\cos \psi = \frac{\cos \varphi}{V \sqrt{1 - e^2}} \quad (\text{wo } V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}) \quad (11)$$

Daraus findet man durch geometrische Umformung:

$$\sin \psi = \frac{1}{V} \sin \varphi \quad (12)$$

$$\tan \psi = \tan \varphi \sqrt{1 - e^2}, \quad \text{oder } \tan \varphi = \tan \psi \sqrt{1 + e'^2} \quad (13)$$

Wir brauchen auch noch die Differentialbeziehung zwischen φ und ψ , welche sich am einfachsten aus (13) ergibt, nämlich:

$$\frac{d\psi}{\cos^2 \psi} = \frac{d\varphi \sqrt{1 - e^2}}{\cos^2 \varphi}$$

$$\text{also wegen (11):} \quad \frac{d\varphi}{d\psi} = V^2 \sqrt{1 - e^2} \quad (14)$$

Aus (11) findet man auch:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}} \quad (15)$$

Die geometrische Bedeutung von V^2 ist, nach (18) S. 210, das Haupt-Krümmungsverhältnis, d. h. das Verhältnis der beiden Haupt-Krümmungshalbmesser N und M in einem Punkte des Ellipsoids mit der Breite φ ; und die Formel (15), welche nun V^2 bzw. V auch als Funktion von ψ giebt, ist für spätere Anwendung wichtig.

Numerische Berechnung von $\varphi - \psi$.

Um zu gegebenem φ das zugehörige ψ zu berechnen oder umgekehrt, kann man zuerst die Gleichung (13) anwenden:

$$\tan \psi = \tan \varphi \sqrt{1 - e^2} \quad (\log \sqrt{1 - e^2} = 9.998\,5458\,202) \quad (16)$$

Wenn man aber besondere Zahlenschärfe wünscht, so wird es besser sein, auf die Differenz $\varphi - \psi$ geradezu auszugehen, und hiezu hat man nach (12) und (11):

$$\sin \varphi = V \sin \psi \quad \sin \psi = \frac{\sin \varphi}{V} \quad (17)$$

$$\cos \varphi = V \sqrt{1 - e^2} \cos \psi \quad \cos \psi = \frac{\cos \varphi}{V \sqrt{1 - e^2}} \quad (18)$$

Nun ist $\sin(\varphi - \psi) = \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi$; dieses kann man in zweifacher Weise auf (17) und (18) anwenden, wodurch man findet:

$$\sin(\varphi - \psi) = \sin 2\varphi \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{2 \sqrt{1 - e^2}} \quad (19)$$

$$\text{oder:} \quad \sin(\varphi - \psi) = \sin 2\psi \frac{V}{2} (1 - \sqrt{1 - e^2}) \quad (20)$$

Hiebei ist V je nach der einen oder anderen Form von (15) zu benützen.

Zur Anwendung von (19) und (20) hat man von § 32. S. 207:

$$\log(1 - \sqrt{1 - e^2}) = \log \alpha = 7.524\,1069\,093 \quad (21)$$

Indem man noch zum Übergang von $\log \sin (\varphi - \psi)$ auf $\log (\varphi - \psi)$ die Formel (28) mit (28a) S. 199 benützt, bekommt man aus (19) und (21):

$$\log (\varphi - \psi) = \log \frac{\sin 2 \varphi}{V} + 2.538\,9562\cdot266 + [5.23078] (\varphi - \psi)^2 \quad (22)$$

wobei [5.23078] der Coëfficienten-Logarithmus ist.

Hiernach kann man mit der äussersten Schärfe rechnen, z. B.:

$$\text{Gegeben Berlin } \varphi = 52^\circ 30' 16,7''$$

Damit giebt die Hilfstafel auf Seite [47] des Anhangs $\log V = 0.000\,5399\cdot278$, und wenn man im übrigen nach der vorstehenden Formel (22) rechnet, so erhält man als Summe der zwei ersten Glieder:

	2.523 3412·273
hiez u das letzte Glied von (22):	+ 1·894
	<hr/> 2.523 3414·167
$\varphi - \psi = 5' 33,68864''$	$\varphi - \psi = 333,68864$
$\varphi = 52^\circ 30' 16,70000''$	
$\psi = 52^\circ 24' 43,011\,36''$	(23)

Mit so vielen Dezimalen wird man natürlich im allgemeinen nicht rechnen, wir haben aber diese scharfe Rechnung hier geführt, um sie zugleich als Kontrolle für das nachfolgende Näherungs-Verfahren zu benützen.

Die beste Form zur numerischen Berechnung von $\varphi - \psi$ aus gegebenen φ oder ψ erhält man durch eine Reihen-Entwicklung nach dem Grundsatz des Mittelarguments (§ 30. S. 201—202). Nach (13) ist:

$$\tan g \psi = \sqrt{1 - e^2} \tan g \varphi = \left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8}\right) \tan g \varphi$$

$$\text{andererseits } \tan g \varphi - \tan g \psi = \frac{\varphi - \psi}{\cos^2 \mu} + (\varphi - \psi)^3 \dots$$

$$\text{dabei ist gesetzt } \frac{\varphi + \psi}{2} = \mu,$$

$$\text{damit wird: } \varphi - \psi = \left(\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8}\right) \cos^2 \mu \tan g \varphi, \quad \varphi = \mu + \frac{e^2}{4} \sin \mu \cos \mu,$$

$$\text{woraus weiter: } \varphi - \psi = \left(\frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8}\right) \sin (\varphi + \psi)$$

Dieses kann man noch um einen Grad weiter treiben, wodurch man erhält (mit Zusetzung von e''):

$$\varphi - \psi = \left(\frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \frac{5}{64} e^6\right) e'' \sin (\varphi + \psi) + \frac{1}{384} e^6 e'' \sin^3 (\varphi + \psi) \quad (24)$$

Mit Bessels Excentricität giebt dieses ausgerechnet:

$$\varphi - \psi = 345,325\,3808 \sin (\varphi + \psi) + 0,000\,160 \sin^3 (\varphi + \psi) \quad (25)$$

($\log = 2.538\,2235\cdot0$) ($\log = 6.2033$)

Da das zweite Glied höchstens $0,00016''$ ausmachen kann, ist es für gewöhnlich zu vernachlässigen; wenn φ in der Nähe von 45° ist, fällt dieses Glied überhaupt fort.

Um die Formel (25) bequem anzuwenden, muss man einen Näherungswert von

$\varphi - \psi$ vorher haben; und ein solcher wird durch unsere Hilfstafel Seite [40] des Anhangs geliefert; die Anwendung mag ein Beispiel zeigen:

Gegeben Berlin $\varphi = 52^\circ 30' 16,7''$
 Hierzu nach Seite [40]: $\varphi - \psi = 5' 33,65''$ genähert

$$\begin{array}{r|l} \psi = 52^\circ 24' 43,05'' & \\ \hline \varphi + \psi = 104^\circ 54' 59,75'' & \\ \log \sin (\varphi + \psi) & 9.985\,1126\,8 \\ \log 345,3 \dots & 2.538\,2285\,0 \\ \hline & 2.523\,3411\,8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Hierzu das zweite Glied von (25):} \\ 333,68847'' \\ + 0,00014 \\ \hline 333,68861'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} = 5' 33,68861'' \\ \varphi = 52^\circ 30' 16,70000'' \\ \text{Also: } \psi = 52^\circ 24' 43,01139'' \end{array} \quad (26)$$

Dieses stimmt hinreichend mit dem schärfer berechneten Wert (23).

Die Frage, wie genau man den Näherungswert $\varphi + \psi$ haben muss, um eine gewisse Endgenauigkeit zu erreichen, kann man durch Differentiieren von (25) beantworten; man findet, dass ein Fehler von $1''$ an dem Näherungswert nur einen Fehler von etwa $0,001''$ erzeugt, weshalb eine Genauigkeit von $0,1''$ im Näherungswert (wie sie die Hilfstafel Seite [40] gewährt) zur endgültigen Berechnung genügt.

Für die sphäroidischen Normal-Beispiele, welche wir in (1)–(4) § 77. S. 386 bis 387 zusammengestellt haben, sind die geographischen Breiten φ und die entsprechenden reduzierten Breiten ψ die folgenden:

	$\varphi = 45^\circ 0' 0''$	$\psi = 44^\circ 54' 14,67493''$
	$49^\circ 30' 0''$	$49^\circ 24' 18,83709''$
	$50^\circ 0' 0''$	$49^\circ 54' 19,82230''$
	$50^\circ 30' 0''$	$50^\circ 24' 20,91117''$
	$55^\circ 0' 0''$	$54^\circ 54' 35,31462''$
Tübingen	$\varphi = 48^\circ 31' 12,4000''$	$\psi = 48^\circ 25' 29,6082''$
Hornisgrunde	$48^\circ 36' 21,8966''$	$48^\circ 30' 30,2280''$
Berlin	$\varphi = 52^\circ 30' 16,7''$	$\psi = 52^\circ 24' 43,0014''$
Königsberg	$54^\circ 42' 50,6''$	$54^\circ 37' 24,7564''$

§ 81. Das sphärische Hilfsdreieck mit reduzierten Breiten.

Wir knüpfen an die im vorigen § 80. (9) S. 402 gefundene Gleichung an:

$$\cos \psi \sin \alpha = \cos \psi' \sin \alpha' \quad (1)$$

Dieser Gleichung entspricht die umstehende Fig. 2.

In nachstehender Fig. 1. sind P und P' zwei Punkte auf dem Ellipsoid, s die verbindende geodätische Linie mit den Azimuten α und α' . Die beiden Punkte P und P' haben die geographischen Breiten φ und φ' und den Längen-Unterschied l .

Fig. 1.
Ellipsoid.

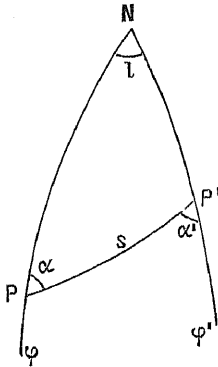
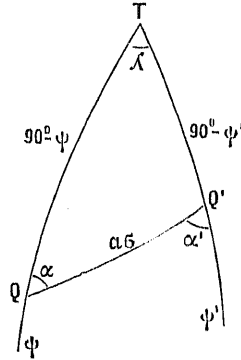


Fig. 2.
Kugel.



In Fig. 2. ist ein entsprechendes *sphärisches* Dreieck $T'Q'Q$ gezeichnet, dessen Bogen $Q'Q$ dieselben Azimute α und α' hat wie die geodätische Linie PP' . Der Bogen $Q'Q$ ist mit $a\sigma$ bezeichnet, indem der Kugelhalbmesser $= a$ (Äquatorhalbmesser des Ellipsoids) und der Centriwinkel $= \sigma$ angenommen ist. Der Längenunterschied zwischen Q und Q' ist $= \lambda$, verschieden von l . Auch die sphärischen Breiten ψ und ψ' sind andere als die ellipsoidischen, es sind die zu φ und φ' gehörigen reduzierten Breiten, d. h. nach (13) § 80. S. 403 bestehen die Beziehungen:

$$\tan \psi = \tan \varphi \sqrt{1 - e^2}, \quad \tan \psi' = \tan \varphi' \sqrt{1 - e^2} \quad (2)$$

Die Richtigkeit all dieser Beziehungen ist durch die sphärische Gleichung (1) bewiesen, und wir wissen nun, dass einem geodätischen Polardreieck $NP'P''$ auf dem Ellipsoid immer ein *sphärisches* Dreieck $T'Q'Q$ entspricht, mit gleichen Azimuten α, α' und mit reduzierten Breiten ψ, ψ' , welche zu φ, φ' gehören. Dagegen sind die übrigen Stücke, die Entfernung beider Punkte und deren Längenunterschied, in beiden Dreiecken verschieden.

Es kommt nun darauf an, eine Beziehung herzustellen zwischen s und σ und eine Beziehung zwischen l und λ , denn da zwischen allen übrigen Stücken von Fig. 1. und Fig. 2. vermöge der Gleichungen (1) und (2) bereits Beziehungen bestehen, werden wir dann in allen Teilen von dem sphäroidischen Dreieck auf das sphärische Dreieck übergehen können und umgekehrt.

Wir haben nach (φ), (λ) S. 373 und (1), (2), (3) S. 302 folgende Differential-Gleichungen, mit den Bezeichnungen unserer vorstehenden Fig. 1. und 2. (geographische Länge auf dem Ellipsoid $= l$, auf der Kugel $= \lambda$):

Ellipsoid

$$ds \cos \alpha = M d\varphi$$

$$ds \sin \alpha = N \cos \varphi dl$$

Kugel

$$a d\sigma \cos \alpha = a d\psi \quad (3)$$

$$a d\sigma \sin \alpha = a \cos \psi d\lambda \quad (4)$$

Hiebei ist nach (11) und (14) § 80. S. 403:

$$\frac{\cos \varphi}{\cos \psi} = V \sqrt{1-e^2} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{d\psi} = V^2 \sqrt{1-e^2} \quad (5)$$

Wenn man auch noch die Bedeutung von M und N nach S. 209–210 berücksichtigt, so erhält man durch zweifache Division von (3) und (4):

$$ds = a d\sigma \frac{1}{V} \quad (6)$$

$$dl = d\lambda \frac{1}{V} \quad (7)$$

Die hier zweimal auftretende Grösse V ist die stets von uns benützte Funktion der Breite, welche entweder in φ oder in ψ ausgedrückt nach (15) § 80. S. 403 ist:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{V} = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} \quad (8)$$

Die geometrische Bedeutung von V haben wir schon in (18) § 33. S. 210 angegeben, es ist nämlich V^2 das Verhältnis der beiden Haupt-Krümmungshalbmesser N und M .

Dieses Verhältnis V^2 ist auch in dem Verhältnis $d\varphi : d\psi$ nach (5) enthalten; und damit erkennt man, dass die reduzierte Breite, geometrisch betrachtet, eine ähnliche Bedeutung hat, wie der „verkürzte Breitenunterschied“, den wir in Fig. 1. S. 326 aus geometrischen Gründen eingeführt haben, und zur Vergleichung wollen wir nun hersetzen:

$$\text{Verkürzter Breiten-Unterschied} \quad d\varphi' = \frac{d\varphi}{V^2} \quad (9)$$

$$\text{Reduzierter Breiten-Unterschied} \quad d\psi = \frac{d\varphi}{V^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \quad (10)$$

das Verhältnis $d\varphi' : d\psi$ ist $= \sqrt{1-e^2}$ d. h. konstant.

Ohne auf die geometrischen Deutungen, welche sich hiebei ergeben, einzugehen, müssen wir nun die beiden Differential-Gleichungen (6) und (7) integrieren, denn dann werden die erkannten Verwandtschaften zwischen dem sphäroidischen Dreieck Fig. 1. und dem sphärischen Dreieck Fig. 2. nutzbar werden.

§ 82. Integration der Differential-Gleichungen zur geodätischen Hauptaufgabe.

Wir haben vom vorigen § 81. (6) und (8) (s. oben) die Differential-Gleichung:

$$ds = a d\sigma \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi'} \quad (1)$$

Diese Gleichung bezieht sich auf die umstehenden Fig. 1. und Fig. 2., indem ds das Differential der geodätischen Linie s in Fig. 1. und $a d\sigma$ das Differential des sphärischen Bogens σ (auf den Halbmesser a bezogen) von Fig. 2. ist; auch ψ' ist sphärische Breite eines Punktes auf dem Bogen σ .

Um die Gleichung (1) nach σ integrieren zu können, muss man ψ' in σ ausdrücken, wozu die Formeln der sphärischen Trigonometrie dienen, welche wir schon früher in (20)–(22) § 55. S. 299 angegeben haben, nämlich mit Übertragung auf unsere neue Fig. 2:

Fig. 1.
Ellipsoid.

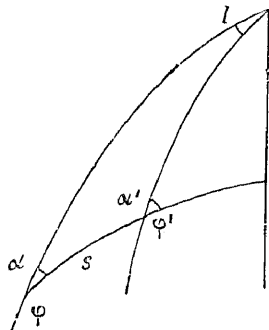
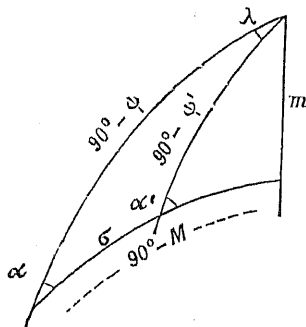


Fig. 2.
Kugel.



$$\sin m = \cos \psi \sin \alpha, \quad \tan M = \frac{\sin \psi}{\cos \psi \cos \alpha} \quad (2)$$

$$\cos m = \frac{\sin \psi}{\sin M} = \frac{\cos \psi \cos \alpha}{\cos M} \quad (3)$$

$$\sin \psi' = \cos m \sin (M + \sigma) \quad (4)$$

Nun setzen wir zur Schreib-Abkürzung im folgenden:

$$M + \sigma = x, \quad \text{wobei } M \text{ konstant, also } d\sigma = dx \quad (5)$$

also: $\sin^2 \psi' = \cos^2 m \sin^2 x$

$$\cos^2 \psi' = 1 - \cos^2 m \sin^2 x \quad (6)$$

Dieses in (1) gesetzt giebt:

$$ds = a \sqrt{1 - e^2 + e^2 \cos^2 m \sin^2 x} d\sigma$$

$$\frac{e^2}{1 - e^2} = e'^2, \quad \text{also } ds = a \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 m \sin^2 x} d\sigma \quad (7)$$

$$a \sqrt{1 - e^2} = b, \quad e' \cos m = k, \quad ds = b \sqrt{1 + k^2 \sin^2 x} dx \quad (8)$$

Nun wird nach den gewöhnlichen Reihen (11) S. 197 und (33) S. 200 entwickelt:

$$\sqrt{1 + k^2 \sin^2 x} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 x - \frac{1}{8} k^4 \sin^4 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x, \quad \sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \quad (9)$$

Dieses zusammen giebt:

$$\sqrt{1 + k^2 \sin^2 x} = \left(1 + \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4\right) + \left(-\frac{1}{4} k^2 + \frac{1}{16} k^4\right) \cos 2x - \frac{k^4}{64} \cos 4x \quad (10)$$

Zur Integration hat man:

$$\int \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad \int \cos 4x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$\int_M^{M+\sigma} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \left(\sin (2M + 2\sigma) - \sin 2M \right) = \sin \sigma \cos (2M + \sigma) \quad (11)$$

$$\int_M^{M+\sigma} \cos 4x dx = \frac{1}{4} \left(\sin (4M + 4\sigma) - \sin 4M \right) = \frac{1}{2} \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) \quad (12)$$

Damit kann man die Integrale von (9), d. h. auch die Integration von (8) zusammensetzen, wodurch man einen Ausdruck von dieser Form erhält:

$$s = A b \sigma - B b \sin \sigma \cos (2 M + \sigma) - C b \sin 2 \sigma \cos (4 M + 2 \sigma) \quad (13)$$

Dabei haben die Coëfficienten A , B und C folgende Bedeutungen:

$$A = \left(1 + \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4\right), \quad B = \left(\frac{1}{4} k^2 - \frac{1}{16} k^4\right), \quad C = \frac{1}{128} k^4$$

Die Umkehrung von (13) giebt:

$$\sigma = \alpha \frac{s}{b} + \beta \sin \sigma \cos (2 M + \sigma) + \gamma \sin 2 \sigma \cos (4 M + 2 \sigma) \quad (15)$$

wobei die neu eingeführten Coëfficienten sind (mit Zusetzung der nötigen ϱ):

$$\alpha = \frac{1}{A} \varrho, \quad \beta = \frac{B}{A} \varrho, \quad \gamma = \frac{C}{A} \varrho \quad (16)$$

In gleicher Weise behandeln wir auch die Differential-Gleichung für den Längenunterschied, nämlich nach (7) und (8) § 81. S. 407:

$$d\lambda = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\lambda \quad (17)$$

Hier wird nach (11) S. 197 entwickelt:

$$\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} = 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 \psi - \frac{e^4}{8} \cos^4 \psi - \frac{e^6}{16} \cos^6 \psi \quad (18)$$

Hiebei bestehen sphärische Gleichungen, nach (1) S. 302:

$$d\lambda \cos \psi = d\sigma \sin \alpha$$

dann nach (2):

$$\sin \alpha = \frac{\sin m}{\cos \psi}, \quad \text{also } d\lambda = \frac{\sin m}{\cos^2 \psi} d\sigma \quad (19)$$

Damit kann man (17) in eine Integration nach σ umformen, nämlich mit Rücksicht auf (18):

$$l = \lambda - e^2 \sin m \int \left(\frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} \cos^2 \psi + \frac{e^4}{16} \cos^4 \psi + \dots \right) d\sigma \quad (20)$$

Nun hat man wieder nach (6):

$$\cos^2 \psi = 1 - \cos^2 m \sin^2 x$$

$$\cos^4 \psi = 1 - 2 \cos^2 m \sin^2 x + \cos^4 m \sin^4 x$$

Ausserdem hat man $\sin^2 x$ und $\sin^4 x$ ausgedrückt in $\cos 2x$ und $\cos 4x$ durch (9), und all dieses zusammen bringt die zu integrierende Funktion (20) auf eine Reihe, welche nach $\cos 2x$, $\cos 4x$, u. s. w. fortschreitet, d. h. (20) wird:

$$l = \lambda - e^2 \sin m \int (A' + B' \cos 2x + C' \cos 4x + \dots) dx \quad (21)$$

Dabei haben die Coëfficienten folgende Bedeutungen:

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{16} - \frac{e^2}{16} \cos^2 m - \frac{e^4}{16} \cos^2 m + \frac{3}{128} e^4 \cos^4 m \\ B' &= \frac{e^2}{16} \cos^2 m + \frac{e^4}{16} \cos^2 m - \frac{e^4}{32} \cos^4 m \\ C' &= \frac{e^4}{128} \cos^4 m \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Denkt man sich diese Coëfficienten in (21) eingesetzt, integriert, und die Grenzen

ebenso wie früher bei (11) und (12) eingeführt, so überblickt man leicht, dass folgendes erhalten wird:

$$l = \lambda - e^2 \sin m \left(A' \sigma + B' \sin \sigma \cos (2M + \sigma) + \frac{C'}{2} \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) + \dots \right) \quad (23)$$

Hier ist noch bei B' und C' der Faktor ϱ zuzusetzen; indem wir dieses thun, und auch e^2 in die Klammer hineinziehen, bilden wir aus (23) diese letzte Form:

$$l = \lambda - \sin m (\alpha' \sigma + \beta' \sin \sigma \cos (2M + \sigma) + \gamma' \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) \quad (24)$$

Dabei ist:

$$\alpha' = A' e^2, \quad \beta' = B' e^2 \varrho, \quad \gamma' = \frac{C' e^2}{2} \varrho \quad (25)$$

Entwicklung auf höhere Potenzen.

Wir haben in der vorstehenden Entwicklung nur so viele Glieder beibehalten, als man bequem überschauen kann, und so viele, als für gewöhnlich nötig sind.

Zu einem sicheren Urteil über den Einfluss der höheren Glieder muss man jedoch dieselben kennen, wozu die Weiter-Entwicklung der vorstehenden Reihen nötig ist. Wir setzen die Schluss-Ergebnisse dieser Weiter-Entwicklung hier her.

Die Reihe (15) bekommt noch ein Glied, und ist dann:

$$\sigma = \alpha \frac{s}{b} + \beta \sin \sigma \cos (2M + \sigma) + \gamma \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) + \delta \sin 3\sigma \cos (6M + 3\sigma) \quad (26)$$

Folgendes sind die hierzu gehörigen Coefficienten:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{A} \varrho, & A &= \left(1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64} k^4 + \frac{5}{256} k^6 - \frac{175}{36384} k^8 \right) \\ \beta &= \frac{B}{A} \varrho, & B &= \left(\frac{k^2}{4} - \frac{k^4}{16} + \frac{15}{512} k^6 - \frac{35}{2048} k^8 \right) \\ \gamma &= \frac{C}{A} \varrho, & C &= \left(\frac{k^4}{128} - \frac{3}{512} k^6 + \frac{35}{8192} k^8 \right) \quad (\text{dabei ist } k = e' \cos m) \\ \delta &= \frac{D}{A} \varrho, & D &= \left(\frac{k^6}{1536} - \frac{5}{6144} k^8 \right) \\ \varepsilon &= \frac{E}{A} \varrho, & E &= \left(\frac{5}{65536} k^8 \right) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Auch die Reihe (24) bekommt ein weiteres Glied und wird:

$$l = \lambda - \sin m (\alpha' \sigma + \beta' \sin \sigma \cos (2M + \sigma) + \gamma' \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) + \delta' \sin 3\sigma \cos (6M + 3\sigma) \quad (28)$$

Folgendes sind die hierzu gehörenden Coefficienten:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \frac{e^2}{2} \left(1 + \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \frac{5}{64} e^6 \right) - \frac{e^4 \cos^2 m}{16} \left(1 + e^2 + \frac{15}{16} e^4 \right) \\ &\quad + \frac{3}{16} e^6 \cos^4 m \left(1 + \frac{15}{8} e^2 \right) - \frac{25}{2048} e^8 \cos^6 m \\ \beta' &= \varrho \left(\frac{e^4}{16} \cos^2 m \left(1 + e^2 + \frac{15}{16} e^4 \right) - \frac{e^6}{32} \cos^4 m \left(1 + \frac{15}{8} e^2 \right) + \frac{75}{4096} e^8 \cos^6 m \right) \\ \gamma' &= \varrho \left(\frac{e^6}{256} \cos^4 m \left(1 + \frac{15}{8} e^2 \right) - \frac{15}{4096} e^8 \cos^6 m \right) \\ \delta' &= \varrho \left(\frac{5}{12288} e^8 \cos^6 m \right) \end{aligned} \right\} \quad (28a)$$

Wenn man hier alle konstanten Teile mit der *Besselschen* Excentricität e ($\log e^2 = 7.824\ 4104\cdot237$ nach S. 207) ausrechnet, so bekommt man:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= 0,008\ 342\ 773\ 183 - [4.447\ 6079] \cos^2 m + [1.84854] \cos^4 m - [9.3843] \cos^6 m \\ \beta' &= [9.762\ 0330] \cos^2 m - [7.28791] \cos^4 m + [4.87477] \cos^6 m \\ \gamma' &= [6.38482] \cos^4 m - [4.17580] \cos^6 m \\ \delta' &= [3.22156] \cos^6 m \end{aligned} \right\} (29)$$

Diese Reihen gehen weit über das gewöhnliche Bedürfnis. Bei geodätischen Linien von mehreren Graden Ausdehnung braucht man von (29) meist nur α' und β' und dabei nur die zwei ersten Glieder von α' und das erste Glied von β' .

Etwas mehr braucht man gewöhnlich bei der Reihe (26) mit den Coëfficienten (27), doch auch meist nur α , β und γ nur etwa bis k^4 .

Dabei ist etwa 8stellige Logarithmen-Rechnung angenommen. Mit den Coëfficienten (27) und (29) kann man auch die grössten Fälle 10stellig berechnen.

Anwendung der vorstehenden Entwicklungen.

Durch die Gleichungen (26) und (28) mit den zugehörigen Coëfficienten α , β , γ , α' , β' , γ' u. s. w. sind die gesuchten Beziehungen zwischen Fig. 1. und Fig. 2. hergestellt, und man kann damit die geodätische Hauptaufgabe lösen in folgender Weise

Von einem Punkte des Ellipsoids mit der geographischen Breite q geht eine geodätische Linie s unter dem Azimut α aus; man soll die Breite q' des Endpunktes dieser geodätischen Linie bestimmen, sowie das Azimut α' daselbst und den Längenunterschied l beider Punkte.

Aus der gegebenen Breite q berechnet man die zugehörige reduzierte Breite ψ nach der Gleichung $\tan \psi = \sqrt{1 - e^2} \tan q$ (oder nach einem andern in § 80. angegebenen Verfahren). Mit diesem ψ und dem Azimut α kann man in dem sphärischen rechtwinkligen Dreieck in Fig. 2. die beiden Hilfsgrössen m und M bestimmen und damit die Gleichung (15) oder (26) nach σ auflösen.

Damit hat man drei Stücke ψ , α , σ , mit welchen das schiefwinklige sphärische Dreieck von Fig. 2. aufgelöst werden kann, so dass die jenseitige sphärische Breite ψ' und der sphärische Längenunterschied λ bekannt werden.

Von der sphärischen (reduzierten) Breite ψ' geht man zurück zu der wirklichen Breite q' durch die Gleichung $\tan q' = \tan \psi' / \sqrt{1 - e^2}$ (oder durch ein anderes in § 80. angegebenes Verfahren), und von der sphärischen Länge λ kommt man zu der sphäroidischen Länge l durch die Gleichung (24) oder (28), womit die Lösung der ganzen Aufgabe vollendet ist.

Zu einem Zahlen-Beispiel hiefür wollen wir nach (4) § 77. S. 387 nehmen:

$$\text{Berlin } q = 52^\circ 30' 16,7000'' \quad (30)$$

$$\text{Berlin-Königsberg } \alpha = 59^\circ 33' 0,6892'' \quad \log s = 5.724\ 2591\cdot353 \quad (31)$$

Die Berechnung der reduzierten Breite von Berlin haben wir bereits in (26) § 80. S. 405 behandelt und gefunden:

$$\text{Berlin } \psi = 52^\circ 24' 43,0114'' \quad (32)$$

Nun kommt die Berechnung von m und M nach den Gleichungen (2) und (3):

$$m = 31^\circ 43' 31,13'' \quad M = 68^\circ 41' 19,95'' \quad (33)$$

Weiter brauchen wir die Coëfficienten zur Berechnung von σ , und zwar zuerst $k' = e' \cos m$ nach (8), es ist:

$$\log e' \cos m = \log k' = 8.843\,3740$$

und damit nach (14) und (16) hinreichend genau, ohne die Weiter-Entwicklung (27):

$$\log A = 0.000\,5270-0 \quad \log B = 7.084\,1599-2 \quad \log C = 3.266\,286$$

$$\log \alpha = 5.813\,8981-0 \quad \log \beta = 2.398\,0580-5 \quad \log \gamma = 8.580\,184$$

Mit diesen Coëfficienten α , β , γ kann man die Gleichung (15) nach σ auflösen, allerdings nicht geradezu, weil σ selbst rechts vorkommt; allein die Reihe (15) ist sehr rasch konvergierend, so dass es genügt, einen ersten Näherungswert von σ nur aus dem *ersten* Gliede von (15) zu berechnen, d. h. $\sigma = \frac{\alpha s}{b}$ zu setzen, womit man auch die folgenden Glieder ausrechnen kann; oder kurz, man löst die Gleichung (15) durch Näherung indirekt, stufenweise nach σ auf. Dieses Verfahren gab in unserem Falle:

$$\text{erste Näherung } \alpha \frac{s}{b} = \sigma = 4^{\circ} 46' 17,8''$$

$$\text{hiez u } \beta \sin \sigma \cos (2M + \sigma) = - \quad 16,4''$$

$$\text{zweite Näherung } \sigma = 4^{\circ} 46' 1,4''$$

Dannit kann man das zweite und dritte Glied von (15) ausrechnen, und hat dann im ganzen:

$$\alpha \frac{s}{b} = 4^{\circ} 46' 17,8176''$$

$$\beta \sin \sigma \cos (2M + \sigma) = - \quad 16,4086''$$

$$\gamma \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) = + \quad 0,0015''$$

$$\text{endgültig } \sigma = 4^{\circ} 46' 1,4105'' \quad (34)$$

Nun stellen wir von (32), (31), (34) zusammen:

$$\psi = 52^{\circ} 24' 43,0114'' \quad \alpha = 59^{\circ} 33' 0,6892'' \quad \sigma = 4^{\circ} 46' 1,4105'' \quad (34a)$$

Dannit kann man das sphärische Dreieck auflösen, welches ψ' , α' und λ liefert; die Rechnung nach den Formeln (14) und (15) §. 55. S. 297 (in gleicher Weise wie das Zahlen-Beispiel auf S. 298 oben) hat ergeben:

$$\psi' = 54^{\circ} 37' 24,7566'' \quad \alpha' = 65^{\circ} 16' 9,3655'' \quad (35)$$

$$\lambda = 7^{\circ} 6' 30,1340'' \quad (36)$$

Der so gefundene sphärische Wert ψ' ist die reduzierte Breite von Königsberg, woraus man nach § 80. die wirkliche Breite berechnet, nämlich:

$$\varphi' = 54^{\circ} 42' 50,6002'' \quad (37)$$

Nun haben wir noch die Aufgabe, den sphärischen Längenunterschied λ von (36) in den sphäroidischen Längenunterschied l zu verwandeln, wozu die Gleichung (28) mit den Coëfficienten (29) dient. Wir berechnen nach (29), jedoch nur mit den Gliedern bis $\cos^4 m$:

$$\log \alpha' = 7.523\,8439 \quad \log \beta' = 9.62045 \quad \log \gamma' = 6.098$$

Demnach (24):

$$l = \lambda - 30,1479'' + 0,0144'' + 0,0000 \dots = \lambda - 30,1335''$$

also nach (32):

$$l = 7^{\circ} 6' 30,1340'' - 30,1335'' = 7^{\circ} 6' 0,0005'' \quad (38)$$

Nun haben wir in (37), (35), (38) die ganze Auflösung:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Königsberg } \varphi' = 54^{\circ} 42' 50,6002'' \\ \text{Königsberg-Berlin } \alpha' = 65^{\circ} 16' 9,3655'' \quad , \quad l = 7^{\circ} 6' 0,0005'' \end{array} \right\} \quad (39)$$

Mit den *erweiterten Formeln* (26) — (29) wollen wir auch noch das grosse Normal-Beispiel (2) § 77. S. 386 berechnen, wofür die Hauptzahlen folgende sind:

$$\text{Gegeben } \varphi = 45^{\circ} 0' 0'' \quad \alpha = 29^{\circ} 3' 15,4598'' \quad (40)$$

$$\log s = 6.120\,6674.805 \quad (41)$$

Die Rechnung beginnt mit der reduzierten Breite:

$$\psi = 44^{\circ} 54' 14,67493'' \quad (42)$$

Das rechtwinklige sphärische Hilfsdreieck giebt:

$$m = 20^{\circ} 7' 8,712'' \quad M = 48^{\circ} 44' 46,551'' \quad (43)$$

Die Coëfficienten zur Berechnung von σ werden nach (27):

$$\log \alpha = 5.313\,7831.066 \quad , \quad \log \beta = 2.483\,7124 \quad , \quad \log \gamma = 8.749\,94 \quad , \quad \log \delta = 5.445$$

und damit σ selbst in 4 Gliedern:

$$\sigma = 42\,782,021652'' - 20,794012'' - 0,017667'' + 0,000\,012''$$

$$\sigma = 11^{\circ} 52' 41,20998'' \quad (44)$$

Mit ψ , α und σ von (42), (40) und (44) wird das sphärische Dreieck aufgelöst; dasselbe giebt:

$$\psi' = 54^{\circ} 54' 35,3145'' \quad \alpha' = 36^{\circ} 45' 7,4006'' \quad (45)$$

$$\lambda = 10^{\circ} 0' 49,11952'' \quad (46)$$

Die reduzierte Breite ψ' wird in die Breite φ' verwandelt, nach § 80., nämlich:

$$\varphi' = 54^{\circ} 59' 59,9999'' \quad (\text{soll } 55^{\circ} 0' 0'') \quad (47)$$

Das Azimut α' nach (45) ist bereits auch sphäroidisches Azimut; wir haben also, um die Auflösung zu vollenden, nur noch λ von (46) in l zu verwandeln, wozu die Gleichung (28) mit den Coëfficienten (29) dient.

Die Coëfficienten-Berechnung nach (29) giebt:

$$\log \alpha' = 7.523\,7864.329 \quad \log \beta' = 9.706\,0623 \quad \log \gamma' = 6.27300$$

und damit wird:

$$l = \lambda - 49,131\,513'' + 0,011\,935'' + 0,000\,020 = -49,119\,558''$$

$$\text{also nach (46): } l = 9^{\circ} 59' 59,99996'' \quad (\text{soll } = 10^{\circ} 0' 0'') \quad (48)$$

In α' , φ' und l von (45), (47) und (48) haben wir die vollständige Auflösung der gestellten Aufgabe in hinreichender Übereinstimmung mit den Angaben von (2) § 77. S. 386:

Umkehrung der vorstehenden Aufgabe.

Wenn nicht φ , α und s gegeben sind, sondern φ , φ' und λ , so dass s , α und α' gesucht werden, so kann man das im vorstehenden behandelte Verfahren auch noch anwenden, aber nur *indirekt* und umständlich, weil die sphärischen Winkel m und M , oder in erster Näherung wenigstens m , bereits zur Reduktion von l auf λ gebraucht werden.

Bei der raschen Konvergenz der Reihen für $\lambda - l$ und für σ ist die indirekte Rechnung mit stufenweiser Einführung von Näherungen (die ja auch schon bei (26) nötig war) jedenfalls möglich, wie in zwei Abhandlungen ausgeführt wird, von *Sadebeck*, „Astr. Nachr. Nr. 2270, 95. Band, 1879“, S. 207—220 mit Hilfstafel S. 209—217, und *Albrecht*, „Astr. Nachr. Nr. 2294, 96. Band, 1880“, S. 209—218.

Indessen haben wir für den Fall, dass φ , φ' und l gegeben, und s , α und α' gesucht sind, die günstigere Auflösung unseres nachfolgenden § 83.

Vergleichung unserer Formeln mit der Besselschen Methode.

Der Grundgedanke der Auflösung eines sphäroidischen Polar-Dreiecks durch ein sphärisches Hilfs-Dreieck mit reduzierten Breiten ist von *Bessel* behandelt in einer Abhandlung „Über die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen“, *Astr. Nachr.* Nr. 86, 4. Band 1826*, S. 241–254, nebst „Tafeln zur Berechnung der geodätischen Vermessungen“.

Diese *Besselsche* Theorie mit den Hilfstafeln bildet auch einen Teil des Werkes „Das Messen auf der sphäroidischen Oberfläche u. s. w. von *J. J. Baeyer*“, Berlin 1862*.

Die *Besselschen* Hilfstafeln sind auch in andere Werke übergegangen, sie sind z. B. unverändert abgedruckt in unserer vorigen Auflage, Karlsruhe 1878, S. 358–364, und in erweiterter Form in *Abbruchs* „Formeln und Hilfstafeln“ (vgl. S. 231), Berlin 1879, S. 204–212.

Um die *Besselsche* Methode nebst ihren Hilfstafeln mit den Formeln unseres vorstehenden § 82. zu vergleichen, bemerken wir zuerst, dass unsere Coefficienten α , β , γ nach (27) dieselben sind, wie die *Besselschen* Coefficienten α , β , γ , deren Logarithmen in der ersten *Besselschen* Hilfstafel enthalten sind; allerdings ist die Form der Berechnung in beiden Fällen verschieden.

Die Coefficienten α' , β' , γ' des zweiten Theils der *Besselschen* Hilfstafel sind mit unseren Coefficienten α' , β' , γ' von (29) nicht unmittelbar identisch, aber sie sind denselben proportional. Es kommt bei *Bessel* ein konstanter Faktor in Rechnung, den wir hier F nennen wollen:

$$F = \frac{e^2}{3\sqrt{1-0,75e^2}} \quad (\log F = 7.825\ 1369\ 0) \quad (49)$$

Indem wir für den nächsten Zweck der Vergleichung die *Besselschen* Coefficienten mit α'_B , β'_B , γ'_B bezeichnen, und mit α' , β' , γ' die Coefficienten unserer Entwicklung nach (29) S. 411, haben wir:

$$F\alpha'_B = \alpha' \quad , \quad F\beta'_B = \beta' \quad , \quad F\gamma'_B = \gamma' \quad (50)$$

Als Argument für die erste *Besselsche* Tafel, $\log \alpha$, $\log \beta$, $\log \gamma$ dient der Logarithmus des Modulus $k = e' \cos m$, welcher nach (8) und (27) auch Argument unserer α , β , γ ist, also erstes Argument $= \log e' \cos m$. Dagegen für den zweiten Teil der *Besselschen* Tafel dient als Argument eine Grösse $\log k'$, wobei k' diese Bedeutung hat:

$$k' = \frac{e\sqrt{0,75}}{\sqrt{1-0,75e^2}} \cos m \quad \left(\log \frac{e\sqrt{0,75}}{\sqrt{1-0,75e^2}} = 8.850\ 8255\ 6 \right) \quad (51)$$

Mit diesen Beziehungen kann man unsere Coefficienten α , β , γ , α' , β' , γ' statt sie nach (27) und (29) zu berechnen, auch aus der *Besselschen* Hilfstafel entnehmen, indem man mit dem Argument $\log e' \cos m$ in den ersten Teil und mit dem Argument $\log k'$ nach (51) in den zweiten Teil von *Bessels* Tafel eingeht, worauf zu den gefundenen $\log \alpha'$ und $\log \beta'$ noch der konstante $\log F$ nach (49) zu addieren ist, um unsere α' , β' zu erhalten.

Wenn für die Coefficienten-Logarithmen des ersten Theiles $\log \alpha$, $\log \beta$, $\log \gamma$ eine Hilfstafel in der *Besselschen* Form mit dem Argument $\log e' \cos m$ sehr nützlich ist, ist zu der zweiten *Besselschen* Tafel für $\log \alpha'$, $\log \beta'$ mit dem Argumente $\log k'$ nach (51) zu beachten, dass hierbei eine Vernachlässigung der Glieder e^4 zu Grunde liegt, weshalb es im Falle etwaiger ausnahmsweise sehr scharfer Rechnung besser ist, die Coefficienten α' , β' γ' nach unseren Formeln (29) bzw. (28a) mit e^3 einschliesslich unmittelbar zu berechnen, als sie aus *Bessels* Tafeln oder Formeln herzuleiten.

Die *Besselsche* zweite Tafel für $\log \alpha'$, $\log \beta'$ hat die eigentümliche Einrichtung mit dem Argument k' nach (51), wobei die Vernachlässigung von e^4 nötig wurde, weil *Bessel* die Absicht hatte, den Gebrauch der Tafeln nicht an einen bestimmten Wert der Excentricität e zu binden. Unsere Hilfs-Coefficienten in (29) beruhen nach (28a) auf Ausrechnung mit dem *Besselschen* e^2 von S. 207: wollte man also ausnahmsweise einen anderen Wert e^2 in die Rechnung einführen, so müsste man auch die Coefficienten-Logarithmen in (29) z. B. [4.4476079], nach (28a) neu berechnen.

§ 83. Neue Auflösung der geodätischen Hauptaufgabe und ihrer Umkehrung. *)

(Bezeichnungen nach Fig. 1. und Fig. 2. § 81. S. 406.)

Wir nehmen die zwei Differential-Grundformeln nach (6), (7), (8) § 81. S. 407 nochmals vor, nämlich:

$$d\sigma = \frac{V}{a} ds \quad (1)$$

$$d\lambda = V dI \quad (2)$$

wobei, wie gewöhnlich, V diese Bedeutung hat:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad (e'^2 \cos^2 \varphi = \eta^2) \quad (3)$$

*) Unter dieser Bezeichnung früher veröffentlicht in der „Zeitschr. f. Verm.“, 1883, S. 65–82.

Wenn die beiden Gleichungen (1) und (2) integriert sind, so sind alle Beziehungen zwischen einem geodätischen Polar-Dreieck und einem sphärischen Polar-Hilfsdreieck (Fig. 1. und Fig. 2. S. 406) bekannt, und man kann dann die geodätische Hauptaufgabe auflösen, wie wir in §. 81. S. 406 auseinandergesetzt haben.

Wir wollen nun die Integration der Grundgleichungen (1) und (2) durch Entwicklung nach dem *Maclaurinschen* Satze bewirken, d. h. zunächst bis zur dritten Potenz, durch Entwicklung der Reihen:

$$\sigma = \frac{d\sigma}{ds} s + \frac{d^2\sigma}{ds^2} \frac{s^2}{2} + \frac{d^3\sigma}{ds^3} \frac{s^3}{6} \quad [4]$$

$$\lambda = \frac{d\lambda}{dl} l + \frac{d^2\lambda}{dl^2} \frac{l^2}{2} + \frac{d^3\lambda}{dl^3} \frac{l^3}{6} \quad (5)$$

Gehen wir zuerst näher auf (4) ein, so haben wir hiefür aus (1), weil a konstant $= c\sqrt{1-e^2}$ ist:

$$\sqrt{1-e^2} \sigma = \frac{1}{c} \left\{ Vs + \frac{dV}{ds} \frac{s^2}{2} + \frac{d^2V}{ds^2} \frac{s^3}{6} \right\} \quad (6)$$

Die hier nötigen Ableitungen machen wir in gleicher Form und Behandlung wie früher in § 78. die Ableitungen für φ , l und α . Auch zitieren wir von dort (5), (6), (7), (13), (14) § 78. S. 387--388:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{V^3}{c} \cos \alpha, \quad \frac{dl}{ds} = \frac{V \sin \alpha}{c \cos \varphi}, \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{V}{c} \sin \alpha t \quad (7)$$

$$\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{V^2}{V^2 t}, \quad \frac{dV}{ds} = -\frac{V^2}{c} \cos \alpha t \quad (8)$$

Weiter wird abgeleitet:

$$\frac{d^2V}{ds^2} = -\frac{V^2}{c^2} \left\{ \cos^2 \alpha (1 - t^2 + \eta^2 - 3\eta^2 t^2) - \sin^2 \alpha t^2 \right\} \quad (9)$$

Nun kann man bereits die Formel (6) zusammensetzen, und man bemerkt, dass dabei s mit V und c immer in derselben Kombination vorkommen, wie auch bei den früheren Reihen (vgl. (22) § 78. S. 389), wir setzen deshalb für analytisches Mass (ohne ϱ):

$$\frac{V}{c} s = S \quad (10)$$

und damit geben (6), (8) und (9):

$$\sigma \sqrt{1-e^2} = S - \frac{S^2}{2} \cos \alpha \eta^2 t - \frac{S^3}{6} \eta^2 \left\{ \cos^2 \alpha (1 - t^2 + \eta^2 - 3\eta^2 t^2) - \sin^2 \alpha t^2 \right\} \quad (11)$$

In gleicher Weise haben wir auch die Längen-Formel zu bilden, nämlich zunächst (2) und (5):

$$\lambda = V l + \frac{dV}{dl} \frac{l^2}{2} + \frac{d^2V}{dl^2} \frac{l^3}{6} \quad (12)$$

Die hiezu nötigen Ableitungen sind:

$$\frac{dV}{dl} = \frac{dV}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dl}, \quad \frac{d\varphi}{dl} = V^2 \cotg \alpha \cos \varphi, \quad \frac{d\alpha}{dl} = \sin \varphi$$

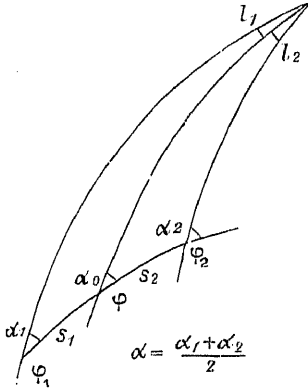
$$\frac{dV}{dl} = -\eta^2 V \cotg \alpha \sin \varphi \quad \text{oder} \quad = -\eta^2 V \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha} \cos \alpha t \quad (13)$$

$$\frac{d^2V}{dl^2} = -\eta^2 V \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \alpha} \left\{ \cos^2 \alpha (1 - 3t^2 + \eta^2 - 3\eta^2 t^2) - \sin^2 \alpha t^2 \right\} \quad (14)$$

Damit kann man (12) zusammensetzen:

$$\lambda = V \left\{ l - \frac{l^2}{2} \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha} \eta^2 \cos \alpha t - \frac{l^3}{6} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \alpha} \eta^2 (\cos^2 \alpha (1 - 3 t^2 + \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) - \sin^2 \alpha t^2) \right\} \quad (15)$$

Fig. 1.



Die Formeln (11) und (15) geben σ und λ als Funktion der Ausgangsbreite φ und des Ausgangsazimutes α der geodätischen Linie; wir wollen nun aber das Prinzip des mittleren Argumentes anwenden, welches bereits in § 79. sehr nützliche Dienste geleistet hat.

Wir nehmen zu diesem Zwecke die Bezeichnungen von nebenstehender Fig. 1. an, d. h. wir nehmen drei Punkte in gleichen Breiten-Abständen:

$$\varphi_2 - \varphi = \varphi - \varphi_1, \quad \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi \quad (16)$$

Von der Mittelbreite φ geht eine geodätische Linie s_2 unter dem Azimut α_0 aus, und eine zweite geodätische Linie s_1 unter dem Azimut $\alpha_0 \pm 180^\circ$. Den geodätischen Linien s_2 und s_1 , deren Summe $s_2 + s_1 = s$ sei, entsprechen zwei Grössen S_2 und S_1 nach (10), mit der Summe $S_2 + S_1 = S$. Damit giebt die doppelte Anwendung der Formel (11):

$$\sigma \sqrt{1 - e^2} = S - \frac{S_2^2 - S_1^2}{2} \cos \alpha_0 \eta^2 t - \frac{S_2^3 + S_1^3}{6} \eta^2 (\cos^2 \alpha_0 (1 - t^2 + \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) - \sin^2 \alpha_0 t^2)$$

Hier ist von (4) § 79. S. 394 zu benützen:

$$S_2 - S_1 = \frac{S^2}{4} t \left(\frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0} + 3 \eta^2 \cos \alpha_0 \right)$$

Wenn man dieses in das vorstehende einsetzt, so darf man auch überall α statt α_0 schreiben, und damit bekommt man:

$$\sigma \sqrt{1 - e^2} = S - \frac{S^3}{24} \eta^2 \left\{ \sin^2 \alpha 2 t^2 + \cos^2 \alpha (1 - t^2 + \eta^2 + 6 \eta^2 t^2) \right\} \quad (17)$$

Nun wenden wir auch die Gleichung (15) in zweifacher Weise auf Fig. 1. an, und erhalten mit $l_2 + l_1 = l$, $\lambda_2 + \lambda_1 = \lambda$:

$$\lambda = V \left\{ l - \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha_0} \eta^2 \cos \alpha_0 t - \frac{l_2^3 + l_1^3}{6} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \alpha_0} \eta^2 (\cos^2 \alpha_0 (1 - 3 t^2 + \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) - \sin^2 \alpha_0 t^2) \right\}$$

Hiezu hat man von (17) § 79. S. 396:

$$(l_2 - l_1) \cos \varphi = \frac{S^2}{4} \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} t + \frac{S^2}{4} \sin \alpha \cos \alpha t (2 + 3 \eta^2)$$

Hier kann man setzen $S \sin \alpha = l \cos \varphi$, also:

$$(l_2 - l_1) = \frac{l^2 \sin \alpha}{4 \cos \alpha} \cos \varphi t + \frac{l^2 \cos \alpha}{4 \sin \alpha} \cos \varphi t (2 + 3 \eta^2)$$

Dieses setzt man in die vorhergehende Formel für λ , wobei auch wieder α_0 und α vertauscht werden können; dadurch erhält man:

$$\lambda = V \left\{ l - \frac{l^3}{24} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \alpha} \eta^2 \left(\sin^2 \alpha \, 2t^2 + \cos^2 \alpha (1 + 3t^2 + \eta^2 + 6\eta^2 t^2) \right) \right\} \quad (18)$$

Die Gleichungen (17) und (18) enthalten bereits die Lösung unserer Aufgabe, wenn man S , α und l wenigstens näherungsweise als gegeben voraussetzt; indessen ist es bequemer, alles auf den Breiten-Unterschied b und den Längen-Unterschied l zu reduzieren. Hiezu hat man für die Korrektionsglieder:

$$S \sin \alpha = l \cos \varphi, \quad S \cos \alpha = l \cos \varphi \cotg \alpha = \frac{b}{V^2}$$

Dieses in (17) und (18) eingesetzt giebt:

$$\sigma = \frac{S}{V \sqrt{1-e^2}} \left\{ 1 - \frac{\eta^2}{24} \left(\frac{b^2}{V^4} (1 - t^2 + \eta^2 + 6\eta^2 t^2) + 2l^2 \sin^2 \varphi \right) \right\} \quad (19)$$

$$\lambda = V l \left\{ 1 - \frac{\eta^2}{24} \left(\frac{b^2}{V^4} (1 + 3t^2 + \eta^2 + 6\eta^2 t^2) + 2l^2 \sin^2 \varphi \right) \right\} \quad (20)$$

Wir wollen die Coefficienten herausheben und folgende Gebrauchsformeln bilden (mit Berücksichtigung der nötigen φ):

$$\sigma = U s \left\{ 1 + (\sigma_1) b^2 + (\sigma_2) l^2 \sin^2 \varphi \right\} \quad (21)$$

$$\lambda = V l \left\{ 1 + (\lambda_1) b^2 + (\lambda_2) l^2 \sin^2 \varphi \right\} \quad (22)$$

Man kann diese Formeln auch in logarithmischer Form anwenden, z. B. wenn $\log \sigma$ gegeben und $\log s$ zu bestimmen ist, hat man durch Umkehrung von (21) in logarithmischer Form:

$$\log s = (\log \sigma - \log U) - \mu (\sigma_1) b^2 - \mu (\sigma_2) l^2 \sin^2 \varphi \quad (23)$$

Dabei ist V die bisher immer mit V bezeichnete Funktion:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad (23)$$

$$\text{und} \quad U = \frac{V}{c \sqrt{1-e^2}} \varrho \quad \text{oder} \quad = \frac{V}{a} \varrho$$

$$\log U = \log V + 8.509\,7816\,695 \quad (24)$$

Den Wert $\log V$ bzw. $\log V^2$ kann man aus der Hilfstafel Seite [2]—[23] unseres Anhangs 8stellig entnehmen. Da man aber bei sehr langen geodätischen Linien wohl in die Lage kommen kann, genauer zu rechnen, haben wir auf Seite [46]—[47] *) des Anhangs noch eine besondere 10stellige Tafel für $\log V$ beigegeben. Daraus wird man immer in genügender Schärfe $\log V$ entnehmen können, und nach (24) hat man dann auch $\log U$.

Für die Coefficienten (σ_1) , (σ_2) , (λ_1) , (λ_2) in (21) und (22) ergeben sich durch Vergleichung mit (19) und (20) folgende Bedeutungen:

*) Die Tafel Seite [46]—[47] des Anhangs ist nach (24) und (24a) S. 211 von 1° zu $1^\circ 13$ stellig berechnet, nach dem Prinzip von (26) S. 212 auf 12 Stellen interpoliert und dann auf 10 Stellen abgerundet. Diese Tafel wurde nicht nur für die Zwecke des gegenwärtigen § 83. berechnet; dieselbe kann auch zu vielen anderen Berechnungen, die besonders genau sein sollen, dienen, denn es sind auch die [1] und [2] u. s. w. nach S. 213 sämtlich einfache Funktionen von V .

$$(\sigma_1) = + \frac{\eta^2}{24 \varrho^2 \sqrt{4}} (t^2 - (1 + \eta^2 + 6 \eta^2 t^2)) \quad , \quad (\sigma_2) = - \frac{\eta^2}{12 \varrho^2} \quad (25)$$

$$(\lambda_1) = - \frac{\eta^2}{24 \varrho^2 \sqrt{4}} (3 t^2 + 1 + \eta^2 + 6 \eta^2 t^2) \quad , \quad (\lambda_2) = - \frac{\eta^2}{12 \varrho^2} \quad (26)$$

Dabei ist:

$$\log \frac{1}{24 \varrho^2} = 7.990 \, 9385 - 20 \quad , \quad \log \frac{1}{12 \varrho^2} = 8.291 \, 9685 - 20$$

Weiter-Entwicklung bis zur fünften Ordnung.

Man kann mit den bisher entwickelten Formeln bereits geodätische Linien von mehreren Grad Ausdehnung berechnen, wie aus der Vergleichung der nachfolgenden Zahlen-Beispiele mit den Ergebnissen von § 82. zu ersehen ist.

Das beste Mittel jedoch, zur Gewinnung eines Urteils über das bisher behandelte Verfahren und über die Möglichkeit seiner Erweiterung, hat man in der Weiter-Entwicklung um eine Stufe höher, d. h. bis zur fünften Ordnung.

Wir haben diese Entwicklung durchgeführt, und in der „Zeitschr. f. Verm., 1883“, S. 72–76 die Haupt-Zwischenstufen angegeben; da es sich dabei um sehr lange, im Druck kaum wiederzugebende Formelhäufungen handelt, deren mathematischer Grundgedanke schon durch das Vorhergehende völlig klar gemacht ist, geben wir hier nur die *End-Ergebnisse*.

Die Formeln (21) und (22) werden so erweitert (vgl. (30) und (31)):

$$\sigma = U s \left\{ 1 + (\sigma_1) b^2 + (\sigma_2) t^2 \sin^2 \varphi + (\sigma_3) b^4 + (\sigma_4) t^2 t^2 \cos^2 \varphi + (\sigma_5) t^4 \cos^4 \varphi \right\} \quad (27)$$

$$\lambda = V l \left\{ 1 + (\lambda_1) b^2 + (\lambda_2) t^2 \sin^2 \varphi + (\lambda_3) b^4 + (\lambda_4) t^2 t^2 \cos^2 \varphi + (\lambda_5) t^4 \cos^4 \varphi \right\} \quad (28)$$

Wenn man die Formeln (27) und (28) umgekehrt anwenden will, d. h. wenn man z. B. s aus σ berechnen will, so braucht man die Glieder $(\sigma_1)^2 b^4$, $(\sigma_1) (\sigma_2) b^2 t^2 \sin^2 \varphi$ und $(\sigma_2)^2 t^4 \sin^4 \varphi$, welche bei der Reihenumkehrung zunächst auftreten, nicht zu berücksichtigen, weil die Coefficienten (σ_1) und (σ_2) beide den Faktor η^2 haben, und Glieder von der Ordnung η^4 in den Coefficienten (σ_3) , (σ_4) und (σ_5) überhaupt vernachlässigt sind.

Also auch, wenn man logarithmisch rechnen will, kann man (27) kurz so umkehren:

$$\log s = (\log \sigma - \log U) - \mu (\sigma_1) b^2 - \mu (\sigma_2) t^2 \sin^2 \varphi - \mu (\sigma_3) b^4 - \mu (\sigma_4) b^2 t^2 \cos^2 \varphi - \mu (\sigma_5) t^4 \cos^4 \varphi \quad (29)$$

In diesen Formeln (27), (28), (29) sind die Coefficienten (σ_1) , (σ_2) , (λ_1) , (λ_2) dieselben, wie schon bei (25) und (26) angegeben wurde; die übrigen haben, auf η^2 einschliesslich genau, folgende Bedeutungen:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_3) &= \frac{\eta^2}{480 \varrho^4} (1 - t^2) &= [3.88838] \cos^2 \varphi (1 - t^2) \\ (\sigma_4) &= \frac{\eta^2}{720 \varrho^4} (-1 + 2 t^2 + 15 t^4) &= [3.712 \, 229] \cos^2 \varphi (-1 + 2 t^2 + 15 t^4) \\ (\sigma_5) &= - \frac{\eta^2}{720 \varrho^4} (9 t^2 - 5 t^4) &= [3.712 \, 229] \cos^2 \varphi (9 t^2 - 5 t^4) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_3) &= -\frac{\eta^2}{1440 \varrho^4} (1 + 15 t^2) = [3.411\ 256_n] \cos^2 \varphi (1 + 15 t^2) \\ (\lambda_4) &= \frac{\eta^2}{720 \varrho^4} (-1 - 10 t^2 + 15 t^4) = [3.712\ 286] \cos^2 \varphi (-1 - 10 t^2 + 15 t^4) \\ (\lambda_5) &= \frac{\eta^2}{240 \varrho^4} (-3 t^2 + t^4) = [4.189\ 407] \cos^2 \varphi (-3 t^2 + t^4) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Die eingeklammerten Zahlen sind hier Logarithmen, und angehängtes n bedeutet, dass die zugehörige Zahl negativ ist. Wie immer bedeutet $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ und $t = \tan \varphi$.

Eine Coëfficienten-Tabelle haben wir hiernach berechnet und auf Seite [44]—[45] des Anhangs mitgeteilt. Zu Weiterem können auch die Tabellen [34] und [35] des Anhangs benützt werden.

In den vorstehenden Formeln kommen verschiedene Konstanten vor, welche wir zum Gebrauch hier zusammenstellen:

$$\left. \begin{aligned} \log \frac{1}{12 \varrho^2} &= 8.291\ 9684.9 - 20 & \log \frac{e'^2}{12 \varrho^2} &= 6.119\ 2832.7 - 20 \\ \log \frac{1}{24 \varrho^2} &= 7.990\ 9384.9 - 20 & \log \frac{e'^2}{24 \varrho^2} &= 5.818\ 2572.8 - 20 \\ \log \frac{1}{240 \varrho^4} &= 6.362\ 0882 - 30 & \log \frac{e'^2}{240 \varrho^4} &= 4.189\ 4070 - 30 \\ \log \frac{1}{480 \varrho^4} &= 6.061\ 0582 - 30 & \log \frac{e'^2}{480 \varrho^4} &= 3.888\ 3770 - 30 \\ \log \frac{1}{720 \varrho^4} &= 5.884\ 9670 - 30 & \log \frac{e'^2}{720 \varrho^4} &= 3.712\ 2858 - 30 \\ \log \frac{1}{1440 \varrho^4} &= 5.583\ 9370 - 30 & \log \frac{e'^2}{1440 \varrho^4} &= 3.411\ 2558 - 30 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Um eine Übersicht zu gewinnen, wie viel die Glieder fünfter Ordnung in unseren Breiten etwa ausmachen, haben wir die folgenden zwei Übersichts-Tabellen berechnet.

I. Gesamtbetrag der 3 Glieder fünfter Ordnung in der Formel (27) für σ , berechnet mit $\varphi = 50^\circ$.

$b =$	$l = 2^\circ$	$l = 4^\circ$	$l = 6^\circ$	$l = 8^\circ$	$l = 10^\circ$	(33)
2°	+ 0,00000''	+ 0,00000''	+ 0,00001''	+ 0,00001''	+ 0,00001''	
4°	+ 0,00000	+ 0,00002	+ 0,00005	+ 0,00010	+ 0,00016	
6°	+ 0,00001	+ 0,00006	+ 0,00014	+ 0,00030	+ 0,00048	
8°	+ 0,00001	+ 0,00012	+ 0,00031	+ 0,00061	+ 0,00103	
10°	+ 0,00002	+ 0,00018	+ 0,00056	+ 0,00111	+ 0,00186	

II. Gesamtbetrag der 3 Glieder fünfter Ordnung in der Formel (28) für λ , berechnet mit $\varphi = 50^\circ$.

$b =$	$l = 2^\circ$	$l = 4^\circ$	$l = 6^\circ$	$l = 8^\circ$	$l = 10^\circ$	(34)
2°	— 0,00000''	— 0,00000''	— 0,00001''	— 0,00003''	— 0,00012''	
4°	— 0,00001	— 0,00001	— 0,00001	— 0,00001	— 0,00004	
6°	— 0,00004	— 0,00006	— 0,00006	— 0,00005	— 0,00005	
8°	— 0,00011	— 0,00020	— 0,00025	— 0,00026	— 0,00022	
10°	— 0,00028	— 0,00053	— 0,00070	— 0,00079	— 0,00078	

Als erste Anwendung der entwickelten Formeln wollen wir unser viertes Normal-Beispiel (4) § 77. S. 387 nehmen in dieser Weise:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gegeben Berlin} \quad \varphi_1 = 52^\circ 30' 16,7'' \\ \text{Königsberg} \quad \varphi_2 = 54^\circ 42' 50,6'' \end{array} \right\} \quad l = 7^\circ 6' 0'' \quad (35)$$

Es soll die geodätische Linie s zwischen beiden Punkten, und beide Azimute α_1 und α_2 berechnet werden.

Man bildet zuerst das Mittel der gegebenen Breiten:

$$\varphi = 53^\circ 36' 33,65'' \quad (36)$$

Damit geht man in die Hilfstafeln Seite [44]—[47] des Anhangs ein, und entnimmt die Coefficienten:

$$\log V = 0.000\,5129.683 \quad (37)$$

$\log(\lambda_1)$	$\log(\lambda_2)$	$\log(\lambda_3)$	$\log(\lambda_4)$	$\log(\lambda_5)$
6.17908 _n	5.66582 _n	4.414 _n	4.756	4.065 _n

Damit rechnet man nach der Formel (28), mit $l = 7^\circ 6' 0'' = 25560''$; das Hauptglied wird 25590,208 116'', dann die 5 Korrektionsglieder:

$$\begin{aligned} & -0,024\,452'' \quad , \quad -0,050\,187'' \quad , \quad -0,000\,003'' \quad , \quad +0,000\,021'' \quad , \quad -0,000\,016'' \\ & \lambda = 25590,208\,116'' - 0,074637'' = 25590,133\,479'' \\ & \lambda = 7^\circ 6' 30,133\,479'' \end{aligned} \quad (38)$$

Wir haben hier mit 6 Dezimalen der Sekunden gerechnet, um zu sehen, wie weit sich überhaupt die drei letzten Glieder bemerklich machen; da dieselben nur 0,00002'' ausmachen, könnte man dieselben ganz weglassen.

Nun nehmen wir die reduzierten Breiten zu (35) nebst λ von (38) zusammen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Berlin} \quad \varphi_1 = 52^\circ 24' 43,01137'' \\ \text{Königsberg} \quad \varphi_2 = 54^\circ 37' 24,75639'' \end{array} \right\} \quad \lambda = 7^\circ 6' 30,13348'' \quad (39)$$

Das dadurch bestimmte sphärische Dreieck haben wir nach den Gauss'schen Formeln (4), (5) S. 295 aufgelöst, wodurch gefunden wurde:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = 59^\circ 33' 0,6889'' \quad \alpha_2 = 65^\circ 16' 9,3650'' \\ \sigma = 4^\circ 46' 1,41023'' = 17161,41023'' \end{array} \right\} \quad (40)$$

Um σ auf s zu reduzieren, braucht man wieder Coefficienten, zuerst $\log U$ nach der Formel (24) mit Benützung des schon bei (37) berechneten $\log V$:

$$\log U = 8.510\,2946.378.$$

Aus der Hilfstafel Seite [44]—[45] entnimmt man mit dem Argument $\varphi = 53^\circ 36' 33,65''$ von (36), die 5 Coefficienten-Logarithmen für s :

$\log(\sigma_1)$	$\log(\sigma_2)$	$\log(\sigma_3)$	$\log(\sigma_4)$	$\log(\sigma_5)$
5.27256	5.66582 _n	3.360 _n	4.987	2.839 _n

Damit rechnen wir nach der Formel (29), und haben zunächst das Hauptglied 5.724 2583.351 und die 5 logarithmischen Korrektionsglieder:

$$-0.5146 \quad +8.5179 \quad +0.0000 \quad -0.0061 \quad +0.0002$$

Dieses gibt im ganzen:

$$\log s = 5.724\,2583.351 + 7.997 = 5.724\,2591.348 \quad s = 529\,979,578'' \quad (41)$$

Diese Länge s und die beiden Azimute von (40) stellen die Lösung vor, welche mit den entsprechenden Werten (31) und (39) des vorigen § 82. S. 411—412 hinreichend stimmen.

Nach diesem wollen wir noch unser grosses Normal-Beispiel (2) § 77. S. 386 behandeln:

$$\begin{array}{lcl} \text{Gegeben} & \varphi_1 = 45^\circ 0' 0'' & l = 10^\circ 0' 0'' \\ & \varphi_2 = 55^\circ 0' 0'' & \\ \text{Mittel} & \varphi = 50^\circ 0' 0'' & \end{array} \quad (42)$$

Damit geht man in die Hilfstafeln Seite [44]—[47] ein, und entnimmt die Coëfficienten, die wir sogleich alle hier hersetzen wollen, obgleich man sie nicht sofort alle braucht:

$$\log V = 0.000\ 6020.131 \quad \log U = 8.510\ 3836.826 \quad (43)$$

$$\begin{array}{ccccc} \log(\sigma_1) & \log(\sigma_2) & \log(\sigma_3) & \log(\sigma_4) & \log(\sigma_5) \\ 5.02731 & 5.73542_n & 3.128_n & 4.835 & 3.759_n \end{array} \quad (44)$$

$$\begin{array}{ccccc} \log(\lambda_1) & \log(\lambda_2) & \log(\lambda_3) & \log(\lambda_4) & \log(\lambda_5) \\ 6.155215_n & 5.73542_n & 4.376_n & 4.506 & 4.156_n \end{array} \quad (45)$$

Die Reduktion für λ nach der Formel (28) giebt das Hauptglied 36049,93731" und die 5 Korrektionsglieder:

$$-0,667\ 923'' , -0,149\ 088'' , -0,001\ 438'' , +0,000\ 802'' , -0,000\ 148''$$

Im ganzen:

$$\lambda = 36049,93731'' - 0,817795'' = 36049,11952'' \quad (46)$$

Die beiden reduzierten Breiten sind:

$$\psi_1 = 44^\circ 54' 14,67493'' \quad \psi_2 = 54^\circ 54' 35,31462'' \quad (47)$$

Diese ψ_1 und ψ_2 nebst λ von (46) bestimmen ein sphärisches Dreieck, dessen Auflösung giebt:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = 29^\circ 3' 15,45983'' & \alpha_2 = 36^\circ 45' 7,40055'' \\ \sigma = 11^\circ 52' 41,20996'' & = 42761,20996'' \end{array} \quad (48)$$

Zur Reduktion von σ auf s hat man die Formel (29) mit den Coëfficienten (44); das Hauptglied wird 6.120 6663.024 und die 5 Korrektionsglieder:

$$-5.994 , +17.961 , +0.010 , -0.206 , 0.007$$

Im ganzen:

$$\log s = 6.120\ 6663.024 + 11.778 = 6.120\ 6674.802 \quad s = 1\ 320\ 284,365'' \quad (49)$$

Die Werte (48) und (49) stellen die Lösung der Aufgabe vor, welche mit (40), (41), (45) des vorigen § 82. S. 413 verglichen, genügend stimmen.

In der „Zeitschr. f. Verm. 1883“, S. 81–82 haben wir eine Coëfficienten-Tabelle für die Formeln (27) und (28) gegeben, welche nicht dieselbe ist wie die neu berechnete Tabelle Seite [44]–[45] unseres Anhangs. Nur die Coëfficienten (σ_1) , (σ_3) , (λ_1) , (λ_3) sind mit den früheren [1], [3], [1], [3] identisch, abgesehen von einer kleinen Differenz in den letzten Stellen von $\log(\sigma_1)$ und $\log(\lambda_1)$ daher rührend, dass früher $\frac{1}{r^4} = 1 - 2\eta^2$ gesetzt war, was Vernachlässigung von η^4 enthält, welche in den neuen Coëfficienten (σ_1) , (σ_3) , (λ_1) , (λ_3) nicht mehr vorkommt. Ausserdem besteht der Unterschied, dass Funktionen $\sin^2 \varphi$, $\cos^2 \varphi$, $\cos^4 \varphi$, welche früher in die Coëfficienten gezogen waren, nun in der Formel bleiben, damit die Coëfficienten-Tafel kleinere Differenzen bekommt. Nur der in η^2 enthaltene Faktor $\cos^2 \varphi$ ist in die Coëfficienten gezogen, weil der Modul $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ sich analytisch gut andeut, und auch formell den Faktoren η^2 gegenüber in den Coëfficienten zum Gleichgewicht beiträgt.

§ 84. Vergleichung verschiedener Auflösungen der geodätischen Hauptaufgabe.

Die Theorien und Berechnungs-Methoden, welche wir in den vorstehenden §§ 78.—83. kennen gelernt haben, lassen sich in mehrfacher Beziehung vergleichen.

Wir unterscheiden zuerst *kurze* Entfernungen und *lange* Entfernungen, und verstehen unter den ersteren namentlich einzelne Dreiecksseiten, oder aus wenigen Dreiecksseiten abgeleitete Diagonalen etwa bis zu 200^{km} Entfernung; und unter *langen* Entfernungen verstehen wir geodätische Linien, welche als Repräsentanten ganzer Dreiecks-Ketten berechnet, nach der Übersichtskarte von S. 193 im allgemeinen $200\text{--}300^{\text{km}}$ lang sind, jedoch auch erheblich darüber hinaus gehen können (vgl. S. 387, Berlin-Königsberg = 580^{km}).

Für kurze Entfernungen in diesem Sinne sind die Methoden von § 78. und § 79. geeignet, namentlich die Mittelbreiten-Methode von § 79. Wollte man kurze Linien bis zu 100^{km} oder höchstens 200^{km} nach den für längere Entfernungen bestimmten Methoden von § 82. oder § 83. behandeln, so würde man allein in der sphärischen Hilfs-Rechnung ebensoviel, oder bei den geschlossenen sphärischen Formeln mehr Arbeit aufzuwenden haben, als das ganze Verfahren von § 79. überhaupt beansprucht, indem dasselbe sich von rein sphärischer Rechnung durch nichts unterscheidet, als durch das Aufschlagen der Coefficienten aus der Hilfstafel Seite [38]—[39] des Anhangs.

Wenn die Entfernungen über 200^{km} hinausgehen, so wird bei dem genannten Verfahren die Genauigkeit von 0.1 in den Logarithmen und $0,001''$ in den Winkeln nicht mehr möglich, und etwa der Versuch, durch Entwicklung auf noch höhere Potenzen jenes Verfahren auszudehnen, würde nur ganz unhandliche Formeln erzielen, wie aus unseren zunächst nur sphärisch behandelten Entwicklungen bis σ^5 zu schliessen ist, deren Zusammenfassung in den Tabellen von S. 312 auch für sphäroidische Aufgaben die richtigen Fingerzeige giebt.

Für grössere Entfernungen von 200^{km} bis zu 1000^{km} oder 2000^{km} , d. h. für alle praktisch vorkommenden Fälle, haben wir von unseren bisher behandelten Lösungen nur zwei zur Auswahl, nämlich § 82. nach dem *Besselschen* Prinzipie, mit den sphärischen Hilfs winkeln m und M , und § 83. unsere neue Methode mit dem Haupt-Reduktionsfaktor V . Bei diesen beiden Systemen ist alles Sphäroidische von dem Sphärischen vollständig *getrennt*. Es tritt eine rein *sphärische* Auflösung, von derselben Form wie die Gesamt-Aufgabe, als Hilfs-Berechnung auf, wobei die *geschlossenen* Formeln der sphärischen Trigonometrie § 55. S. 293—300 anzuwenden sind; denn wenn hier Reihen-Entwicklungen von Vorteil sein könnten, so müsste auch noch Gesamt-Entwicklung sphärischer und sphäroidischer Glieder, d. h. § 78.—79. (wie für kleine Entfernungen) anwendbar sein.

Vergleichen wir nun § 82. und § 83. unter sich, so erscheint das *Besselsche* Prinzip von § 82. deswegen sehr schwerfällig, weil die beiden sphärischen Hilfs winkel m und M , welche man zu den beiden sphäroidischen Reduktionen braucht, bereits die Auflösung eines sphärischen Dreiecks voraussetzen, dessen Elemente man bei der indirekten Anwendung noch nicht hat; während unsere neue Methode von § 83. fast nur die leicht verfügbare Mittelbreite als Argument zum Eingehen in die übersichtlichen und wenig umfänglichen Hilfstafeln braucht.

Für *Landes-Vermessungszwecke* steht die Aufgabe im Vordergrund, bei gegebener Breite und Länge eines Punktes, und bei gegebenem Azimut und gegebener Entfernung, die Breite, Länge und das Azimut für den jenseitigen Punkt zu berechnen; und hiezu sind allerdings die Mittelbreiten-Formeln von § 79. weniger geeignet, weil sie zu solchem Zwecke nur *mittelbar* dienen; doch ist das nur ein scheinbares Hindernis,

wie wir nachher noch darlegen wollen. Für Landes-Vermessungszwecke ist auch daran zu erinnern, dass man die geographischen Coordinaten aller Punkte II. und III. Ordnung, wenn man solche überhaupt braucht, bequemer auf dem Umwege über die ohnehin nötigen rechtwinkligen Coordinaten in den einzelnen Geltungsbereichen (nach S. 334) berechnen kann.

Für die Zwecke der *wissenschaftlichen Erdmessung* kommt die geodätische Hauptaufgabe, bei der Berechnung von Lotablenkungen hauptsächlich in der direkten Form vor, nämlich Berechnung der Entfernung und der Azimute zwischen zweien durch Längen und Breiten gegebenen Punkten, und hiezu ist kaum ein besseres Verfahren denkbar als die unmittelbare Anwendung der Formeln von § 79. S. 398, oder bei grösserer Ausdehnung, der Formeln von § 83. S. 417 und 418.

Aber auch zur *indirekten* Anwendung sind die Formeln von § 79. und von § 83. vorzüglich geeignet. Man braucht in diesem Falle vorläufige Näherungswerte des Breitenunterschieds b und des Längenunterschieds l , die jedoch bei der sehr raschen Konvergenz der Reihen nicht schwer zu erlangen sein werden.

Überhaupt braucht für die Vorteile, welche *Mittel-Argumentformeln* auch bei indirekter Anwendung gewähren, nur an das erinnert zu werden, was *Gauss* in den „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“, zweite Abhandlung, Art. 20. gesagt hat, wie wir schon bei den sphärischen Mittelbreiten-Formeln in § 57. S. 309 zitiert haben.

Wenn, wie in unseren Formeln, nicht Entfernungen und Azimute, sondern Breiten- und Längenunterschiede als erste Näherungen gebraucht werden, so sind diese Elemente in allen Fällen der Praxis *ohnehin* aus anderen Gründen näherungsweise verfügbar zu halten. Feine geodätische Berechnungen beziehen sich nur auf Punkte, deren geographische Coordinaten man schon vor Beginn der Rechnung auf wenige Sekunden genau kennt.

Dieses gilt namentlich für die indirekte Anwendung der Formeln von § 83.

Im Anschluss hieran haben wir als Hilfsmittel zu Berechnungen mit kurzen Entfernungen zitieren:

„Rechnungs-Vorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme. Formeln und Tafeln zur Berechnung der geographischen Coordinaten aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten. Erste Ordnung. Berlin 1878.“ Im Selbstverlage. Zu beziehen durch die Königl. Hof-Buchhandlung von *E. S. Mittler & Sohn*, Kochstrasse 69. 70. Mit Hilfstafeln für 8 stellige Logarithmen, desgleichen zweite Ordnung 7 stellig und dritte Ordnung 6 stellig.

Diese amtliche Veröffentlichung enthält nur Zahlen-Tabellen und Gebrauchs-Formeln aber keine Entwicklungen, dagegen ist nach Mittheilungen von amtlicher Seite das wichtigste der Entwicklungen mitgeteilt in *Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen, 1882“, I. S. 113–121. Hiernach ist die Theorie, welche diesen Formeln zu Grunde liegt, eine sphäroidische Analogie zu den sphärischen Formeln, welche *Gauss* als „Vierte Methode“ in Art. 16. der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“ gegeben hat (vgl. unseren § 55. mit Fig. 3. S. 299–301). Diese sinnreiche sphäroidische Analogie stützt sich auf die *Gauss'schen* Entwicklungen der „Disquisitiones generales circa superficies curvas“, mit welchen wir uns erst in unserem späteren Kap. X. beschäftigen werden.

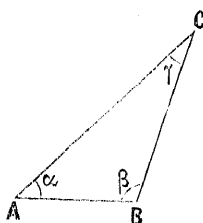
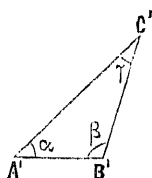
Bei der Vermessung des Staates New-York werden zur Berechnung der geographischen Coordinaten direkte Reihen-Entwicklungen nach Potenzen der geodätischen Linie (vgl. § 78.) angewendet. Vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1890“, S. 177–179.

Kapitel IX.

Konforme Abbildung des Ellipsoids.

§ 85. Konforme Abbildung im allgemeinen.

Unter „konformer“ Abbildung versteht man (nach der Bedeutung, welche *Gauss* diesem Worte gegeben hat) eine solche geometrische Beziehung zwischen zwei Flächen, dass jedem Punkte der einen Fläche ein bestimmter Punkt der anderen Fläche entspricht, und dass das Abbild dem Urbild in den kleinsten Teilen *ähnlich* ist.

Fig. 1.
Urbild.Fig. 2.
Abbild.

Die letztere Bedingung ist durch nebenstehende Fig. 1. und Fig. 2. deutlicher gemacht in diesem Sinne:

Es seien A, B, C drei unter sich sehr nahe liegende Punkte einer gegebenen Fläche (Urbild) und $A' B' C'$ die entsprechenden Punkte einer anderen Fläche (Abbild); die Abbildung soll nach einem solchen Gesetze erfolgen, dass das kleine Dreieck $A' B' C'$ dem entsprechenden kleinen Dreieck $A B C$ *ähnlich* wird, dass also die Winkel α, β, γ

beider Dreiecke einander gleich sind und dass zwischen den Seiten ein konstantes Verhältnis besteht:

$$\frac{A' B'}{A B} = \frac{B' C'}{B C} = \frac{C' A'}{C A} = m \quad (1)$$

Einen besonderen Fall dieses allgemeinen Abbildungsgesetzes haben wir bereits in § 51.—52. kennen gelernt, nämlich die konforme Abbildung der Kugel auf die Ebene. (Das Vergrößerungsverhältnis v' in (2) S. 285 und (4) S. 286 hat dieselbe Bedeutung wie m in der vorstehenden Gleichung (1).)

Andere Anwendungen des allgemeinen Grundsatzes der konformen Abbildung auf geodätische Verhältnisse sind: die konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Ebene (vgl. S. 287), dann die konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel (d. h. der Haupt-Inhalt unseres gegenwärtigen Kapitels) und die konforme Abbildung der Kugel auf die Ebene in verschiedenen Formen, deren eine, der Merkator-Projektion entsprechend, wir in dem nachfolgenden § 92. behandeln werden.

Gauss hat die allgemeine mathematische Theorie der konformen Abbildung und deren geodätische Anwendung begründet in folgenden Schriften:

„Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Teile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird, von *C. F. Gauss*. Als Beantwortung der von der königlichen Societät der Wissenschaften in Kopenhagen für 1822 aufgegebenen Preisaufgabe“. Veröffentlicht in Schumachers „Astronomischen Abhandlungen, Heft 3, Altona 1825“.

Ferner „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie von *Carl Friedrich Gauss*“, erste Abhandlung, der Königl. Societät überreicht 1843, Okt. 23., desgl. zweite Abhandlung, der Königl. Societät überreicht 1846, Sept. 1. In der Gesamtausgabe „*Carl Friedrich Gauss Werke*“ sind diese Abhandlungen aufgenommen in Band IV, Göttingen 1873, S. 189—216, 259—340.

Hiezu ist auch die schon auf S. 287 erwähnte Abhandlung von Hauptmann *Schreiber* zu zählen, welche über die von *Gauss* für die Hannoversche Landesvermessung bearbeitete konforme Abbildung des Ellipsoids auf eine Ebene Auskunft giebt.

Die Theorie der konformen Abbildung für geodätische Zwecke hat in jüngster Zeit erhöhte Bedeutung erlangt, indem die trigonometrische Abteilung der preussischen Landesaufnahme diese Theorie in umfassender Weise praktisch verwertet hat, wie aus einer amtlichen Mitteilung von General *Schreiber* in den „Verhandlungen der 1887er Konferenz der perm. Kommission der internat. Erdmessung, Berlin 1888, Annex X^b, S. 10–11 zu ersehen ist.

Wir behandeln in unserem nachfolgenden Kapitel die Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel nach den zitierten klassischen *Gauss*schen Original-Schriften, jedoch mit Weglassung der „Allgemeinen Auflösung der Aufgabe“, welche in unserer vorigen Auflage, Karlsruhe 1878, S. 377–379, mit aufgenommen war. Diese „Allgemeine Auflösung“ ist für die Mathematik (Funktionen komplexer Veränderlicher) von Wert, aber für die vorliegende geodätische Anwendung überflüssig.

Wir haben in unserer Bearbeitung die Bezeichnungen von *Gauss* so gut es ging beibehalten, jedenfalls die Konstanten P, Q, α, m u. s. w., während im übrigen unser auch sonst gebräuchtes $P^2 = 1 + \eta^2$ sich nützlich erwiesen hat, namentlich an Stelle der ungemein sinnreichen, aber beim ersten Lesen von der Hauptsache ablenkenden goniometrischen Hilfsgrößen von Art. 4., die wir deshalb in unserem § 87. in den Anhang verwiesen haben.

Weggelassen haben wir alle Entwicklungen über die dritte Ordnung, unter Verweisung auf das Original-Werk.

Ändern mussten wir notwendig den Art. 13., welcher über Azimut-Reduktion handelt, weil hierbei *Gauss* die geodätische Linie als *kleinste* Linie nach der Theorie der Variations-Rechnung einführt, die in unseren Gang (Geodätische Linie S. 367–376) nicht passt, weshalb wir eine andere Entwicklung § 90. an Stelle von Art. 13. gesetzt haben.

Man kann in diesem Sinne wohl noch weiter gehen durch kombinierte Anwendung der Formeln von § 79. auf das geodätische Dreieck φ, φ', l und der Formeln von § 57. auf das Abbild-Dreieck $u, u', \alpha l$.

Eine Vervollständigung der *Gauss*schen Theorie in Hinsicht auf die Azimut-Reduktion nach dem zitierten Art. 13. ist von amtlicher Seite in Aussicht gestellt in den „Verhandlungen der 1887er Konferenz in Nizza der perm. Kommission der internat. Erdmessung, Berlin 1888, Annex X^b, S. 10.

§ 86. Konforme Abbildung des Umdrehungs-Ellipsoids auf eine Kugel.

In Fig. 1. bezeichnet ds das Differential einer geodätischen Linie auf dem Ellipsoid und in Fig. 2. ist ds' das Differential eines entsprechenden Grosskreisbogens auf einer Kugel vom Halbmesser A . Im übrigen gelten folgende Bezeichnungen und daraus folgende Beziehungen:

	Ellipsoid	Kugel	
Punkt	P	Q	
Breite	φ	u	(1)
Längen-Unterschied	dl	$d\lambda = \alpha dl$	(2)

Hiebei ist α eine vorläufig eingeführte Konstante, deren Wert sich nachher ergeben wird. Weiter haben wir einander entsprechend:

$$\text{Parallelbogen } P_1 P' = N \cos \varphi dl \quad Q_1 Q' = A \cos u \alpha dl \quad (3)$$

$$\text{Meridianbogen } PP_1 = M d\varphi \quad QQ_1 = A du \quad (4)$$

Dabei sind M und N wie gewöhnlich die beiden Hauptkrümmungs-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids.

Wenn nun $QQ_1 Q'$ konforme Abbildung von $PP_1 P'$ sein soll, so müssen die Seiten der beiden Dreiecke ein konstantes Verhältnis haben, welches mit m bezeichnet sei, also:

$$\frac{A du}{M d\varphi} = \frac{\alpha A \cos u}{N \cos \varphi} = m \quad (5)$$

Fig. 1.
Ellipsoid.

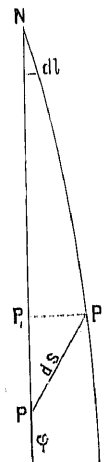


Fig. 2.
Kugel.



Hieraus erhält man als Beziehung zwischen der sphärischen Breite u und der sphäroidischen Breite q die Differentialgleichung:

$$\frac{du}{dq} = \alpha \frac{M \cos u}{N \cos q}$$

Das Krümmungs-Verhältnis $M:N$ wird nach (18) § 33. S. 210 eingeführt, wodurch man erhält:

$$\frac{du}{dq} = \frac{\alpha \cos u}{V^2 \cos q} \quad (6)$$

oder in anderer Form, mit W^2 statt V^2 nach (19) § 33. S. 210:

$$\frac{du}{\cos u} = \frac{\alpha (1 - e^2)}{W^2} \frac{dq}{\cos q} = \frac{\alpha (1 - e^2)}{1 - e^2 \sin^2 q} \frac{dq}{\cos q} \quad (7)$$

Zur Integration zerlegen wir in Teilbrüche:

$$\frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 q) \cos q} = \frac{1}{\cos q} - \frac{1}{2} \frac{e^2 \cos q}{1 + e \sin q} - \frac{1}{2} \frac{e^2 \cos q}{1 - e \sin q}$$

Damit giebt die Integration von (7):

$$\log \tan \left(45^\circ + \frac{u}{2} \right) = \alpha \left\{ \log \tan \left(45^\circ + \frac{q}{2} \right) - \frac{1}{2} e \log (1 + e \sin q) + \frac{1}{2} e \log (1 - e \sin q) \right\} - \log \frac{1}{k}$$

Dabei ist $-\log \frac{1}{k}$ als Integrations-Konstante zugesetzt; die vorstehende Gleichung lässt sich damit auch so schreiben:

$$\tan \left(45^\circ + \frac{u}{2} \right) = \frac{1}{k} \tan^\alpha \left(45^\circ + \frac{q}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin q}{1 + e \sin q} \right)^{\alpha e} \quad (8)$$

Wenn diese Beziehung zwischen u und q erfüllt ist, so wird m aus beiden Formeln (5) übereinstimmend erhalten, und zwar nach der zweiten Form von (5), mit Einsetzung von N nach (17) S. 210:

$$m = \alpha \frac{A \cos u}{a \cos q} W \quad (9)$$

oder auch mit V statt W und c statt a :

$$m = \frac{A \alpha \cos u}{c \cos q} V \quad (10)$$

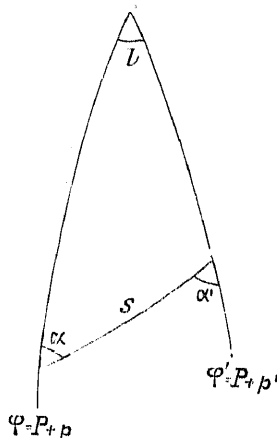
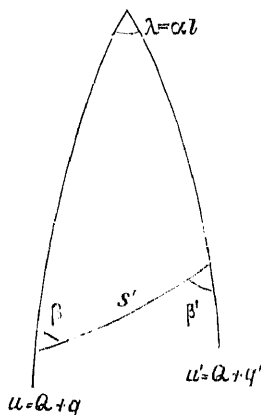
Die Beziehung zwischen den geographischen Längen l und λ ergibt sich, da α konstant ist, nach (2) sofort:

$$\lambda = \alpha l \quad (11)$$

Die Gleichungen (8), (10) und (11) enthalten bereits die Lösung der gestellten Aufgabe im Grundzuge, und wir wollen im Anschluss an die umstehenden Fig. 3. und Fig. 4. die bis jetzt gewonnenen Ergebnisse zusammenfassen:

Fig. 3. stellt ein geodätisches Polar-Dreieck auf dem Ellipsoid vor, mit den Breiten q und q' und dem Längenunterschiede l ; die geodätische Linie, welche die beiden Punkte mit den Breiten q und q' verbindet, hat die lineare Grösse s und die beiden Azimute α und α' .

Fig. 4. ist das konforme sphärische Abbild von Fig. 3.; den Breiten q und q' entsprechen die sphärischen Breiten u und u' nach der Gleichung (8), der sphärische

Fig. 3.
Ellipsoid.Fig. 4.
Kugel mit dem Halbmesser A.

Längenunterschied $\lambda = \alpha l$ wird aus dem Längenunterschied l des Ellipsoids erhalten durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor α ; und der Grosskreisbogen s' steht zu der geodätischen Linie s in Beziehung durch das Vergrößerungs-Verhältnis m , indem $s' = \int m ds$ sein muss.

Die Azimute β und β' auf der Kugel sind *nicht* genau gleich den Azimuten α und α' auf dem Ellipsoid, jedoch werden bei den nachfolgenden Anwendungen die β und α wenigstens nahezu einander gleich sein.

Durch die Breiten-Bezeichnungen $q = P + p$ und $u = Q + q$ ist angedeutet, dass P eine gewisse Normalbreite auf dem Ellipsoid und Q die entsprechende Normalbreite auf der Kugel ist, sowie dass p und q Breiten-Differenzen sind.

§ 87. Wahl der Konstanten.

Die Grundgleichungen (8), (10) und (11), welche am Schluss des vorigen § 86. gefunden wurden, enthalten drei willkürliche Konstanten, nämlich α , k und den Kugelhalbmesser A .

Man hat nun in seiner Gewalt, durch zweckmässige Bestimmung dieser Konstanten α , k und A zu bewirken, dass für ein bestimmtes Gebiet die Abweichung des Vergrößerungs-Verhältnisses m von dem Wert 1 möglichst klein wird.

Zu diesem Zwecke nehmen wir einen etwa der Mitte des Gebietes zugehörigen Wert P der Breite q an, welchem auch ein gewisser Wert Q der Breite u auf der Kugel entsprechen wird.

Indem wir zugleich auch die Bezeichnungen p und q für Breiten-Differenzen auf dem Ellipsoid und auf der Kugel einführen, haben wir, wie auch schon in Fig. 3. und Fig. 4. des vorigen § 87. (s. oben) eingeschrieben ist, die zusammengehörenden Bezeichnungen:

$$\text{Ellipsoid-Breite} \quad q = P + p \quad (1)$$

$$\text{Kugel-Breite} \quad u = Q + q \quad (2)$$

In der Normalbreite P , bzw. Q soll das Vergrößerungs-Verhältnis $m = 1$, also $\log m = 0$ sein, und für irgend welche andere Breite soll $\log m$ bestimmt sein durch eine Reihe, deren erste Glieder die Ableitungen $\frac{d \log m}{du}$ und $\frac{d^2 \log m}{du^2}$ sein werden.

Wir können nun über die drei Konstanten α , k und A so verfügen, dass auch diese beiden ersten Ableitungen für die Normalbreite verschwinden, wir haben also für die drei Konstanten α , k und A folgende drei Bedingungen:

$$\text{für } u = Q \text{ soll sein: 1) } m = 1 \text{ oder } \log m = 0 \quad (3)$$

$$2) \frac{d \log m}{du} = 0 \quad (4)$$

$$3) \frac{d^2 \log m}{du^2} = 0 \quad (5)$$

Hiernach haben wir uns zuerst mit den beiden ersten Ableitungen von $\log m$ zu beschäftigen, und nehmen zuerst von (10) und (6) § 86. S. 426 die zwei Gleichungen:

$$m = \frac{A}{c} \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} V \quad \text{wobei } V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad (6)$$

und

$$\frac{d \varphi}{du} = \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} \quad (7)$$

durch Ableitung von V erhält man:

$$\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{e'^2}{V} \sin \varphi \cos \varphi = -\frac{\eta^2}{V} \tan \varphi \quad (\text{wo } \eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi) \quad (8)$$

Nun giebt (6):

$$\begin{aligned} \log m &= \log \frac{A \alpha}{c} + \log \cos u - \log \cos \varphi + \log V \\ \frac{d \log m}{du} &= -\tan u + \tan \varphi \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} - \frac{\eta^2}{V^2} \tan \varphi \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} \\ \frac{d \log m}{du} &= -\tan u + \frac{\sin \varphi}{\alpha \cos u} \\ \frac{d^2 \log m}{du^2} &= -\frac{1}{\cos^2 u} + \frac{1}{\alpha \cos^2 u} \left(\cos \varphi \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} + \sin \varphi \sin u \right) \\ \frac{d^2 \log m}{du^2} &= \frac{1}{\alpha^2 \cos^2 u} (-\alpha^2 + V^2 \cos^2 \varphi + \alpha \sin \varphi \sin u) \end{aligned} \quad (9)$$

Um nun die Bedingungen (3), (4) und (5) einzuführen, hat man in (6), (9) und (10) zu setzen: $\varphi = P$ und $u = Q$. Dieses giebt:

$$\text{aus (6):} \quad 1 = \frac{A}{c} \frac{\alpha \cos Q}{\cos P} V \quad (\text{wo } V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 P) \quad (11)$$

$$\text{aus (9):} \quad 0 = -\tan Q + \frac{\sin P}{\alpha \cos Q} \quad (12)$$

$$\text{aus (10):} \quad 0 = -\alpha^2 + V^2 \cos^2 P + \alpha \sin P \sin Q \quad (13)$$

Nun giebt sofort (12):

$$\alpha \sin Q = \sin P \quad (14)$$

Dieses in (13) gesetzt giebt, mit Rücksicht auf V^2 in (11):

$$\alpha^2 = 1 + e'^2 \cos^4 P \quad (15)$$

(14) gibt auch $\alpha^2 \cos^2 Q = \alpha^2 - \sin^2 P$ und dieses nebst (15) in (11) gesetzt, giebt:

$$A = \frac{c}{V^2} = \frac{c}{1 + e'^2 \cos^2 P} \quad (16)$$

Dieses ist, nach (22) § 33. S. 211, der *mittlere Krümmungshalbmesser* in der Breite P .

Aus (14) und (15) findet man auch:

$$\begin{aligned} \alpha^2 \cos^2 Q &= (1 + e'^2 \cos^4 P) - (\sin^2 P) = \cos^2 P + e'^2 \cos^4 P \\ &= \cos^2 P (1 + e'^2 \cos^2 P) \\ \alpha \cos Q &= \cos PV \end{aligned} \quad (17)$$

Aus (15) und (16) haben wir also die Konstanten α und A , und durch (14) wird auch die dritte Konstante k bestimmt, insofern dadurch P und Q miteinander verbunden sind; setzt man nun in (8) § 86. S. 426 $q = P$ und $u = Q$, d. h. wendet man jene Gleichung auf die Normalbreite an, so erhält man:

$$k = \frac{\tan^{\alpha} \left(45^{\circ} + \frac{P}{2} \right)}{\tan \left(45^{\circ} + \frac{Q}{2} \right)} \left(\frac{1 - e \sin P}{1 + e \sin P} \right)^{\frac{\alpha e}{2}} \quad (18)$$

Es bietet sich nun folgender Gang der Rechnung dar: Man nimmt eine Normalbreite P auf dem Ellipsoid willkürlich an, berechnet damit den mittleren Krümmungshalbmesser A nach (16), dann α nach (15), Q nach (14) und endlich k nach (18); dann kann man für jede Ellipsoidbreite q die zugehörige Kugelbreite u und auch das zugehörige Vergrößerungsverhältnis m nach (8) und (9) § 86. S. 426 berechnen.

Statt dessen kann man aber auch so verfahren, dass nicht eine Normalbreite P auf dem *Ellipsoid*, sondern eine Normalbreite Q auf der *Kugel* als willkürlich (runde Zahl) angenommen wird. In diesem Falle, der nicht wesentlich verschieden von dem ersten Falle ist, kann man aber nicht geradezu nach den Formeln (14) und (15) rechnen, sondern man muss aus (14) und (15) die Breite P eliminieren, um α^2 in Q auszudrücken. Wenn man hiezu aus (14) nimmt:

$$\cos^4 P = (1 - \alpha^2 \sin^2 Q)^2 = 1 - 2 \alpha^2 \sin^2 Q + \alpha^4 \sin^4 Q$$

und wenn man dieses in (15) einsetzt, so wird man auf eine Gleichung geführt, welche α^2 und α^4 enthält, und nach α^2 aufgelöst dieses giebt:

$$\alpha^2 = \frac{1 + 2 e'^2 \sin^2 Q - \sqrt{1 + 4 e'^2 \sin^2 Q \cos^2 Q}}{2 e'^2 \sin^4 Q} \quad (19)$$

Diese Gleichung (19) nebst (14) gestattet dann die Weiterrechnung in der früheren Weise.

Da aber die Formel (19) zur unmittelbaren Ausrechnung sehr wenig geeignet ist, d. h. unmittelbar angewendet keine scharfe Berechnung geben kann, empfiehlt es sich, sie in eine Reihe zu entwickeln (in einfachster Weise nach (11) § 30. S. 197), deren drei erste Glieder sind:

$$\alpha^2 = 1 + e'^2 \cos^4 Q - 2 e'^4 \sin^2 Q \cos^6 Q + 5 e'^6 \sin^4 Q \cos^8 Q \quad (20)$$

Damit ist alles zur Anwendung vorbereitet.

Gauss hat einen *sphärischen* Normalwert Q zu Grunde gelegt, nämlich:

$$\text{Kugel } Q = 52^{\circ} 40' 0'' \quad (21)$$

Ausserdem werden von *Gauss* als *Besselsche* Erddimensionen angenommen:

$$\begin{aligned} \log a &= 6.514\,8235\cdot337 \text{ für Toisen} \\ \text{und } \log a &= 6.804\,6434\cdot637 \text{ für Meter} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\log \sqrt{1-e^2} = 9.998\,5458\cdot202 \quad (23)$$

$$\log e = 8.912\,2052\cdot079 \quad \log e^2 = 7.824\,4104\cdot158 \quad (24)$$

Die Werte (23) und (24) sind dieselben wie die von uns auf S. 207 angegebenen, während $\log e^2$ nach (24) in den letzten Stellen von der Angabe auf S. 207 abweicht. Dieses rührt von den Unsicherheiten her, welche früher überhaupt in Bezug auf die letzten Stellen der *Besselschen* Erddimensionen bestanden haben (vgl. S. 207 oben und „Zeitschr. f. Verm. 1885“, S. 24).

Soweit wir im folgenden eigene Berechnungen angeben, haben wir die Zahlen von S. 207 beibehalten, nämlich:

$$\log a = 6.804\,6434\cdot637 \text{ für Meter} \quad (25)$$

$$\log c = 6.806\,0976\cdot435 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad (26)$$

$$\log e^2 = 7.824\,4104\cdot237, \quad \log e'^2 = 7.827\,3187\cdot833 \quad (27)$$

$$\log(1-e^2) = \log \frac{1}{1+e'^2} = 9.997\,0916\cdot404 \quad (28)$$

Damit wollen wir die übrigen Konstanten nach den vorstehenden Formeln ausrechnen. Als willkürliche Annahme wird zu Grunde gelegt:

$$\text{Normal-Kugelbreite } Q = 52^\circ 40' 0'' \quad (29)$$

Damit berechnet man α^2 nach der Reihe (20):

$$\alpha^2 = \left\{ \begin{array}{r} 1,000\,908\,8703 \\ - 2\,8399 \\ + 111 \end{array} \right\}, \quad \alpha^2 = 1,000\,906\,0415$$

$$\log \alpha = 0.000\,1966\cdot553 \quad (30)$$

$$\alpha = 1 + 0,000\,452\,918 \quad \frac{1}{\alpha} = 1 - 0,000\,452\,713 \quad (31)$$

Es folgt die Berechnung von P nach (14); man findet:

$$P = 52^\circ 42' 2,53251'' \quad (32)$$

$$\log \sin P = 9.900\,6297\cdot679, \quad \log \cos P = 9.782\,4573\cdot113$$

Mit $\cos P$ hat man auch:

$$\log e'^2 \cos^2 P = \log \eta^2 = 7.392\,2334\cdot059 \quad (33)$$

und damit kann man geradezu $V^2 = 1 + \eta^2$ berechnen:

$$\log V^2 = 0.001\,0702\cdot432, \quad \log V = 0.000\,5351\cdot216 \quad (34)$$

Zur Probe kann man auch $\log V^2$ nach der Formel (24) S. 211 berechnen, oder $\log V$ durch Interpolation aus der Hilfstafel Seite [47] des Anhangs bestimmen; beides giebt dasselbe Ergebnis wie (34).

Ehe man weiter geht, kann man auch die Probe nach (17), $\alpha \cos Q = V \cos P$ anstellen, welche mit einem Fehler von 0.001 schliesst, der nicht weiter zu verfolgen ist.

Mit $\log V^2$ nach (34) hat man auch nach (16) den Kugelhalbmesser A , die Ausrechnung mit (26) und (34) giebt:

$$\log A = 6.805\,0274\cdot003 \quad (35)$$

Endlich ist auch noch k nach (18) zu berechnen, man hat hiezu $e \sin P = 0,064\,988\,270\,546$ und weiter:

$\log \left(\frac{1 - e \sin P}{1 + e \sin P} \right)^{\frac{\alpha e}{2}}$	9.997 6898·845
$\log \tan^{\alpha} \left(45^{\circ} + \frac{P}{2} \right)$	0.471 9371·856
$\log \cot g \left(45^{\circ} + \frac{Q}{2} \right)$	9.528 7020·994
$\log k$	9.998 3291·195
$\log \frac{1}{k}$	0.001 6708·805
<i>Gauss</i> giebt $\log \frac{1}{k}$	0.001 6708·804

(36)

Hier haben wir die unerhebliche Differenz 0·001 gegen die Angabe von *Gauss* in Art. 6 der „Unt. üb. G. d. h. G.“, während die anderen Konstanten P , $\log \alpha$, $\log A$ nach (32), (30), (35) bis auf die letzte Dezimale mit den Angaben von *Gauss* stimmen.

Dieses ist eine erwünschte Versicherung, dass die Verschiedenheit der Werte $\log e^2$ in (24) und (27) sich in den Konstanten P , α , A und k bei Rechnung mit 10stelligen Logarithmen nicht mehr bemerklich macht; während in den späteren Coefficienten-Berechnungen, wenn der Faktor η^2 auftritt, die kleine Verschiedenheit in den Annahmen von e^2 bzw. e'^2 bemerklich wird.

Wir wollen nun ein Zahlen-Beispiel zur Bestimmung von u und m bei gegebenem q durchrechnen, nach den Formeln (8) und (10) § 86. S. 426, welche im folgenden unter (37) und (38) nochmals hergesetzt sind. Die nachfolgende Berechnung ist nur mit 7 richtigen Logarithmen-Stellen geführt (nebst $\pm 0\cdot25$ nach *Schrön*), das genügt hier, um den Rechnungsgang zu zeigen, der durch die Formeln (37) und (38) vorgezeichnet ist.

$$\tan g \left(45^{\circ} + \frac{u}{2} \right) = \frac{1}{k} \tan g^{\alpha} \left(45^{\circ} + \frac{q}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin q}{1 + e \sin q} \right)^{\frac{\alpha e}{2}} \quad (37)$$

$$q = 49^{\circ} 0' \quad , \quad 45^{\circ} + \frac{q}{2} = 69^{\circ} 30'$$

$$e \sin q = 0,061\,657\,385$$

		$\log e$	8.912 2052·1
		$\log \sin q$	9.877 7798·8
		$\log e \sin q$	8.789 9850·9
		$\log (1 - e \sin q)$	9.972 3614·4
		$\log (1 + e \sin q)$	0.025 9843·8
		$\log \frac{1 - e \sin q}{1 + e \sin q}$	9.946 3770·6-10
		$\log - 0,053 \dots$	-0.053 6229·4
		$\log (0,5 \alpha e)$	8.729 3506·4
			8.611 3718·7
		$\log (0,5 \alpha e \log - 0,053 \dots)$	7.340 7225·1
		$\log \left(\frac{1 - e \sin q}{1 + e \sin q} \right)^{\frac{\alpha e}{2}}$	-0.002 1914·0
			9.997 8086·0
		$\log \tan^{\alpha} \left(45^{\circ} + \frac{q}{2} \right)$	0.427 4558·4
		$\log \frac{1}{k}$	0.001 6708·8
		$\log \tan g \left(45^{\circ} + \frac{u}{2} \right)$	0.426 9353·2
$\log \tan g \left(45^{\circ} + \frac{q}{2} \right)$	0.427 2623·2		
$\log (\log \tan g \dots)$	9.630 6945·9		
$\log \alpha$	0.000 1966·6		
$\log (\alpha \log \tan g \dots)$	9.630 8912·5		
$\alpha \log \tan g \dots$	0.427 4558·4		

$$45^{\circ} + \frac{u}{2} = 69^{\circ} 29' \quad 9,04''$$

$$\frac{u}{2} = 24^{\circ} 29' \quad 9,04''$$

$$u = 48^{\circ} 58' \quad 18,08''$$

$$\text{Vergrößerungs-Verhältniss } m = \frac{A}{c} \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} V \quad (38)$$

	$\log A$	6.805 0274.0
	<i>Erg. log c</i>	3.193 9023.6
für $\varphi = 49^\circ$ nach der Hilfstafel S. [47]	$\log V$	0.000 6270.9
	$\log \alpha$	0.000 1966.6
	$\log \cos u$	9.817 1896.8
	<i>Erg. log cos φ</i>	0.183 0570.8
		0.000 0002.7

Das Ergebnis dieser Rechnung ist also:

$$\varphi = 49^\circ 0' 0'' \quad u = 48^\circ 58' 18,08'' \quad \log m = 0.000 0002.7 \quad (39)$$

Die genaueren Werte hiefür, welche man aus der Hilfstafel Seite [42] des Anhangs durch Interpolation finden kann, sind:

$$\varphi = 49^\circ 0' 0'' \quad u = 48^\circ 58' 18,0784'' \quad \log m = 0.000 0002.48 \quad (40)$$

Die Übereinstimmung zwischen (39) und (40) ist insofern hinreichend, als die Werte u und $\log m$ von (39) nur mit 7 stelligen Logarithmen (± 0.25) gerechnet sind.

Diese Rechnung haben wir nur zur Veranschaulichung des Rechnungsganges hier hergesetzt, um zu zeigen, dass die Rechnung nach den geschlossenen Formeln (37) und (38) *umständlich* und verhältnismässig *ungenau* ist.

Ein besseres Rechnungs-Verfahren erhält man durch Reihen-Entwicklungen, zu welchen wir nun übergehen.

Anhang zu § 87.

Einführung von goniometrischen Hilfs-Grössen.

Unsere vorstehenden Entwicklungen und Berechnungen zur Bestimmung der Konstanten in den Grundformeln sind *sachlich* nichts anderes, als was *Gauss* in Art. 3.—5. der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abhandlung“ gegeben hat. In der *Form* aber sind wir von *Gauss* abgewichen, indem wir die bisherigen Bezeichnungen unseres Buches, namentlich $V^2 = 1 + \eta^2$ mit $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ beibehielten, und dann die Ausrechnung auf dem zuerst sich darbietenden Wege machten; und da wir damit den *Gauss*schen Zahlenwerten innerhalb der Genauigkeit 10 stelliger Logarithmen-Rechnung gleichgekommen sind, wäre nichts weiter zu bemerken.

Nun hat aber *Gauss* in Art. 4. der „Untersuchungen“ u. s. w. eine Gruppe von goniometrischen Hilfsgrössen, $\varphi, \zeta, \eta, \Theta$ eingeführt, welche dazu dienen sollen, die logarithmischen Rechnungen bequemer und schärfer zu machen, deren Zusammenhang unter sich und mit den übrigen Grössen c, P, Q nicht sofort einzusehen ist.

Dieser Zusammenhang ist uns durch eine sphärische Figur am besten klar geworden, welche wir in nachstehender Figur 1. nebst den zugehörigen Gleichungen mitteilen, um dem Anfänger beim Lesen von Art. 4. der „Untersuchungen“ behilflich zu sein.

Dabei behalten wir die *Gauss*sche Nummerierung der Gleichungen bei, indem z. B. (13_a), (14_a) u. s. w. die Nummern (13), (14) u. s. w. der *Gauss*schen Original-Abhandlung „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abhandlung“ bedeuten.

Es wird zuerst ein Hilfswinkel φ eingeführt durch die Gleichung:

$$\sin \varphi = e \quad (18_a)$$

damit wird:

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} = \tan^2 \varphi$$

Dann wegen (22_a) und (13_a):

$$\sin(2\zeta - \varphi) = e \cos 2Q = \sin \varphi \cos 2Q \quad (21_a)$$

Aus den Dreiecken ABC und BCF findet man:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \sin \alpha \cos \Theta \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin(90^\circ - \zeta) \cos \eta \end{aligned}$$

und durch Elimination von α :

$$\cos \varphi = \cos \zeta \cos \eta \cos \Theta \quad (23_a)$$

Unser V^2 lässt sich ebenfalls in φ und Θ ausdrücken. Nach (16) ist:

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 P = \frac{1 - e^2 \sin^2 P}{1 - e^2} = \frac{\cos^2 \Theta}{\cos^2 \varphi}$$

nach (10) S. 206:

$$a = c \sqrt{1 - e^2} = c \cos \varphi, \quad A = \frac{c}{V^2}, \text{ also:}$$

$$A = \frac{a \cos \varphi}{\cos^2 \Theta}$$

Der Hilfswinkel Θ von (22_a), nämlich $\sin \Theta = e \sin P$, giebt auch eine Umformung für k nach (18), nämlich:

$$\frac{1 - e \sin P}{1 + e \sin P} = \frac{1 - \sin \Theta}{1 + \sin \Theta} = \cot g^2 \left(\frac{90^\circ + \Theta}{2} \right)$$

folglich k nach (18):

$$k = \frac{\tan g^\alpha (45^\circ + \frac{1}{2} P)}{\tan g (45^\circ + \frac{1}{2} Q) \tan g^{\alpha e} (45^\circ + \frac{1}{2} \Theta)}$$

Wir werden im nachfolgenden die goniometrischen Hilfsgrößen nicht anwenden, merken uns aber zum Umsetzen unserer Bezeichnungen in jene, hauptsächlich die oben gefundene Beziehung:

$$\frac{\cos \varphi}{\cos \Theta} = \frac{1}{V}.$$

§ 88. Reihen-Entwicklung für die Breiten-Differenz.

Die Beziehung zwischen der Breite φ auf dem Ellipsoid und der zugehörigen Breite u auf der Kugel ist zwar durch die Gleichung (8) § 86. S. 426 gegeben, welche zu jedem Werte φ den zugehörigen Wert u berechnen lässt; allein mancherlei Bedürfnisse werden dadurch doch nicht befriedigt; erstens ist jene geschlossene Formel zur Rechnung überhaupt unbequem (vgl. das Zahlenbeispiel S. 431—432), und kann zur Auflösung nach φ bei gegebenem u nur etwa *indirekt* benützt werden. Dieses und andere Gründe machen eine Reihen-Entwicklung erwünscht.

Da auf dem Ellipsoid eine Normalbreite P und auf der Kugel eine Normalbreite Q angenommen wurde, sollen die Breiten allgemein durch ihre Differenzen gegen P und Q ausgedrückt werden, d. h. wir setzen (nach S. 427):

$$\text{Ellipsoid} \quad \varphi = P + p \quad (1)$$

$$\text{Kugel} \quad u = Q + q \quad (2)$$

Da die Beziehung zwischen P und Q bekannt ist, handelt es sich jetzt nur noch um eine Beziehung zwischen p und q , welche in zwei Formen aufgestellt werden kann, nämlich:

$$\text{entweder:} \quad p = \frac{d\varphi}{du} \left] q + \frac{d^2\varphi}{du^2} \right] \frac{q^2}{2} + \frac{d^3\varphi}{du^3} \right] \frac{q^3}{6} \quad (3)$$

$$\text{oder:} \quad q = \frac{du}{d\varphi} \left] p + \frac{d^2u}{d\varphi^2} \right] \frac{p^2}{2} + \frac{d^3u}{d\varphi^3} \right] \frac{p^3}{6} \quad (4)$$

Dabei soll, wie immer im folgenden, das Zeichen] andeuten, dass nach Ausführung der Differentiierungen, $p = 0$ und $q = 0$, oder $\varphi = P$ und $u = Q$ zu setzen sei.

Wir wollen zuerst die Form (4) vornehmen, und haben hiezu von (6) § 86. S. 426:

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{V^2} \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \quad (5)$$

Hiebei ist:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 + \eta^2} \quad (6)$$

$$\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{\eta^2}{V} t \quad (t = \tan \varphi) \quad (7)$$

$$\frac{dV^n}{d\varphi} = -n\eta^2 V^{n-2} t \quad \text{und} \quad \frac{d\eta^n}{d\varphi} = -n\eta^n t \quad (8)$$

Dieses haben wir, weil es wiederholt gebraucht wird, vorausgeschickt, und nehmen die ebenfalls mehrfach vorkommende Ableitung des zweiten Faktors von (5) besonders:

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \right) = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left(-\alpha \sin u \frac{du}{d\varphi} \cos \varphi + \alpha \cos u \sin \varphi \right) \quad (9)$$

Setzt man hier (5) ein, und berücksichtigt $V^2 = 1 + \eta^2$ nach (6), so bekommt man:

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \right) = \frac{1}{V^2} \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \left(-\frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} + t + \eta^2 t \right) \quad (10)$$

Wenn man nun (5) nochmals ableitet, so hat man zuerst wegen (8):

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = \frac{2\eta^2}{V^4} t \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} + \frac{1}{V^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \right)$$

Setzt man den bereits in (9) vorbereiteten Wert ein, so erhält man:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = \frac{1}{V^4} \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \left(t + 3\eta^2 t - \frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} \right) \quad (11)$$

Als Vorbereitung der nächsten Ableitung hievon behandeln wir zuerst den letzten Teil, und finden in ähnlicher Weise wie oben bei (9) und (10):

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} \right) = \frac{1}{V^2} \left(\left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \right)^2 + \frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} t (1 + \eta^2) \right) \quad (12)$$

Nun giebt (11) weiter:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3 u}{d\varphi^3} &= \frac{4\eta^2}{V^6} t \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \left(t + 3\eta^2 t - \frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} \right) \\ &+ \frac{1}{V^4} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \right) \left(t + 3\eta^2 t - \frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} \right) \\ &+ \frac{1}{V^4} \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \left((1 + t^2) - 6\eta^2 t^2 + 3\eta^2 (1 + t^2) - \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} \right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Da wir bei der dritten Potenz stehen bleiben wollen, handelt es sich jetzt darum, alle die Substitutionen zu machen, welche bei (3) und (4) durch] angedeutet sind, d. h. $\varphi = P$, $u = Q$ zu setzen. Es ist aber nach (14) und (17) § 87. S. 428 bis 429, $\alpha \sin Q = \sin P$ und $\alpha \cos Q = V \cos P$, und daraus folgt:

$$\left[\frac{\alpha \sin u}{\sin \varphi} \right] = 1 \quad \left[\frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} \right] = t \quad \left[\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \right] = V \quad (14)$$

und dieses in (10) und (12) gesetzt, giebt (da $V^2 = 1 + \eta^2$ ist):

$$\frac{d}{dq} \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} = \frac{\eta^2 t}{V} \quad \frac{d}{dq} \frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} = 1 + t^2 \quad (15)$$

Wenn man diese (14) und (15) in den drei allgemeinen Ableitungen (5), (11) und (13) einsetzt, so ziehen sich diese Ableitungen sehr zusammen, und wenn man alles gleichartige zusammen ordnet, so erhält man:

$$\frac{du}{dq} = \frac{1}{V} \quad , \quad \frac{d^2 u}{dq^2} = \frac{3 \eta^2}{V^3} t \quad (16)$$

$$\frac{d^3 u}{dq^3} = \frac{3 \eta^2}{V^5} (1 - t^2 + \eta^2 + 4 \eta^2 t^2) \quad (17)$$

Mit diesen (16) und (17) kann man die Formel (4) zusammensetzen:

$$q = \frac{1}{V} p + \frac{3}{2} \frac{\eta^2 t}{V^3} p^2 + \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{V^5} (1 - t^2 + \eta^2 + 4 \eta^2 t^2) p^3 \quad (18)$$

Auf ähnlichem Wege wie diese Reihe, welche nach Potenzen von p fortschreitet, kann man auch die Reihe (3) bestimmen, welche nach Potenzen von q fortschreitet und p bestimmt; indessen, wenn wir nicht weiter als bis zur dritten Ordnung gehen, bekommen wir die umgekehrte Reihe viel einfacher, wenn wir geradezu die Reihe (18) stufenweise umkehren (vgl. (50)–(52) S. 203). In erster Näherung giebt (18):

$$p = qV + q^2 \dots \quad , \quad p^2 = q^2 V^2 + q^3 \dots$$

$$p = qV - \frac{3}{2} q^2 \eta^2 t \quad , \quad p^2 = q^2 V^2 - 3 q^3 V \eta^2 t +$$

Dieses p^2 und $p^3 = q^3 V^3$, in (18) eingesetzt, und alles nach gleichen Potenzen geordnet, giebt sofort:

$$p = qV - \frac{3}{2} \eta^2 q^2 t + \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{V} (-1 + t^2 - \eta^2 + 5 \eta^2 t^2) q^3 \quad (19)$$

In den Reihen (18) und (19) sind p und q in analytischem Masse verstanden; wir wollen nun statt dessen die unabhängige Veränderliche p in (18), q in (19) in Graden, und die Funktion q oder p in Sekunden zählen; dann nehmen die Reihen (18) und (19) folgende Formen an:

$$q = \frac{3600}{V} p + \frac{3600}{\rho^{\circ 2}} \frac{3}{2} \frac{\eta^2 t}{V^3} p^2 - \frac{3600}{\rho^{\circ 2}} \frac{\eta^2}{2 V^5} (-1 + t^2 - \eta^2 + 4 \eta^2 t^2) p^3 \quad (20)$$

$$p = 3600 V q - \frac{3600}{\rho^{\circ 2}} \frac{3}{2} \eta^2 t q^2 + \frac{3600}{\rho^{\circ 2}} \frac{\eta^2}{2 V} (-1 + t^2 - \eta^2 + 5 \eta^2 t^2) q^3 \quad (21)$$

Wenn man hier die Coëfficienten mit den Konstanten von § 87. ausrechnet, so bekommt man:

$$q = 3595,566 \ 945 p + 0,304 \ 138 \ 6587 p^2 - 0,000 \ 946 \ 265 \ 801 p^3 + \dots \quad (22)$$

$$p = 3604,438 \ 521 q - 0,305 \ 264 \ 9836 q^2 + 0,001 \ 002 \ 642 \ 525 q^3 + \dots \quad (23)$$

Wenn man diese Reihen als konvergierend und mit der dritten Potenz abbrechend behandeln will, so braucht man natürlich die Coëfficienten nicht mit so vielen Stellen; wir haben jedoch viele Stellen ausgerechnet zur Vergleichung mit den Zahlenangaben von Gauss, welcher in Art. 6. und Art. 8. die Reihen bis zur fünften Potenz ausgeführt giebt. Insbesondere die zur Tafel-Berechnung von Gauss angegebene Reihe von Art. 8. ist:

$$\left. \begin{aligned}
 p - q &= 443,852\,122 \frac{q}{100} \\
 &- 3052,649\,780 \left(\frac{q}{100}\right)^2 \quad [3.484\,6769\cdot820] \\
 &+ 1002,642\,506 \left(\frac{q}{100}\right)^3 \quad [3.001\,1461\cdot121] \\
 &+ 4119,589\,282 \left(\frac{q}{100}\right)^4 \quad [3.614\,8539\cdot196] \\
 &- 431,181\,623 \left(\frac{q}{100}\right)^5 \quad [2.634\,661]
 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Die Anwendung dieser Reihe auf $q = -7^\circ$ und $q = +7^\circ$ giebt:

$$\begin{array}{rcl}
 u = Q + q & = 45^\circ 40' 0'' & 59^\circ 40' 0'' \\
 q & = -7^\circ & q = +7^\circ \\
 \text{---} 31,069\,965'' & & + 31,069\,965'' \\
 \text{---} 14,957\,984 & & \text{---} 14,957\,984 \\
 \text{---} 0,343\,906 & & + 0,343\,906 \\
 + 0,098\,911 & & + 0,098\,911 \\
 + 0,000\,725 & & \text{---} 0,000\,725
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 p - q & = \text{---} 46,272\,219 & + 16,554\,073 \\
 p = -7^\circ 0' & 46,272\,219'' & , \quad + 7^\circ 0' 16,554\,073''
 \end{array}$$

hiez u

$$P = 52^\circ 42' 2,53251'' \quad , \quad 52^\circ 42' 2,53251''$$

$$q = P + p = 45^\circ 41' 16,26029'' \quad 59^\circ 42' 19,08658''$$

Diese Werte liegen bereits jenseits der Grenzen der *Gauss*schen Tafel, von der wir einen an den Grenzen etwas erweiterten Auszug auf Seite [42]—[43] des Anhangs gegeben haben.

Da das letzte Berechnungsglied immer noch 0,0007'' ausmacht, und die Konvergenz nicht sehr stark ist, kann man schliessen, dass für die Genauigkeit von 0,00001'', welche *Gauss* seiner Tafel gegeben hat, die Werte $q = -7^\circ$ und $q = +7^\circ$ als äusserste Grenzen zu betrachten sind.

§ 89. Reihen-Entwicklung für das Vergrößerungs-Verhältnis.

Das Vergrößerungs-Verhältnis ist nach (10) § 86. S. 426:

$$m = \frac{A}{c} \frac{\alpha \cos u}{\cos q} \quad (1)$$

In der Normalbreite $q = P$ (und $u = Q$) ist dieses Verhältnis $m = 1$; und wenn, wie bisher, irgend eine Breite auf der Kugel $u = Q + q$ gesetzt wird, so wird für irgend eine solche Breite sich das Verhältnis m als Funktion von q darstellen lassen, oder die Reihe für $\log m$ habe zunächst diese Form:

$$\log m = \frac{d \log m}{d q} \Big] q + \frac{d^2 \log m}{d q^2} \Big] \frac{q^2}{2} + \frac{d^3 \log m}{d q^3} \Big] \frac{q^3}{6} + \dots \quad (2)$$

Da aber die beiden ersten Ableitungen von $\log m$ gleich Null gesetzt wurden ((4) und (5) § 87. S. 428), so zieht sich (2) zusammen auf:

$$\log m = \frac{d^3 \log m}{d q^3} \Big] \frac{q^3}{6} + \dots \quad (3)$$

Hiezu haben wir von (10) § 87. S. 428:

$$\frac{d^2 \log m}{d u^2} = \frac{-\alpha^2 + V^2 \cos^2 \varphi + \alpha \sin \varphi \sin u}{\alpha^2 \cos^2 u} = \frac{Z}{N} \quad (4)$$

Dieses haben wir in vorübergehender Weise mit $Z:N$ bezeichnet, um durch Z den Zähler, durch N den Nenner auszudrücken, und damit wird:

$$\frac{d^3 \log m}{d u^3} = \frac{1}{N^2} \left(\frac{dZ}{du} N - \frac{dN}{du} Z \right) \quad (5)$$

Allein wenn man nachher wieder die Substitutionen für die Normalbreiten Q und P nach (14) § 88. S. 435 zu machen hat, wird man finden, dass der Zähler Z in (4) verschwindet, es bleibt also nur von (5):

$$\frac{d^3 \log m}{d u^3} = \frac{1}{N} \frac{dZ}{du} \quad (6)$$

Da auch α konstant ist, handelt es sich also nur noch um die Ableitung:

$$\frac{d}{du} (V^2 \cos^2 \varphi + \alpha \sin \varphi \sin u)$$

Dieses giebt:

$$\left(2V \frac{dV}{d\varphi} \cos^2 \varphi - 2V^2 \cos \varphi \sin \varphi \right) \frac{d\varphi}{du} + \alpha \cos \varphi \frac{d\varphi}{du} \sin u + \alpha \sin \varphi \cos u \quad (7)$$

Dabei ist nach (8) und (7) § 87. S. 428 zu beachten:

$$\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{\eta^2}{V} t \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{du} = \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u}$$

Dieses in (7) eingesetzt giebt:

$$(-2\eta^2 t \cos^2 \varphi - 2V^2 \cos \varphi \sin \varphi) \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} + \alpha \cos \varphi \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} \sin u + \alpha \sin \varphi \cos u$$

Nun muss man wieder die Substitutionen (14) § 88. S. 435 machen, und wenn man gleichzeitig den Nenner $N = \alpha^2 \cos^2 u$ zusetzt, so bekommt man nach (6) (mit $\tan \varphi = t$):

$$\frac{d^3 \log m}{d u^3} = -\frac{2\eta^2}{V} t - 2Vt + \frac{1}{V} t + \frac{1}{V} t$$

und mit $V^2 = 1 + \eta^2$ zieht sich dieses zusammen auf:

$$\frac{d^3 \log m}{d u^3} = -\frac{4\eta^2}{V} t \quad (8)$$

und die Reihe für $\log m$ ist daher nach (3):

$$\log m = -\frac{2\eta^2}{3V} t q^3 + q^4 \dots \quad (9)$$

Wenn man hiebei stehen bleiben will, d. h. wenn man q^4 und p^4 vernachlässigen will, so kann man leicht auch $\log m$ in p^3 ausdrücken, denn da nach (19) § 88. S. 436 in erster Näherung $p = qV$ ist, kann man (9) auch so schreiben:

$$\log m = -\frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V^4} t p^3 + \dots \quad (10)$$

In (9) und (10) bedeutet \log den natürlichen Logarithmus; will man also Briggsche Logarithmen haben, so muss man noch den Modulus μ zusetzen, und wenn man zugleich die Formeln für q oder p in Graden einrichten will, so muss man noch mit $q^{\circ 3}$ dividieren; d. h. man erhält aus (9):

$$\log m = -\frac{\mu}{\rho^3} \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} t q^3 \quad (11)$$

Die Ausrechnung mit den Konstanten von (25) — (28) § 87. S. 430 giebt für Einheiten der siebenten Logarithmenstelle:

$$\log m = -0.049\,796\,165\,q^3 + \dots \quad (12)$$

Auf gleiche Weise erhält man von (10):

$$\log m = -0.049\,612\,434\,p^3 + \dots \quad (13)$$

In Art. 7. und Art. 9. der „Unters. üb. G. d. h. G.“ hat Gauss diese Entwicklungen bis zur sechsten Potenz fortgesetzt, und die darnach berechneten Werte $\log m$ sind in unserer Tafel Seite [42] — [43] mitgeteilt.

Es ist dazu zu bemerken, dass die mit der dritten Potenz abbrechende Formel (12) nur etwa bis zu Abständen $q = \pm 2^\circ$, also für die Zone von $50^\circ 40'$ bis $54^\circ 40'$ ausreicht, wenn man $\log m$ auf 0.001 genau haben will, während weiter hinaus die in (12) weggelassenen Glieder mit q^4 , q^5 , q^6 sehr bemerklich werden, wie aus folgender Zusammenstellung zu erschen ist.

u	$\log m$	$-0.049796\,q^3$	$\log m$	u
$52^\circ 40'$	$+ 0.000$	± 0.000	$- 0.000$	$52^\circ 40'$
$51^\circ 40'$	$+ 0.050$	± 0.050	$- 0.050$	$53^\circ 40'$
$50^\circ 40'$	$+ 0.396$	± 0.397	$- 0.401$	$54^\circ 40'$
$48^\circ 40'$	$+ 3.148$	± 3.175	$- 3.231$	$56^\circ 40'$
$46^\circ 40'$	$+ 10.559$	± 10.716	$- 10.990$	$58^\circ 40'$
Formel (13)				

Dabei stehen in den mit $\log m$ überschriebenen Spalten die *genauen* Werte von $\log m$, welche zu vergleichen sind mit den in der mittleren Spalte enthaltenen Näherungswerten nach Formel (13).

Bisher haben wir immer nur $\log m$ behandelt, eine Formel für m selbst erhalten wir, da in (9) und (10) natürliche Logarithmen gelten, sehr einfach hieraus:

$$m = 1 - \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} t q^3 + \dots \quad \text{oder} \quad m = 1 - \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V^4} t p^3 \quad (15)$$

Das Vergrößerungs-Verhältnis m gilt zunächst nur im differentialen Sinne, d. h. wenn ds eine kleine Strecke auf dem Ellipsoid ist, so ist $m ds = ds'$ die entsprechende Abbildung auf der Kugel, und wenn es sich um eine ausgedehnte Strecke s handelt, so ist zu rechnen:

$$s' = \int m ds = s - \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V^4} t \int p^3 ds \quad (16)$$

$$\text{oder} \quad s' = \int m ds = s - \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} t \int q^3 ds \quad (17)$$

Da wir dieses nur genähert ausrechnen wollen, so sind uns die beiden Formen (16) und (17) gleichwertig, wir vernachlässigen dabei in dem Integral von (17) einen Faktor m (indem wir ds statt ds' schreiben), und im ganzen vernachlässigen wir auch den Umstand, dass die geodätische Linie sich nicht genau in einem Grosskreisbogen abbildet (was im nachfolgenden § 90. ausführlicher erörtert werden wird), und wir werden nun (17) dadurch integrieren, dass wir q als Funktion von s darstellen.

Zu diesem Zwecke zählen wir die Breiten-Differenzen q von einem Werte q_0 an, welcher der *Mitte* des ganzen Bogens s entspricht, und die Länge des Bogens s selbst zählen wir ebenfalls von der Mitte an mit $+x$ in dem Azimut β_0 und mit $-x$ in der Gegenrichtung.

Da der Kugelhalbmesser $= A$ ist, haben wir nach (8) S. 313 mit den angenommenen Bezeichnungen die Breiten-Differenz:

$$q - q_0 = \frac{x}{A} \cos \beta_0 - \frac{x^2}{2 A^2} \sin^2 \beta_0 \tan g (Q + q_0)$$

Es genügt für das folgende zu wissen, dass dieses eine quadratische Funktion von x ist, weshalb wir mit abkürzenden Coefficienten-Bezeichnungen schreiben:

$$q = q_0 + f x + g x^2 + \dots$$

Auch q^3 wird in erster Näherung eine quadratische Funktion von x sein, und sich so darstellen lassen:

$$q^3 = q_0^3 + f' x + g' x^2 + \dots \quad (18)$$

Für den Anfangspunkt mit $x = -\frac{s}{2}$ soll $q = q_1$ sein, und für den Endpunkt mit $x = +\frac{s}{2}$ soll $q = q_2$ sein, d. h.:

$$q_1^3 = q_0^3 - f' \frac{s}{2} + g' \frac{s^2}{4} \quad (19)$$

$$q_2^3 = q_0^3 + f' \frac{s}{2} + g' \frac{s^2}{4} \quad (20)$$

Nun giebt das in (17) gebrauchte Integral mit Einsetzung von (18), indem für ds das allgemeinere dx geschrieben wird:

$$\int q^3 dx = q_0^3 x + f' \frac{x^2}{2} + g' \frac{x^3}{3}$$

Diese Integration ist zu nehmen zwischen den Grenzen $x = -\frac{s}{2}$ und $x = +\frac{s}{2}$ und giebt damit, wenn wir das bestimmte Integral mit J bezeichnen:

$$J = q_0^3 s + g' \frac{s^3}{12}$$

Dieses lässt sich aber in (19) und (20) ausdrücken, denn es ist:

$$\frac{q_1^3 + 4 q_0^3 + q_2^3}{6} s = \left(q_0^3 + g' \frac{s^2}{12} \right) s = J \quad (21)$$

Das ist der in (17) einzusetzende Integralwert, und indem wir nun den drei Werten q_1, q_0, q_2 entsprechend, auch drei Werte m_1, m_0, m_2 nach (15) einführen, nämlich:

$$m_1 = 1 - \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} t q_1^2, \quad m_0 = 1 - \frac{2}{3} \frac{\eta}{V} t q_0^3, \quad m_2 = 1 - \frac{2}{3} \frac{\eta}{V} t q_2^3 \quad (22)$$

erhalten wir durch Einsetzen von (21) und (22) in (17):

$$s' = s \left(1 - \frac{m_1 + 4 m_0 + m_2}{6} \right) \quad (23)$$

Es wird also zur Reduktion von s auf s' ein gewisser Mittelwert des Vergrößerungsverhältnisses m angewendet, welcher dadurch entsteht, dass der Wert m_0 für die *Mitte* der Linie mit 4 fachem Gewicht nebst m_1 und m_2 für die Endpunkte je mit 1 fachem Gewicht zusammen genommen werden.

Die Rechnung nach der Formel (20) setzt voraus, dass nach (18) die Masse α oder s klein seien im Verhältnis zu q , und ausserdem, dass höhere Potenzen als q^3 in (15) zu vernachlässigen sind. Dass letzteres nur mit gewisser Beschränkung der Genauigkeit zulässig ist, haben wir in der tabellarischen Übersicht (14) gezeigt.

Da also die Voraussetzungen, auf welchen die Formel (23) beruht, nur teilweise erfüllt sind, so ist es in vielen Fällen auch hinreichend, schlechthin einen Mittelwert aus den beiden Endwerten m_1 und m_2 zu nehmen, also:

$$\frac{\log m_1 + \log m_2}{2} = \log m. \quad (24)$$

§ 90. Azimut-Reduktion.

In nebenstehender Fig. 1., welche sich auf die Kugel bezieht, betrachten wir zwei von dem Ellipsoid herübergetragene Punkte mit den Kugelbreiten u und u' und dem Längen-Unterschied αl . Der mit K bezeichnete Verbindungsbogen sei grösster Kreisbogen der Kugel, und ausserdem haben wir eine Kurve G gezogen, welche das konforme Abbild der geodätischen Linie auf dem Ellipsoid ist.

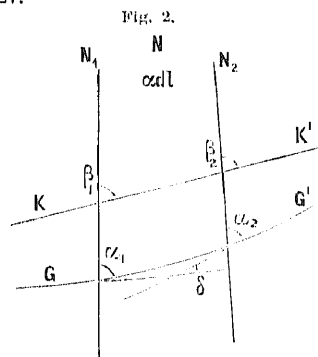
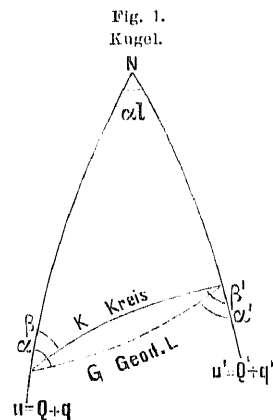
Eine geodätische Linie des Ellipsoids bildet sich nämlich im allgemeinen nicht als Grosskreisbogen der Kugel ab, und es handelt sich nun darum, die Azimut-Differenzen $\alpha - \beta$ und $\beta' - \alpha'$ zwischen dem Abbild G der geodätischen Linie und dem Grosskreisbogen K zu bestimmen, wobei zu bemerken ist, dass die Azimute α und α' der geodätischen Linie richtig auf die Kugel übergehen, vermöge des Prinzips der konformen Abbildung. Die Azimute $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ der nebenstehenden Figur sind dieselben wie die gleich bezeichneten Azimute α, α' und β, β' in den früheren Fig. 3. und Fig. 4. § 86. S. 427.

Wir betrachten nun mit Fig. 2. die Meridian-Konvergenz $\alpha_2 - \alpha_1$ für ein kleines Stück des Abbildes der geodätischen Linie, und die Meridian-Konvergenz $\beta_2 - \beta_1$ für ein entsprechendes, zwischen denselben Meridianen liegendes Stück des Kreisbogens. Wenn dl der Längenunterschied auf dem Ellipsoid, also αdl der entsprechende Längenunterschied auf der Kugel ist, wobei α die Längen-Reduktionskonstante*) nach (15) § 87. S. 428 ist, so bestehen folgende zwei Differential-Gleichungen:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = dl \sin \varphi \quad (1)$$

$$\beta_2 - \beta_1 = \alpha dl \sin u \quad (2)$$

*) Wir benützen das Zeichen α hier in zweifacher Bedeutung, erstens als Azimut der geodätischen Linie und zweitens als Reduktions-Konstante für die Längen-Unterschiede l ; dieser kleine Missstand, welcher zu Verwechslungen nicht wohl führen kann, da wir hier darauf aufmerksam machen, ist entstanden aus dem Wunsche, die Fundamental-Bezeichnungen der klassischen Abhandlung von Gauss, und damit jene Längen-Konstante α , beizubehalten.



Also die Differenz:

$$\delta = (\beta_2 - \beta_1) - (\alpha_2 - \alpha_1) = dl (\alpha \sin u - \sin \varphi) \quad (3)$$

Nun kann man zeigen, dass diese Differenz δ die *Krümmung* des Bogens G in Fig. 2. ist, vorausgesetzt, dass alle drei anderen Linien des kleinen Vierecks gerade seien. Es ist nämlich die Winkelsumme des kleinen Vierecks von Fig. 2.:

$(180^\circ - \beta_1) + \beta_2 + (180^\circ - \alpha_2) + \alpha_1 = 360^\circ + (\beta_2 - \beta_1) - (\alpha_2 - \alpha_1) = 360^\circ + \delta$ (4)
und dieses stimmt mit dem in Fig. 2. eingeschriebenen Winkel δ .

Man beachte hiebei, dass alle drei anderen Seiten des kleinen Vierecks Fig. 2. ausser G , grösste Kreisbögen sind, der Queraabstand y der Linien K und G wird sich nachher als sehr klein, nur von der Ordnung $\eta^2 s^2 q^2$ zeigen, und deswegen kommt der sphärische Excess des kleinen Vierecks, mit G als Grosskreisbogen, d. h. die Flächenkrümmung neben der Linienkrümmung, nicht in Betracht, oder kurz: Wir können den kleinen Winkel δ nach (3) als Mass der *relativen Krümmung* der Kurve G gegen den Kreisbogen K betrachten, und deswegen mit Annahme eines rechtwinkligen Koordinaten-Systems x, y nach Fig. 3. setzen:

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\delta}{dx} = (\alpha \sin u - \sin \varphi) \frac{dl}{dx} \quad (5)$$

Fig. 3.



Dabei mussten wir links — schreiben, wenn δ in Fig. 2. positiv sein soll, weil bei einem Koordinaten-System wie Fig. 3. die Kurve L' gegen die x -Axe konkav ist, wenn der zweite Differential-Quotient $\frac{d^2 y}{dx^2}$ negativ ist.

Wenn etwa die Kurve G nicht so verlief, wie in Fig. 3. und in der dazu gehörigen Gleichung (5) angenommen ist, so würden nachher die kleinen Winkel ψ_1 und ψ_2 *negativ* herauskommen müssen.

Nun kommt es zuerst darauf an, die Funktion $\alpha \sin u - \sin \varphi$ zu entwickeln, und dazu haben wir nach Fig. 3. und Fig. 4. § 86. S. 427:

$$\varphi = P + p \quad u = Q + q \quad (6)$$

also:

$$\sin \varphi = \sin P + p \cos P - \frac{p^2}{2} \sin P \quad (7)$$

$$\alpha \sin u = \alpha \sin Q + \alpha q \cos Q - \alpha \frac{q^2}{2} \sin Q \quad (8)$$

Zur Vergleichung zwischen p und q hat man nach (18) § 88. S. 436 die Reihe:

$$q = \frac{p}{V} + \frac{3}{2} \frac{\eta^2}{V^3} p^2 \tan P \quad (9)$$

Zugleich beachte man auch die Grundformeln für P und Q nach (14) und (17) § 87. S. 428—429:

$$\alpha \sin Q = \sin P \quad \text{und} \quad \alpha \cos Q = V \cos P \quad (10)$$

Wenn man nun die Differenz von (7) und (8) bildet, dabei (9) und (10) einsetzt, und auch $V^2 = 1 + \eta^2$ beachtet, so bekommt man:

$$\alpha \sin u - \sin \varphi = \frac{2\eta^2}{V^2} p^2 \sin P \quad (11)$$

Nun zu (5) zurückkehrend, brauchen wir weiter von (6) und (4) § 78. S. 387:

$$dl = \frac{ds \sin \alpha}{N \cos \varphi} \quad \text{wobei} \quad ds = \frac{dx}{m} \quad (12)$$

Das hier gebrauchte Vergrößerungs-Verhältnis m ist nach (15) § 89. S. 439:

$$m = 1 - \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V^4} \tan^2 P p^2 \quad (13)$$

Es genügt jedoch hier, in erster Näherung $m = 1$ zu setzen, wodurch auch die geodätische Linie s auf dem Ellipsoid und der entsprechende Bogen s' auf der Kugel als gleich lang angenommen werden. Damit geben (11) und (12) in (5) eingesetzt:

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2\eta^2 \sin P \sin \alpha}{V^2 \cos \varphi N} p^2 \quad (14)$$

Wir dürfen hier auch noch $\varphi = P$ setzen, weil Glieder von der Ordnung p^3 ohnehin schon in (11) vernachlässigt sind; und indem wir nach (9) mit $p = qV$, auf q übergehen, haben wir von (14):

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2\eta^2}{N} t \sin \alpha q^2 \quad (t = \tan P) \quad (15)$$

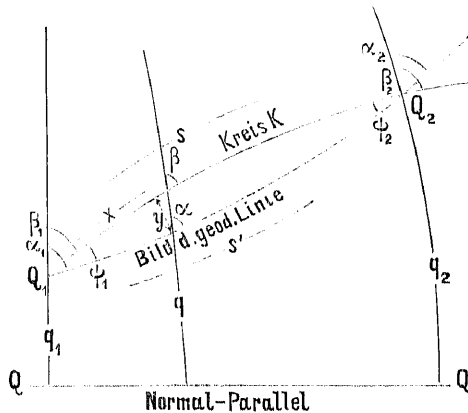
$$\text{oder:} \quad -\frac{d^2 y}{dx^2} = I' \sin \alpha q^2 \quad \text{wo } I' = \frac{2\eta^2}{N} t \quad (15a)$$

Um auf x überzugehen, haben wir in erster Näherung nach Fig. 4. zu setzen:

$$q = q_1 + \frac{x}{A} \cos \beta_1 + \dots$$

$$\text{also:} \quad q^2 = q_1^2 + 2q_1 \frac{x}{A} \cos \beta_1 \quad (16)$$

Fig. 4.



Hiebei ist q_1 derjenige Wert von q , welcher zu dem Anfangspunkt Q_1 gehört, und q_2 derjenige Wert von q , welcher zu dem Endpunkte Q_2 des betrachteten Bogens s gehört. In gleicher Weise haben wir auch für das Azimut β , welches der Breite q und der Abszisse x entspricht, nach (15) S. 315:

$$\beta = \beta_1 + \frac{x}{A} \sin \beta_1 t_1, \quad \sin \beta = \sin \beta_1 + \frac{x}{A} \sin \beta_1 \cos \beta_1 t_1 \quad (17)$$

Man hat also aus (16) und (17):

$$q^2 \sin \beta = q_1^2 \sin \beta_1 + \frac{\alpha}{A} (2 q_1 \sin \beta_1 \cos \beta_1 + q_1^2 \sin \beta_1 \cos \beta_1 t_1) \quad (18)$$

Dieses ist eine lineare Funktion von x , welche zur vorübergehenden Abkürzung so geschrieben werden mag:

$$q^2 \sin \beta = f + g x \quad (19)$$

Damit wird nach (15a), wenn zugleich $\alpha = \beta$ gesetzt wird:

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = F(f + g x) \quad (20)$$

$$-\frac{dy}{dx} = -\psi_1 + F\left(f x + \frac{g x^2}{2}\right) \quad (21)$$

$$-y = -\psi_1 x + F\left(\frac{f x^2}{2} + \frac{g x^3}{6}\right) \quad (22)$$

Dabei ist $-\psi_1$ bei (21) als Integrations-Konstante zugesetzt, während in (22) bei y , das mit $x = 0$ verschwinden muss, keine weitere Integrations-Konstante hinzukommt. Wenn $x = s'$ wird, oder auch mit der Näherung $m = 1$, wenn $x = s$ wird, so muss $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = -\psi_2$ werden, dieses giebt aus (22) und (21) folgende zwei Gleichungen:

$$0 = -\psi_1 s + F\left(f \frac{s^2}{2} + g \frac{s^3}{6}\right) \\ + \psi_2 = -\psi_1 + F\left(f s + g \frac{s^2}{2}\right)$$

Diese zwei Gleichungen dienen zur Bestimmung von ψ_1 und ψ_2 , und geben nach ψ_1 und ψ_2 aufgelöst:

$$\psi_1 = F s \left(\frac{f}{2} + g \frac{s}{6} \right) \quad (23)$$

$$\psi_2 = F s \left(\frac{f}{2} + g \frac{s}{3} \right) \quad (24)$$

Wenn wir nun die Funktion (19) wieder zur Hand nehmen, so können wir aus derselben mit $x = 0$ und mit $x = s$ folgende zwei Gleichungen ableiten:

$$q_1^2 \sin \beta_1 = f \\ q_2^2 \sin \beta_2 = f + g s$$

Diese zwei Gleichungen in Verbindung mit (23) und (24) geben:

$$\psi_1 = \frac{F s}{2} \frac{2 q_1^2 \sin \beta_1 + q_2^2 \sin \beta_2}{3}$$

$$\psi_2 = \frac{F s}{2} \frac{q_1^2 \sin \beta_1 + 2 q_2^2 \sin \beta_2}{3}$$

Wenn wir nun die Bedeutung von F nach (15a) einsetzen, wollen wir wieder α statt β schreiben (vgl. oben bei (19) und (20)), also:

$$\psi_1 = \gamma^2 t \frac{s}{N} \frac{2 q_1^2 \sin \alpha_1 + q_2^2 \sin \alpha_2}{3} \quad (25)$$

$$\psi_2 = \gamma^2 t \frac{s}{N} \frac{q_1^2 \sin \alpha_1 + 2 q_2^2 \sin \alpha_2}{3} \quad (26)$$

Der hier vorkommende Quotient $\frac{s}{N}$ soll durch $\frac{s}{A}$ ersetzt werden, indem N der Quer-Krümmungshalbmesser und A der mittlere Krümmungshalbmesser für die Normalbreite P sind, d. h. es ist nach (21) und (22) S. 210—211:

$$N = \frac{c}{V} \quad , \quad A = \frac{c}{V^2} \quad \text{also} \quad \frac{A}{N} = \frac{1}{V} \quad (27)$$

Ausserdem wird zur Abkürzung eingeführt:

$$\eta^2 \frac{t}{V} q^2 = k \quad (28)$$

$$\text{insbesondere} \quad \frac{\eta^2 t}{V} q_1^2 = k_1 \quad \text{und} \quad \frac{\eta^2 t}{V} q_2^2 = k_2 \quad (28a)$$

Damit gehen (25) und (26) in diese Formen über:

$$\alpha_1 - \beta_1 = \psi_1 = \frac{2k_1 \sin \alpha_1 + k_2 \sin \alpha_2}{3} \frac{s}{A} \quad (29)$$

$$\beta_2 - \alpha_2 = \psi_2 = \frac{k_1 \sin \alpha_1 + 2k_2 \sin \alpha_2}{3} \frac{s}{A} \quad (30)$$

Zur Anwendung in Zahlen muss man die Funktion k nach (28) auf bestimmtes Mass einrichten. Nehmen wir wie bisher q in Graden und dann die kleinen Winkel ψ in Sekunden, so hat man zu setzen:

$$k = \frac{\rho''}{\rho^{\circ 2}} \frac{\eta^2}{V} t q^2$$

mit den Konstanten von § 87. wird dieses ausgerechnet:

$$k = 0,203 \, 259 \, 386 \, q^2$$

die hiernach berechneten Werte k sind nur erste Näherungen, welche von den genaueren Werten k der *Gauss'schen* Tafel ähnliche Abweichungen zeigen, wie zwischen den ersten Näherungen und den genauen Werten von $\log m$, welche wir in (14) § 89. S. 439 zusammengestellt haben.

§ 91. Hilfstafeln und Zahlenbeispiele.

Gauss hat eine ausführliche Tafel zur Reduktion der sphärischen Breiten auf sphäroidische Breiten, nebst $\log m$ und k berechnet und in den „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“, erste Abhandlung S. 37—45 mitgeteilt. (*Carl Friedrich Gauss' Werke*, IV. Band, Göttingen 1873, S. 293—300.)

Auf Seite [42]—[43] unseres Anhangs haben wir einen Auszug der *Gauss'schen* Tafel abgedruckt, mit dem 10 fachen Intervall $\Delta u = 10'$, ($\Delta u = 1'$ bei *Gauss*). Ausserdem haben wir auf Seite [41] eine Hilfstafel zur Reduktion der geographischen Längen mit der Konstanten α beigegeben.

Unsere Haupttafel Seite [42]—[43] verlangt Interpolation mit *zweiten Differenzen*, wozu § 31. S. 204 Anleitung giebt. Damit bekommt man nahezu dieselbe Genauigkeit, wie mit der Originaltafel selbst, so dass für einzelne Fälle, z. B. Übungsbeispiele, der Auszug als Ersatz des nicht immer zugänglichen Originals dienen kann. Auch giebt der Auszug eine bequeme *Übersicht* der Gesamt-Verhältnisse; man sieht z. B., dass $\log m$ nicht über 0.1 geht auf der ganzen breiten Zone von $51^\circ 20'$ bis $54^\circ 0'$. Ähnlich verhält es sich mit den Azimut-Korrekturen, welche von der Tafel-

grösse k abhängen; man kann also auf dieser ganzen nahe 3° oder rund 300 000 Meter breiten Zone eine Triangulierung *sphärisch* berechnen, ohne eine andere Nebenarbeit als das Verwandeln der Breiten φ und u durch Aufschlagen in der Tafel.

Man hat dabei zuerst *einen* astronomisch bestimmten Ausgangspunkt vom Ellipsoid auf die Kugel zu übertragen, dann das ganze Dreiecksnetz *sphärisch* zu berechnen, und zum Schluss *alle* Kugel-Breiten u wieder auf φ , d. h. auf das Ellipsoid zu übertragen. Dieses ist der Grund, warum *Gauss* die *Kugelbreite* u als unabhängige Veränderliche für die Tafel genommen hat.

Ausser der *Gauss'schen* Tafel ist in neuerer Zeit noch eine zweite solche Tafel mit südlicherer Normalbreite, nämlich $Q = 46^\circ 30'$, berechnet worden von *Marek* und *Horsky*. Dieselbe, welche, wie die *Gauss'sche* Tafel, die *Besselschen* Erddimensionen zu Grunde legt, ist mitgeteilt in dem Werke von *Marek* „Technische Anleitung zur Ausführung der trigonometrischen Operationen des Katasters, Budapest 1875“, S. 252 bis 262. Die Breiten sind wie bei *Gauss* auf 0,00001" angegeben, dann $\log m$ auf 0,01 und k auf 0,01". Das Intervall Δu ist $1' 40'' = 100''$. Einiges weitere hierüber haben wir früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1877“, S. 40–46 mitgeteilt, und einen Auszug der *Marekschen* Tafel gab unsere vorige Auflage, Karlsruhe 1878, S. 403–404.

Die *Gauss'sche* Tafel geht von $46^\circ 40'$ bis $58^\circ 40'$, die *Mareksche* Tafel geht von $41^\circ 30'$ bis $51^\circ 30'$; und es somit nun die ganze $17^\circ 10'$ breite Zone von $41^\circ 30'$ bis $58^\circ 40'$ von Mitteleuropa für konforme Abbildung eingerichtet, und zwar ist die $4^\circ 50'$ breite Zone zwischen $46^\circ 40'$ und $51^\circ 30'$ doppelt vorhanden. Innerhalb dieser letzteren Zone ist diejenige Tafel die bequemere, welche sich auf die näherliegende Normalbreite bezieht, oder welche ein Vergrößerungsverhältnis m giebt, welches näher dem Wert 1 ist. Ungefähr bei $49^\circ 35'$ geben beide Tafeln denselben Wert $\log m = 0.000\,00015$, es ist also z. B. für Süddeutschland im allgemeinen die *Gauss'sche* und die *Mareksche* Tafel nahezu gleich günstig.

Als *Anwendung* der *Gauss'schen* Theorie und der soeben beschriebenen Hilfstafeln wollen wir die Berechnung unseres kleinen sphäroidischen Normal-Beispiels (1) § 77. S. 386, nehmen in dieser Form:

$$\text{Gegeben: } \varphi_1 = 49^\circ 30' 0'' \quad \varphi_2 = 50^\circ 30' 0'' \quad (1)$$

$$l = 1^\circ 0' 0'' \quad (2)$$

Gesucht: α_1, α_2 und s .

Das erste ist, die Breiten φ_1 und φ_2 auf die Kugel zu übertragen, d. h. die entsprechenden u_1 und u_2 aus der Tafel zu entnehmen. Von Seite [42] unseres Anhangs haben wir:

u	φ	Differenzen
$49^\circ 20' 0''$	$49^\circ 21' 44,31358''$	
$49^\circ 30' 0''$	$49^\circ 31' 45,38838''$	$+ 10' 1,07480'' \quad - 0,01736''$
$10' 0''$		$= 601,07480''$
$= 600''$		

$\varphi = 49^\circ 30'$ hat gegen die Nachbarwerte die Differenzen:

$$\text{und} \quad \left. \begin{array}{l} 8' 15,68642'' = 495,68642'' \\ 1' 45,38838'' = 105,38838'' \end{array} \right\} 601,07480''$$

Man berechnet zuerst näherungsweise:

$$z = \frac{495,68642}{601,07480} = 0,82466$$

Dann für die zweite Differenz nach Anleitung von (4) S. 204:

$$\frac{1-z}{2} = \frac{0,17534}{2} = 0,08767,$$

$$(-0,08767)(-0,01736'') = +0,00152''$$

$$\text{hiez u erste Differenz} = 601,07480''$$

$$\text{Verbesserte erste Differenz} = 601,07632''$$

$$\text{Proportional-Teil} = \frac{495,68642}{601,07632} 600'' = 494,79882'' = 8' 14,79882''$$

Also:

$$u = 49^\circ 28' 14,79882''$$

Die Rechnung nach der *Gauss'schen* Originaltafel gab auf 0,00001'' genau dasselbe, nämlich in Zusammenstellung für alle Werte die uns hier interessieren:

Ellipsoid, φ	Kugel, u	$\log m$	k
$49^\circ 30' 0''$	$u_1 = 49^\circ 28' 14,79881''$	1.609	2,049''
$50^\circ 0' 0''$	$49^\circ 58' 11,67462''$	0.969	1,462''
$50^\circ 30' 0''$	$u_2 = 50^\circ 28' 8,70541''$	0.525	0,973''

(3)

Von der zweiten dieser drei Angaben brauchen wir für die Zwecke unseres Beispiels nur etwa $\log m = 0.969$, wenn wir den Mittelwert nach der Formel (23) § 89. S. 440 berechnen wollen, welche in der dort angegebenen Mittelbildung auch für $\log m$ gilt, und in unserem Falle giebt:

$$\log m = \frac{1.609 + 4 \times 0.969 + 0.525}{6} = 1.017 \quad (4)$$

Nun wird der Längenunterschied $l = 1^\circ 0' 0''$ von (2) auf die Kugel reduziert, was durch Multiplikation mit der Konstanten α , bzw. durch Benützung der Hilfstafel Seite [41] des Anhangs geschieht, mit dem Ergebnis:

$$\lambda = \alpha l = 1^\circ 0' 1,630505'' \quad (5)$$

Nun macht man mit u_1 und u_2 von (3) nebst λ von (5) eine sphärische Polardreiecksberechnung nach (4) und (5) S. 295, wodurch man erhält:

$$\beta_1 = 32^\circ 25' 21,4923'' \quad \beta_2 = 33^\circ 11' 19,4197'' \quad (6)$$

und $\log \sin \frac{\sigma}{2} = 8.015\,5452\,409$, $\frac{\sigma}{2} = 0^\circ 35' 37,85453''$

$$s' = A \frac{\sigma}{\varrho} \text{ giebt } \log s' = 5.121\,6104\,130$$

hiez u nach (4)

$$\log s = 5.121\,6103\,113 \quad , \quad s = 132\,315,375'' \quad (7)$$

Es folgen noch die Azimut-Reduktionen nach den Formeln (29) und (30) § 90. S. 445. Man hat hiez u:

$$k_1 = 2,049'' \quad k_2 = 0,973''$$

$$\alpha_1 = 32^\circ 25' \quad \alpha_2 = 33^\circ 11'$$

Die Ausrechnung giebt:

$$\psi_1 = \alpha_1 - \beta_1 = +0,0189'' \quad -\psi_2 = \alpha_2 - \beta_2 = -0,0149''$$

Diese Reduktionen zu β_1 und β_2 in (6) hinzugefügt, geben:

$$\alpha_1 = 32^\circ 25' 21,5112'' \quad \alpha_2 = 33^\circ 11' 19,4048'' \quad (8)$$

In diesen (7) und (8) besteht die Auflösung der gestellten Aufgabe, und diese (7) und (8) stimmen auch hinreichend überein mit den entsprechenden Zahlenwerten von (1) S. 386.

§ 92. Doppel-Projektion der Preussischen Landes-Aufnahme.

Wenn man nach der im bisherigen dargelegten *Gauss'schen* Theorie das Ellipsoid auf eine Kugel abgebildet hat, so dass jedem Punkte mit der Länge l und der Breite q auf dem Ellipsoid, ein Punkt mit der Breite u und der Länge λ auf der Kugel entspricht, so kann man mit diesen sphärischen geographischen Coordinaten u, λ beliebige sphärische Umwandlungen vornehmen, z. B. daraus sphärische *rechtwinklige* Coordinaten x, y ableiten, und diese letzteren Coordinaten kann man wieder konform in ebene rechtwinklige Coordinaten x, y abbilden.

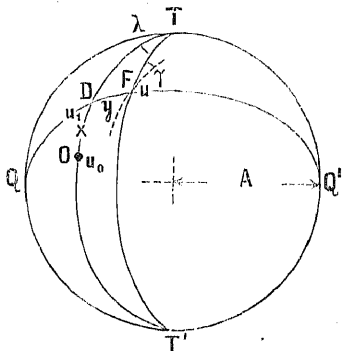
Dieses ist das System, welches von General *Schreiber* für die trigonometrische Abteilung der Preussischen Landes-Aufnahme angenommen worden ist.

Wir werden die Theorie der dadurch bestimmten Doppelprojektion nach den darüber vorhandenen Veröffentlichungen*) hier entwickeln, und haben deshalb zuerst:

I. Berechnung der sphärischen rechtwinkligen Coordinaten x, y .

In Fig. 1. haben wir die *Gauss'sche* Kugel, vom Halbmesser A , und darauf einen Meridian $T'OT$, von welchem die Längen λ gezählt werden.

Fig. 1.
Kugel mit dem Halbmesser A .



Irgend ein Punkt F habe von diesem Anfangs-Meridian an gezählt, die Länge λ , nach Osten positiv, und ferner die Breite u . Derselbe Punkt habe auch die rechtwinkligen Coordinaten x, y in Bezug auf den Ursprungs-Meridian, in welchem der Nullpunkt O mit der Breite u_0 angenommen wird. Die Ordinate y liegt auf einem Bogen QQ' rechtwinklig zu $T'OT$ und bestimmt auf $T'O$ die Fusspunktsbreite u_1 des Punktes D . Wir betrachten auch einen Parallelbogen zu $T'OT$, um die Meridian-Konvergenz γ zur Anschauung zu bringen, welche in dem Punkte F gegen den Anfangs-Meridian stattfindet.

Wenn wir nun die Aufgabe stellen, aus gegebenen u_0, u, λ die rechtwinkligen Coordinaten x, y , nebst der Meridian-Konvergenz γ zu bestimmen, so erinnern wir uns zugleich, dass wir diese Aufgabe in Bezug auf die *Soldnerschen* Coordinaten bereits früher in § 54. S. 292–293 behandelt haben. Sei es nun, dass wir jene frühere

*) „Verhandlungen der 1887er Konferenz in Nizza der perm. Komm. d. intern. Erdm., Berlin 1888, Annex X“^a, S. 10–12, und frühere Mitteilung in *Jordan-Steppes* „Deutsches Vermessungswesen, 1882, I.“, S. 151–154. Weiteres ist auch zitiert und erläutert in „Zeitschr. f. Verm., 1886“, S. 253–256, und „Zeitschr. f. Verm., 1889“, S. 8–14.

Entwicklung wieder benützen, oder die einfachen Formeln aus Fig. 1. unmittelbar ab lesen, wir werden haben:

$$\tan u_1 = \frac{\tan u}{\cos \lambda}, \quad x = \frac{u_1 - u_0}{A} \quad (1)$$

$$\sin \frac{y}{A} = \sin \lambda \cos u \quad (2)$$

$$\tan \gamma = \tan \lambda \sin u \quad (3)$$

Diese Formeln werden wir in dieser *geschlossenen* Form benützen, und nicht wie früher in § 54. in Reihen entwickeln, weil es sich um grosse Werte x und y handelt, bei welchen die Entwicklung viele Glieder haben müsste.

II. Konforme ebene Abbildung der rechtwinkligen Coordinaten.*)

In Fig. 2. haben wir wieder dieselben Verhältnisse wie in der vorhergehenden Fig. 1., jedoch mit *zwei* Punkten F' und G' , welche bzw. die rechtwinkligen Coordinaten x, y und x', y' haben.

Fig. 3. zeigt ein ebenes Abbild von Fig. 2., wobei zuerst der Anfangs-Meridian $T E D O T'$ wieder als $T E D O T'$ erscheint, und zwar in *unveränderter* Grösse, so dass also $O D E$ in Fig. 2. und in Fig. 3. in gleichen Massen dargestellt sind, namentlich auch $OD = OD$ und $DE = DE$ in *beiden* Figuren.

Da der Punkt D die Breite u_1 und O die Breite u_0 hat, erhält man die Abscisse x des Punktes D und aller Punkte auf der Ordinate $D F'$ aus der Differenz $u_1 - u_0$:

$$x = (u_1 - u_0) \frac{A}{Q} \quad (4)$$

wobei:

$$\log \frac{A}{Q} = 1.490\ 6022\ 671$$

und für die *Gauss'sche* Kugel: $u_0 = 52^\circ\ 40'\ 0''$.

Die Ordinatenlinien $D F'$ und $E G'$ in Fig. 3. sind geradlinig rechtwinklig zu $T T'$ gezogen, und die Ordinatenlängen $D F' = y$ und $E G' = y'$ sollen so gewählt werden, dass die Abbildung konform wird, d. h. so dass die beiden rechtwinkligen Dreiecke $F' G' H$ und $F'' G' H'$, die wir nun als unendlich klein annehmen, einander *ähnlich* werden. Hierzu ist nötig, dass zwischen den Katheten ein konstantes Verhältnis besteht:

$$\frac{F' H'}{F H} = \frac{H' G'}{H G} = m \quad (5)$$

*) Diese Abbildung ist in der Karten-Projektionslehre unter dem Namen *sphärische „Merkator“-Projektion* bekannt, wobei jedoch an Stelle des Meridians $T' O T'$ von Fig. 2., der Äquator der Erde, und an Stelle von y die geographische Breite tritt.

Hiebei ist:

$$\left. \begin{aligned} F' H' &= dx & , & & H' G' &= dy \\ F H &= dx \cos \frac{y}{A} & , & & H G &= dy \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Daraus folgt:

$$dy = \frac{1}{\cos \frac{y}{A}} dx \quad (7)$$

Die Integration dieser Gleichung giebt:

$$y = \frac{A}{\mu} \log \tan \left(45^\circ + \frac{y}{2A} \right) \quad (8)$$

wobei, wie gewöhnlich, μ der logarithmische Modulus ist. Nachdem die Beziehung zwischen y und y bestimmt ist, hat man auch das Vergrößerungs-Verhältnis m nach (4) und (7):

$$m = \frac{dy}{dx} = \sec \frac{y}{A} \quad (9)$$

Die Funktion (8) kann man in eine Reihe entwickeln, indem man zunächst setzt:

$$\tan \left(45^\circ + \frac{y}{2A} \right) = \frac{1 + \tan \frac{y}{2A}}{1 - \tan \frac{y}{2A}} = \frac{1+t}{1-t} \quad (10)$$

Die logarithmische Reihe (13) S. 198 hierauf angewendet giebt:

$$\log \tan \left(45^\circ + \frac{y}{2A} \right) = 2\mu \left(t + \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 + \dots \right) \quad (11)$$

Die Tangenten-Reihe (19) S. 199 giebt:

$$\begin{aligned} \tan \frac{y}{2A} &= t = \left(\frac{y}{2A} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{y}{2A} \right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{y}{2A} \right)^5 + \dots \\ t^3 &= \frac{1}{8} \left(\frac{y}{A} \right)^3 + \frac{1}{32} \left(\frac{y}{A} \right)^5 + \dots \\ t^5 &= \frac{1}{32} \left(\frac{y}{A} \right)^5 + \dots \end{aligned}$$

Wenn man diese t , t^3 , t^5 in (11) einsetzt, und dann den Ausdruck (8) bildet, so erhält man:

$$y = y + \frac{y^3}{6A^2} + \frac{y^5}{24A^4} + \dots \quad (12)$$

Dabei ist y linear (in Metern) vorausgesetzt; wenn man aber y in Winkelmass hat, was durch y'' (d. h. y in Sekunden) ausgedrückt sein soll, so hat man (12) so zu schreiben:

$$y = A \left(y'' + \frac{1}{6} (y'')^3 + \frac{1}{24} (y'')^5 + \dots \right) \quad (13)$$

Diese Entwicklung bis zur fünften Ordnung ist ausreichend für Abstände etwa bis zu 3° ; für weitere Ausdehnung hat die Formel (12) nach einer Entwicklung von *Schols**) bis zur elften Ordnung folgende Glieder:

*) Annales de l'école polytechnique de Delft, 1^{re} livraison, Leide, 1884. Sur l'emploi de la projection de *Mercator* pour le calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'équateur, par *Ch. M. Schols*.

$$y = \eta + \frac{1}{6} \frac{\eta^3}{A^2} + \frac{1}{24} \frac{\eta^5}{A^4} + \frac{61}{5040} \frac{\eta^7}{A^6} + \frac{277}{72576} \frac{\eta^9}{A^8} + \frac{50521}{39916800} \frac{\eta^{11}}{A^{10}} \quad (14)$$

und die Umkehrung:

$$\eta = y - \frac{1}{6} \frac{y^3}{A^2} + \frac{1}{24} \frac{y^5}{A^4} - \frac{61}{5040} \frac{y^7}{A^6} + \frac{277}{72576} \frac{y^9}{A^8} - \frac{50521}{39916800} \frac{y^{11}}{A^{10}} \quad (15)$$

Bleiben wir zunächst bei dem zweiten Gliede der Reihe (12) oder (14) stehen, so haben wir:

$$y = \eta \left(1 + \frac{\eta^2}{6 A^2} \right) \quad (16)$$

Dieses stimmt überein mit der früheren Formel (4) oder (5) von § 51. S. 282 für die *Gauss'schen* konformen rechtwinkligen Koordinaten, in erster Annäherung, wodurch bestätigt ist, was schon vorher erkannt war (vgl. auch S. 287), dass jene *Gauss'sche* Projektion und die sphärische *Merkator*-Projektion in erster Näherung identisch sind.

Damit ist auch bewiesen, dass die früheren Formeln für Reduktion der Richtungswinkel und der Entfernung, in erster Näherung auf unseren neuen Fall angewendet werden dürfen, wenn man nur überall das frühere η nun durch η , oder in den Korrektionsgliedern durch y , sowie r durch A ersetzt. Wir nehmen also von (10) S. 283 die Formel:

$$\log s - \log S = (y + y')^2 \frac{\mu}{8 A^2} + (y' - y)^2 \frac{\mu}{24 A^2} \quad (17)$$

Dabei ist S eine Seite in Wirklichkeit und s dieselbe Seite in der Projektion; die Konstanten zu (17) sind (für Einheiten der siebenten Logarithmenstelle):

$$\log \frac{\mu}{8 A^2} = 2.124\ 6395 - 20 \quad , \quad \log \frac{\mu}{24 A^2} = 1.647\ 5183 - 20$$

Auch das Vergrößerungs-Verhältnis m , dessen strenge Formel in (9) enthalten ist, ist in erster Näherung kurz entwickelt:

$$m = 1 + \frac{y}{2 A^2} \quad (18)$$

oder:
$$\log m = y^2 \frac{\mu}{2 A^2} \left(\log \frac{\mu}{2 A^2} - 2.726\ 6995 - 20 \right)$$

Ferner haben wir von (16) S. 284 die Reduktion für Richtungswinkel:

$$\alpha - \alpha_0 = (x' - x)(y' + y) \frac{\varrho}{4 A^2} - (x' - x)(y' - y) \frac{\varrho}{12 A^2} \quad (19)$$

Dabei ist:

$$\log \frac{\varrho}{4 A^2} = 1.102\ 3103 - 10 \quad , \quad \log \frac{\varrho}{12 A^2} = 0.625\ 1891 - 10$$

Diese Formeln (17) und (19) sind für das grosse Koordinatensystem der preussischen Landes-Aufnahme (vgl. L. A. S. 344) ausreichend; die Entwicklung auf höhere Potenzen giebt *Schols* in der oben zitierten Abhandlung (Anmerkung S. 450).

Wir wollen die Anwendung der vorstehenden Formeln an unserem schon mehrfach benützten hannoverschen Beispiele Ägidius-Wasserturm zeigen.

Wie schon auf S. 336 angegeben ist, haben diese beiden Punkte folgende geographische Koordinaten im Systeme der Landes-Aufnahme:

	Breite	Länge L	$l = L - 31^\circ$
Ägidius	$\varphi' = 52^\circ 22' 14,9611''$	$L' = 27^\circ 24' 24,6290''$	$l' = -3^\circ 35' 35,3710''$
Wasser- turm	$\varphi = 52^\circ 21' 49,9080''$	$L = 27^\circ 22' 25,0168''$	$l = -3^\circ 37' 34,9832''$
Differenzen	$0' 25,0531''$	$1' 59,6122''$	$1' 59,6122''$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ägidius } \varphi' = 52^\circ 22' 14,9611'' \quad L' = 27^\circ 24' 24,6290'' \quad l' = -3^\circ 35' 35,3710'' \\ \text{Wasser-} \\ \text{turm } \varphi = 52^\circ 21' 49,9080'' \quad L = 27^\circ 22' 25,0168'' \quad l = -3^\circ 37' 34,9832'' \end{array} \right\} \quad (20)$$

Die Reduktion auf die *Gauss'sche* Kugel geschieht bei φ durch Anwendung der Hilfstafel Seite [42]—[43] (bzw. der *Gauss'schen* Originaltafel), und bei l durch Multiplikation mit der Konstanten $\alpha = 1,000\,452\,918$, bzw. nach der hiezu gehörigen Hilfstafel Seite [41]. Man findet auf diese Weise:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Ägidius} & u' = 52^\circ 20' 13,92412'' \quad \lambda' = -3^\circ 35' 41,22966'' \\ \text{Wasserturm} & u = 52^\circ 19' 48,90327'' \quad \lambda = -3^\circ 37' 40,89604'' \end{array} \right\} \quad (21)$$

Die weitere Rechnung geht nach den sphärischen Formeln (1) und (2) und giebt:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Ägidius} & u_1' = 52^\circ 23' 30,36875'' , \left(\frac{y'}{A} \varrho \right) = 2^\circ 11' 44,00948'' = 7904,00948'' \\ \text{Wasserturm} & u_1 = 52^\circ 23' 9,01197'' , \left(\frac{y}{A} \varrho \right) = 2^\circ 12' 58,29036'' = 7978,29036'' \end{array} \right\} \quad (22)$$

Zugleich berechnet man nach (3) auch die beiden Meridian-Konvergenzen:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Ägidius} & \gamma' = 2^\circ 50' 49,5606'' \\ \text{Wasserturm} & \gamma = 2^\circ 52' 23,4645'' \end{array} \right\} \gamma - \gamma' = 1' 33,9039'' \quad (23)$$

Von (22) geht man über zu den rechtwinkligen ebenen Coordinaten x, y , und zwar für x nach (4) und für y nach der Reihe (13). Die Ausrechnung giebt:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Ägidius} & y' = -244\,656,086'' \quad x' = -30624,970'' \\ \text{Wasserturm} & y = -246\,956,480'' \quad x = -31285,873'' \end{array} \right\} \quad (24)$$

Zu diesen von uns selbst auf dem angegebenen Wege berechneten Coordinaten stellen wir auch die im Jahre 1887 amtlich von der Landes-Aufnahme erhaltenen Werte zur Vergleichung:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Ägidius} & y' = -244\,656,090'' \quad x' = -30\,624,971'' \\ \text{Wasserturm} & y = -246\,956,479'' \quad x = -31\,285,875'' \end{array} \right\} \quad (24^*)$$

Die Übereinstimmung zwischen (24) und (24*) ist genügend. Wir behalten (24*) bei, und haben davon:

$$y' - y = +2300,389'' \quad x' - x = +660,904'' \quad (25)$$

Hieraus die Richtungswinkel, von Nord über Ost, zunächst ohne Korrektionsglieder:

$$(WA)_0 = \alpha_0 = 73^\circ 58' 14,12'' \quad (AW)_0 = \alpha'_0 = 253^\circ 58' 14,12'' \quad (26)$$

Hiezu kommen die Korrektionen nach (19), welche bei der kurzen Entfernung AW nur wenig ausmachen, nämlich bzw. $-0,41''$ und $+0,41''$, so dass (25) übergeht in:

$$\text{Richtungswinkel } (WA) = \alpha = 73^\circ 58' 13,71'' \quad (AW) = \alpha' = 253^\circ 58' 14,53'' \quad (27)$$

$$\text{hiezu von (23) Merid.-Konv.} \quad -2^\circ 52' 23,46'' \quad -2^\circ 50' 49,56''$$

$$\text{Also Azimute:} \quad \alpha = 71^\circ 5' 50,25'' \quad \alpha' = 251^\circ 7' 24,97'' \quad (28)$$

Wir wenden auch die Formel (17) an, und finden aus den Differenzen (25):

$$\log s = 3.379\,0236 \quad (29)$$

$$\text{hiezu nach (17):} \quad -3220$$

$$\text{also } \log S = 3.378\,7016 \quad (30)$$

Die hier auftretende logarithmische Korrektur $+ 3220$ bekommt man auch aus der Formel (18) für $\log m$, wenn man für y das *Mittel* aus y und y' in (24*) nimmt, nämlich $y = -245\,806^m$; dieses genügt hier, weil die fragliche Entfernung s sehr klein ist.

Zur Berechnung von m in beiden Punkten getrennt, hat man auch noch die scharfe Formel (9), welche auf (22) angewendet gibt:

$$\begin{aligned}\text{Ägidius} \quad \log \sec 2^\circ 11' 44,009'' &= 0,000\,3189\cdot4 \\ \text{Wasserturm} \log \sec 2^\circ 12' 58,290'' &= 0,000\,3249\cdot6 \\ \text{Mittel } \log m &= 0,000\,3219\cdot5\end{aligned}\quad (31)$$

Dieses stimmt mit 3220 bei (29) und (30).

Nun können wir zur Versicherung auch noch frühere Berechnungen zuziehen, nämlich in (27) S. 328 wurde gefunden $\log s = 3.378\,7016$, was mit (30) stimmt, und die beiden Azimute:

$$\alpha = 71^\circ 5' 50,33'' \qquad \alpha' = 71^\circ 7' 25,05'' \quad (32)$$

Diese α und α' sollen mit (28) übereinstimmen (abgesehen von $\pm 180^\circ$ bei α'). Wenn nun kleine Differenzen von $0,08''$ zwischen (28) und (32) bestehen, während wir doch in allen trigonometrischen Rechnungen mindestens auf $0,01''$ scharf gerechnet haben, so ist das hier doch unerheblich, weil der Rechnungsweg über rechtwinklige lineare Coordinaten (24) bzw. (24*) geführt hat, die auf $0,001^m$ als letzte Rechenheit angegeben wurden, so dass sie die gewöhnlichen Abrundungs-Unsicherheiten in den rechtwinkligen Coordinaten bei kurzer Entfernung bereits $0,01''$ erheblich beeinflussen.

Oder kurz: Ebenso wie auf S. 338—339 die Berechnungen für geographische Coordinaten und rechtwinklige *Soldnersche* Coordinaten in Bezug auf den Meridian von Celle hinreichend unter sich gestimmt haben, so stimmen auch nun alle Berechnungen mit den konformen rechtwinkligen Coordinaten in Bezug auf den 31. Längengrad als x -Axe, sowie alle unsere auf die konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel gemachten Berechnungen völlig hinreichend unter sich überein.

Kapitel X.

Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke.

§ 93. Theorie des geodätischen Dreiecks in erster Näherung.

Unter einem „geodätischen Dreieck“ verstehen wir ein aus drei geodätischen Linien auf irgend einer krummen Fläche gebildetes Dreieck, dessen Seiten die Längen der geodätischen Linien sind (zwischen den Eckpunkten linear gemessen), und dessen Winkel diejenigen drei Winkel sind, welche die Tangenten der geodätischen Linien in den Eckpunkten einschliessen.

Unsere ganze nachfolgende, in diesem Kapitel X. zu behandelnde Theorie macht die Annahme, dass die Seiten der geodätischen Dreiecke verhältnismässig *klein* seien gegen die in Betracht kommenden Krümmungshalbmesser von Normalschnitten der

krummen Fläche, so dass konvergierende Reihen-Entwicklungen nach Potenzen von $\frac{s}{R}$ (wo s eine geodätische Linie und R ein Krümmungs-Halbmesser ist) immer möglich sind.

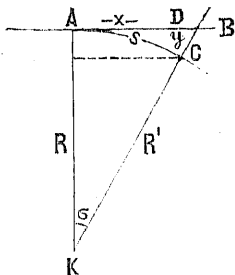
Ausserdem machen wir bei den in diesem § 93. zu entwickelnden Formeln die noch mehr beschränkende Annahme, dass für jeden Normalschnitt der krummen Fläche, im Bereiche unserer Untersuchung, die *Änderung* der Krümmung in den Formeln unberücksichtigt bleiben kann (wobei aber verschiedene Normalschnitte verschiedene Krümmungen haben).

Um über alle hiebei vorkommenden Vernachlässigungen von vornherein Klarheit zu schaffen, schicken wir einige hierauf bezügliche Entwicklungen voraus.

Allgemeine Reihen-Entwicklungen.

In Fig. 1. sei eine Kurve AC in Bezug auf ihre Tangente AB als x -Axe bestimmt durch die Gleichung:

Fig. 1.



$$y = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^3}{S^2} + \dots \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{R} + \frac{3x^2}{S^2} + \dots \quad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{R} + \frac{6x}{S^2} + \dots \quad (3)$$

Der allgemeine Ausdruck für den Krümmungs-Halbmesser ρ ist bekanntlich:

$$\rho = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Wenn man hier die Reihen (2) und (3) einsetzt und entwickelt, so erhält man:

$$\rho = R \left(1 - 6 \frac{xR}{S^2} + x^2 \dots\right) \quad (4)$$

oder:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{6xR}{S^2} + \dots\right) = \frac{1}{R} + \frac{6x}{S^2} + x^2 \dots \quad (5)$$

Dabei ist R der Krümmungs-Halbmesser für $x = 0$, d. h. der Krümmungs-Halbmesser der Kurve AB im Punkte A , wie in Fig. 1. mit $AK = R$ eingezeichnet ist.

Auch die Kurvenlänge $AC = s$ kann man leicht angeben, indem man entwickelt:

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = x + \frac{x^3}{6R^2} + x^4 \dots \quad (6)$$

Nachdem so die Punkte A , K und C bestimmt sind, ziehen wir die Gerade KC , und bestimmen dadurch auch eine Strecke $KC = R'$ und einen Centriwinkel $AKC = \sigma$, wofür die strengen Gleichungen bestehen:

$$R' = \sqrt{x^2 + (R - y)^2} \quad \text{und} \quad \tan \sigma = \frac{x}{R - y}$$

Diese Gleichungen geben entwickelt:

$$R' = R \left(1 - \frac{x^3}{R S^2} + x^4 \dots \right) = R \left(1 - \frac{s^3}{R S^2} + s^4 \dots \right) \quad (7)$$

$$\sigma = \frac{x}{R} + \frac{x^3}{2 R^3} + \dots \quad \text{oder} \quad \sigma = \frac{s}{R} + \frac{s^4}{R^4} \dots \quad (8)$$

Hiebei ist die Beziehung zwischen x und s nach (6) benützt, und man sieht aus der zweiten Form (8), dass man bis zur Ordnung σ^3 einschliesslich, schlechthin setzen darf $\sigma = \frac{s}{R}$.

Wenn man also z. B. die Funktion $\frac{e}{R'} \sin \sigma$ zu bilden hat, und man schreibt dafür kurz $\frac{e}{R} \sin \sigma$, so hat man nach (7) nur ein Glied von der Ordnung $\sigma^3 \sin \sigma$, d. h. von der Ordnung σ^4 vernachlässigt u. s. w.

Durch solche Betrachtungen wird man im folgenden sich immer überzeugen können, dass nur Glieder vernachlässigt werden, die in der Potenz-Ordnung höher stehen, als die letzten beibehaltenen Glieder, und dass alle Glieder von der letzten beibehaltenen Ordnung wirklich vorhanden sind.

In diesem Sinne kann man z. B. aus den Gleichungen (7), (8) und (10) S. 358 mit $\alpha = 0$ oder $\alpha = 90^\circ$ schliessen, dass eine kurze geodätische Linie in der Richtung eines Haupt-Normalschnittes in erster Näherung als eine *ebene* Kurve behandelt werden kann, oder dass hiemit nur kleine Azimutwinkel vernachlässigt werden, welche im Vergleich mit α_1 der nachfolgenden Fig. 2. S. 456, Grössen nächst höherer Ordnung sind.

Von früheren Entwicklungen werden wir von § 67. und § 71. einiges hier wieder benützen, wir wollen aber dabei bemerken, dass alle jene Entwicklungen von § 67. — § 71. innerhalb der ersten Näherungen, die wir jetzt allein brauchen, nicht bloss für das Ellipsoid, sondern auch für irgend welche krumme Fläche (wie bei den nachfolgenden Fig. 2. und 3.) gültig sind, wenn man unter $V^2 = 1 + \eta^2 = \frac{N}{M}$ nicht speziell die Haupt-Krümmungshalbmesser N und M des Ellipsoides, sondern allgemeiner irgend einer krummen Fläche versteht, und wenn man damit auch η^2 nicht speziell $= e'^2 \cos^2 \varphi$ sondern allgemeiner $\eta^2 = \frac{N - M}{M}$ setzt, jedoch mit der Beschränkung, dass η^2 eine *kleine* Grösse ist.

Dass jene Formeln von § 67. — § 71., soweit wir sie nun brauchen (z. B. mit Vernachlässigung von η^4 neben η^2), diesen allgemeineren Sinn haben, davon kann man sich durch eine kurze Rückschau auf die Entstehung jener Formeln, ohne die ganze Entwicklung zu wiederholen, überzeugen.

Das rechtwinklige geodätische Dreieck mit Katheten in den Hauptkrümmungs-Richtungen.

Wir betrachten in den umstehenden Fig. 2. und Fig. 3. ein kleines rechtwinkliges geodätisches Dreieck, dessen Katheten $CA = p$ und $CB = q$ in den Richtungen der beiden Haupt-Krümmungen liegen, auf einer krummen Fläche, welche nach CA den Krümmungs-Halbmesser M und nach CB den Krümmungs-Halbmesser N hat.

Wir nehmen dabei die Bezeichnungen wie gewöhnlich für das Umdrehungs-

Wir wollen die Bezeichnungen V^2 und η^2 , welche wir vom Ellipsoid übernommen haben, hier auch allgemeiner in dem Sinne von (13) anwenden.

Gehen wir nun zur geodätischen Linie AB über, so können wir die früheren Betrachtungen von § 75. ebenfalls auf unseren Fall übertragen, und wir haben dann nach (30) und (31) S. 380, mit den Bezeichnungen von Fig. 3.:

$$\alpha - \alpha' = \frac{2}{3} \eta^2 (\varepsilon) \quad \beta - \beta_1 = \frac{1}{3} \eta^2 (\varepsilon) \quad (16)$$

$$\alpha_1 - \alpha = \frac{1}{3} \eta^2 (\varepsilon) \quad \beta' - \beta = \frac{2}{3} \eta^2 (\varepsilon) \quad (17)$$

Nun betrachten wir die sphärischen Excesse ε_u und ε_m , welche den sphärischen Dreiecken, bzw. den Dreikanten mit den Kugelmittelpunkten K_u und K_m von Fig. 2. zukommen, nämlich:

$$\varepsilon_m = \alpha_1 + \beta' - 90^\circ = \frac{pq}{2M^2} \quad (18)$$

$$\varepsilon_u = \alpha' + \beta_1 - 90^\circ = \frac{pq}{2N^2} \quad (19)$$

Für die geodätische Linie sei entsprechend:

$$\varepsilon = \alpha + \beta - 90^\circ \quad (20)$$

Dann kann man wegen (16) und (17), ε in folgenden zwei Formen darstellen, wo (ε) ein Näherungswert von ε ist:

$$\varepsilon = \varepsilon_m - \eta^2 (\varepsilon) = \frac{pq}{2M^2} (1 - \eta^2) \quad (21)$$

oder:

$$\varepsilon = \varepsilon_u + \eta^2 (\varepsilon) = \frac{pq}{2N^2} (1 + \eta^2) \quad (22)$$

Die zweite Gleichung (22) von diesen zwei zusammengehörigen giebt wegen (13) unmittelbar:

$$\varepsilon = \frac{pq}{2N^2} \frac{N}{M} = \frac{pq}{2MN} = \frac{pq}{2r^2} \quad (23)$$

Dabei ist gesetzt:

$$\sqrt{MN} = r \quad (24)$$

Aber auch die erste Gleichung (21) giebt dieselbe Form (23), wenn man die höheren Potenzen η^4 u. s. w. vernachlässigt, denn dann ist:

$$1 - \eta^2 = \frac{1}{1 + \eta^2} = \frac{M}{N} \quad (25)$$

Damit geht auch (21) in (23) über:

Der Excess ε unseres rechtwinkligen geodätischen Dreiecks wird also nach (23) gerade so berechnet, wie der Excess eines *sphärischen* Dreiecks mit dem *mittleren* Krümmungs-Halbmesser r als Kugel-Halbmesser.

Wir wollen nun den Centriwinkel σ bei K_m für die Bogenlänge $AB = s$ bestimmen. Wenn R der Krümmungs-Halbmesser des Bogens AB ist (d. h. der Krümmungs-Halbmesser der krummen Fläche in der Richtung AB), so wird man σ in dieser Form darstellen können:

$$\sigma = \frac{s}{R} + \delta, \text{ wobei } \sin \delta = \frac{R-M}{R} \sin \sigma$$

Dieses bis zur dritten Potenz entwickelt, wird geben:

$$\sigma = \frac{s}{M} - \left(\frac{R}{M} - 1 \right) \frac{s^3}{6M^3} \quad (26)$$

Zur Bestimmung von R hat man den *Eulerschen* Satz (1) § 34. S. 213:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{M} + \frac{\sin^2 \alpha}{N}$$

Daraus kann man entwickeln:

$$\frac{R}{M} = 1 + \eta^2 \sin^2 \alpha$$

Also wird (26):

$$\sigma = \frac{s}{M} \left(1 - \frac{\eta^2 s^2 \sin^2 \alpha}{6 M^2} \right) \quad (27)$$

Diese Formel gilt auch, wenn $s = q$, also $\alpha = 90^\circ$ gesetzt wird, und damit können wir für das sphärische Dreieck mit dem Mittelpunkt K_m die strenge Gleichung schreiben:

$$\sin \left(\frac{q}{M} - \frac{\eta^2 q^3}{6 M^3} \right) = \sin \sigma \sin \alpha_1 = \sin \left(\frac{s}{M} - \frac{\eta^2 s^3 \sin^2 \alpha}{6 M^3} \right) \sin \alpha_1$$

Wenn man dieses mit α_1 nach (17) entwickelt und in den höheren Gliedern $s \sin \alpha = q$ und $s \cos \alpha = p$ setzt, so wird man finden:

$$q = s \sin \alpha - \frac{p^2 q}{6 M^2} (1 - \eta^2) = s \sin \alpha - \frac{p^2 q}{6 M N} \quad (28)$$

Auf ähnliche Weise haben wir auch entwickelt:

$$p = s \cos \alpha + \frac{p q^2}{3 M N} \quad (29)$$

Da nach (24), $MN = r^2$ ist, haben wir nun als Zusammenfassung von (28), (28) und (29):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \frac{p q}{2 r^2} \\ q &= s \sin \alpha - \frac{p^2 q}{6 r^2} & p &= s \cos \alpha + \frac{p q^2}{3 r^2} \\ \text{oder:} \quad q &= s \sin \alpha - \frac{s^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{6 r^2} & p &= s \cos \alpha + \frac{s^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{3 r^2} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Diese Gleichungen haben bis zur Ordnung $\frac{1}{r^2}$ dieselbe Form wie die früheren *sphärischen* Formeln von § 44. (3) S. 249 und (8)–(11) S. 250–251.

Übergang zum allgemeinen Dreieck.

Nachdem für das betrachtete rechtwinklige geodätische Dreieck dieselben Formeln gefunden sind, wie früher für das rechtwinklige *sphärische* Dreieck in § 44. S. 249–251, ist auch der Übergang zu einem allgemeinen Dreieck ebenso zu machen, wie für das sphärische Dreieck Fig. 4. S. 251, und wir können daher den *Legendreschen* Satz bis zur Ordnung $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich nun auch für ein solches geodätisches Dreieck, das sich aus zwei rechtwinkligen Dreiecken von der Form Fig. 3. S. 456 zusammensetzen lässt, als bewiesen annehmen.

Das ist aber noch nicht der ganz allgemeine Fall, denn jenes rechtwinklige Dreieck Fig. 3. hat die Besonderheit, dass seine Katheten p und q in den Richtungen der beiden *Hauptkrümmungen* der Fläche liegen; und wir können daher nach dem bisherigen Beweisgang den *Legendreschen* Satz nur für solche geodätische Dreiecke als bewiesen annehmen, welche *eine* Seite in einer Haupt-Krümmungsrichtung liegen haben.

Indessen lässt sich der Übergang von einem solchen Dreieck gestalteten und auch gegen die Haupt-Krümmungsrichtungen beliebig vollends leicht bewerkstelligen, indem nach Fig. 4. das allgemeine zwei Dreiecke ACD und ABD zerlegt wird, welche die Seite AD in einer Krümmungsrichtung gemeinschaftlich haben.

Wenn ε_1 und ε_2 die Excesse dieser beiden Dreiecke ACD und ABD sind, so hat man nach Fig. 4.:

$$\begin{aligned} \frac{b}{d} &= \frac{\sin\left(D + \frac{\varepsilon_1}{3}\right)}{\sin\left(C - \frac{\varepsilon_1}{3}\right)}, & \frac{c}{d} &= \frac{\sin\left(D - \frac{\varepsilon_2}{3}\right)}{\sin\left(B - \frac{\varepsilon_2}{3}\right)} \\ \frac{b}{c} &= \frac{\sin B \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{3} \cotg B\right) \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{3} \cotg D\right)}{\sin C \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{3} \cotg C\right) \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{3} \cotg D\right)} \quad (31) \end{aligned}$$

Hiebei ist:

$$\varepsilon_1 = \frac{(q - e)p}{2r^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{(q' + e)p}{2r^2}, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{(q + q')p}{2r^2} = \frac{\alpha p}{2r^2} = \varepsilon \quad (32)$$

$$\cotg C = \frac{q}{p}, \quad \cotg D = \frac{e}{p}, \quad \cotg B = \frac{q'}{p}$$

Wenn man diese geometrischen Beziehungen in (31) berücksichtigt, so wird man bald finden:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B \left(1 - \frac{\varepsilon}{3} \cotg B\right)}{\sin C \left(1 - \frac{\varepsilon}{3} \cotg C\right)} = \frac{\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{3}\right)}{\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{3}\right)} \quad (33)$$

Dieses ist dieselbe Form wie diejenige des *Legendreschen* Satzes für kleine *sphärische* Dreiecke (§ 41.).

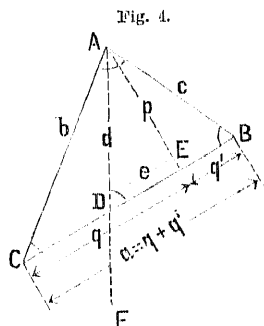
Wir heben noch besonders hervor, dass $\frac{\alpha p}{2}$ die Fläche F' des Dreiecks ABC in Fig. 4. ist, dass also nach (32):

$$\varepsilon = \frac{F'}{r^2} \quad (34)$$

Nun können wir allgemein folgendes aussprechen:

Ein kleines geodätisches Dreieck auf irgend einer krummen Fläche kann wie ein *sphärisches* Dreieck berechnet werden, das mit dem geodätischen Dreieck gleiche Seiten und gleiche Winkel hat, und auf einer Kugel liegt, deren Halbmesser der *mittlere* Krümmungs-Halbmesser r der krummen Fläche an der Stelle ist, auf welcher das geodätische Dreieck liegt. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Dreiecksseiten s *klein* seien im Verhältnis zum Halbmesser r , und die Rechnung ist nur richtig bis auf Glieder von der Ordnung $\eta^2 \frac{s^3}{r^3}$ einschliesslich (also $\eta^2 \frac{s^4}{r^4}$ und $\eta^1 \frac{s^2}{r^2}$ ausschliesslich).

Die *Änderung* von r^2 wird innerhalb des Bereiches des Dreiecks vernachlässigt.



Als ein zweites Beispiel betrachten wir ein durch zwei Meridiane und zwei Parallelkreise begrenztes Trapez des Umdrehungs-Ellipsoids (oder einer anderen Umdrehungsfläche), und wir bemerken dabei zuerst, dass die begrenzenden Parallelkreise *nicht* geodätische Linien sind, dass aber doch der Excess des Vierecks bestimmt ist.

In Fig. 2. sei $ABCD$ die kongruente Linien-Abbildung von drei Seiten eines solchen Trapezes, AB entspricht dem Parallelkreisbogen auf der Breite φ mit der Länge l , es ist daher in kongruenter Linien-Abbildung AB ein Kreisbogen vom Halbmesser $AS = BS = N \cotg \varphi$ und dem Centriwinkel Θ als Meridian-Konvergenz $= l \sin \varphi$, also:

$$BS = N \cotg \varphi \quad \Theta = l \sin \varphi \quad (1)$$

Der Meridianbogen zwischen den Breiten φ und $\varphi + \Delta\varphi$ giebt die kongruente Abbildung:

$$BC = M \Delta\varphi \quad (2)$$

Dabei sei M der Meridian-Krümmungshalbmesser für die Mittelbreite, indem $\Delta\varphi$ als nicht sehr gross angenommen ist.

Die dritte Seite CD ist kongruente Abbildung des Parallelkreisbogens in der Breite $\varphi + \Delta\varphi$, mit dem Längenschied l , d. h. es ist CD ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt S' auf BS und dessen Centriwinkel Θ' bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$CS' = N' \cotg (\varphi + \Delta\varphi) \quad \Theta' = l \sin (\varphi + \Delta\varphi) \quad (3)$$

Ebenso wie BC auf dem Halbmesser BS , kann man auch AD' auf AS kongruent abbilden, oder $D'A'$ auf dem Halbmesser $S'D$.

Man hat also einen nicht in sich selbst zurückkehrenden Linienzug $D'A'BCDA$ als kongruente Linien-Abbildung des Trapez-Umfanges auf dem Ellipsoid, wobei $D'A'$ und DA' als Abbildungen *desselben* Meridianbogens, beide in richtiger Länge, aber in verschiedenen Richtungen dargestellt sind, so dass der kleine Winkel ε , unter dem sie sich schneiden, den Winkelschlussfehler der Abbildung oder den geodätischen Excess des Trapezes auf der krummen Fläche darstellt. Um diesen Winkel ε näher zu bestimmen, haben wir aus Fig. 2.:

$$\varepsilon = \Theta' - \Theta$$

oder wegen (3):

$$\varepsilon = l (\sin (\varphi + \Delta\varphi) - \sin \varphi) = l \cos \varphi \Delta\varphi \quad (4)$$

Hiebei haben wir die Breiten-Differenz $\Delta\varphi$ als sehr klein angenommen als Differential behandelt. In gleichem Sinne ist auch schon bei (2) der bogen $= M \Delta\varphi$ gesetzt, und da der Parallelbogen $AB = N l \cos \varphi$ ist, kann kleines $\Delta\varphi$ die Fläche des Trapezes angegeben werden:

$$T' = M N l \cos \varphi \Delta\varphi$$

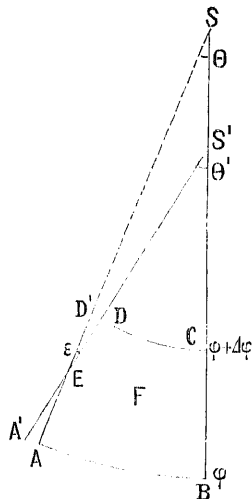
Der mittlere Krümmung-Halbmesser in dem schon früher bei definierten Sinne ist:

$$r = \sqrt{MN}$$

und daraus folgt durch Vergleichung mit (4):

$$\frac{T'}{r^2} = l \cos \varphi \Delta\varphi = \varepsilon$$

Fig. 2.



Damit ist bewiesen, dass auf dem Umdrehungs-Ellipsoid (allgemeiner auf jeder Umdrehungsfläche) der geodätische Excess eines unendlich schmalen Trapezes proportional der Trapezfläche F ist, und ebenso berechnet wird, wie wenn die Fläche F auf einer Kugel läge, deren Halbmesser r der *mittlere* Krümmungs-Halbmesser, d. h. nach (6), das geometrische Mittel aus den beiden Haupt-Krümmungshalbmessern M und N des Ellipsoids in der betreffenden Breite ist.

Der Längenunterschied l in (7) kann hierbei beliebig gross sein; zur weiteren Anwendung ist es aber nützlich, auch l unendlich klein anzunehmen, und damit den Satz auszusprechen, dass der Excess jedes unendlich kleinen Trapezes von der Form Fig. 2. sich nach der Formel (7) aus F und r^2 berechnen lässt. Endlich da jede andere unendlich kleine Fläche als zusammengesetzt aus unendlich kleinen Trapezen betrachtet werden darf, ist es nach dem Ergebnis unserer Betrachtung richtig, den Excess einer irgendwie begrenzten kleinen Fläche F des Umdrehungs-Ellipsoids, oder einer anderen Umdrehungsfläche, zu berechnen nach der Formel:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2} \quad (8)$$

Wir haben also für den Excess eines Trapezes einer Umdrehungsfläche dieselbe Berechnung wie für den Excess eines kleinen geodätischen Dreiecks nach (34) § 93. S. 459, und wir können nun den weiteren Schluss bilden, dass für einen durch kleine Dimensionen begrenzten Teil irgend einer krummen Fläche, der geodätische Excess durch die Formel (8) angegeben wird.

Konforme Linien-Abbildung.

Im Anschluss an die *kongruente* Linien-Abbildung in dem bisher betrachteten Sinn, kann man auch noch eine andere damit verwandte Art der Linien-Abbildung betrachten, für welche wir festsetzen, dass alle Brechungswinkel oder Krümmungen richtig dargestellt werden, dagegen die linearen Masse in irgend welcher Weise verzerrt erscheinen. Z. B. ein auf der krummen Erdoberfläche mit Theodolit und Messlaten gemessener Zug kann in einer Ebene so dargestellt werden, dass alle Brechungswinkel geodätisch richtig übertragen werden, dass aber die mit Messlaten gemessenen Polygonseiten an verschiedenen Stellen des ebenen Bildes in verschiedenen Massstäben aufgetragen werden. Eine solche ebene Darstellung eines geschlossenen Zuges auf einer krummen Fläche giebt in dem Winkelschluss-Widerspruch den geodätischen Excess ebenso, wie die früher betrachtete kongruente ebene Linien-Abbildung, dagegen werden die linearen Anschluss-Widersprüche in beiden Fällen verschieden.

Wir wollen die Linien-Abbildung mit richtigen Brechungs- und Krümmungs-Verhältnissen, aber mit veränderlichen Streckenmassstäben, *konforme* Linien-Abbildung nennen (entsprechend der konformen Flächen-Abbildung, bei welcher auch nur die Winkelverhältnisse richtig übertragen werden).

Die so definierte „konforme“ Linien-Abbildung ist nicht auf die Ebene beschränkt, d. h. sie gilt nicht nur für Übertragung von irgend einer Fläche auf die Ebene, sondern auch für Übertragung auf andere Flächen. So haben wir z. B. eine konforme Linien-Abbildung in der Übertragung vom Ellipsoid auf eine Kugel nach dem Gesetz der reduzierten Breiten (Fig. 1. und Fig. 2. S. 406), dabei wird eine geodätische Linie auf dem Ellipsoid als Grosskreisbogen auf eine Kugel abgebildet, mit unveränderten Azimuten. Wenn man ein geschlossenes geodätisches Dreieck in dieser Weise vom Ellipsoid auf die Kugel überträgt, so bekommt man einen *nicht* geschlossenen dreiseitigen sphärischen Linienzug, dessen sphärischer Winkelschluss-Fehler die Differenz zwischen dem geodätischen Excess und dem sphärischen Excess ist. Wir werden dieses in § 100. weiter verfolgen.

§ 95. Geodätische rechtwinklige Coordinaten und Polar-Coordinaten.

Ganz analog den Coordinaten-Systemen, welche wir in der Ebene mit geraden Linien und auf der Kugel mit grössten Kreisen benützen, kann man auch auf irgend einer Fläche mit geodätischen Linien Coordinaten-Systeme anordnen.

In Fig. 1. sei OG eine geodätische Linie, auf welcher ein Punkt P durch das

Mass $OP = p$ bestimmt ist, und ebenso auch andere Punkte P' , P'' u. s. w. durch ihre auf der geodätischen Linie OG gemessenen Abstände.

In den Punkten P , P' , P'' u. s. w. werden geodätische Linien PQ , $P'Q'$, $P''Q''$ u. s. w. rechtwinklig zu OG gezogen, und auf den Linien PQ werden gleiche Masse q abgetragen, so dass eine geodätische Parallele HH' entsteht, und eine zweite Parallele KK' im Abstände $q + dq$ von der Anfangslinie OG .

Solcher Linien der zwei Systeme PQ und HH' können wir ganze Scharen gezogen denken; dieselben schneiden sich gegenseitig rechtwinklig (geodätische Parallele S. 375—376) und bilden ein System von Vierecken, deren eines $ABCD$ in Fig. 1. besonders hervorgehoben ist.

Die ganze Anordnung der Linien in Fig. 1. können wir ein rechtwinkliges geodätisches Coordinaten-System nennen, mit dem Nullpunkte O , von welchem die Abscissen p in der Richtung OG , und die Ordinaten q rechtwinklig zu OG gezählt werden. Es hat also der Punkt B die Coordinaten p , q , der Punkt C hat p , $q + dq$, der Punkt A hat $p + dp$, q u. s. w.

Der Abscissen-Unterschied $P'P''$ ist $-dp$ angenommen, und das entsprechende Mass BA haben wir mit ndp bezeichnet, wobei n eine von der Krümmung der Fläche abhängige Function ist, mit welcher wir uns später besonders zu beschäftigen haben werden.

Nachdem somit alle Verhältnisse des Vierecks klar gemacht sind, betrachten wir in Fig. 2. die kongruente ebene Abbildung des Linienzuges $ABCD$ in dem Sinne von § 94.

Der Linienzug $ABCD A$ wird in der kongruenten Abbildung nicht schliessen, sondern einen Winkelschluss-Fehler $\varepsilon = \omega' - \omega$ geben, den wir nun näher zu bestimmen haben.

Der Winkel ω kann mit den Bezeichnungen von Fig. 2. dargestellt werden (auch bei windschiefer Viereck) in der Form:

$$\omega = - \frac{d(ndp)}{dq} \quad (1)$$

Dabei soll ω selbst als absolut gelten, und die Ableitung von ndp nach q muss negativ gesetzt werden, wenn ndp abnimmt bei wachsendem q , wie in Fig. 2. angenommen ist.

Der kleine Winkel $\varepsilon = \omega' - \omega$ kann als Differential von ω aufgefasst werden, d. h.:

$$\varepsilon = d\omega = - \frac{d^2(ndp)}{dq^2} dq \quad (2)$$

Betrachtet man ferner die Fläche I' des Vierecks, d. h. $I' = ndp dq$, so hat man nach (34) § 93. S. 459 und (8) § 94. S. 462:

$$\varepsilon = \frac{I'}{r^2} = \frac{ndp dq}{r^2} \quad (3)$$

Fig. 1.

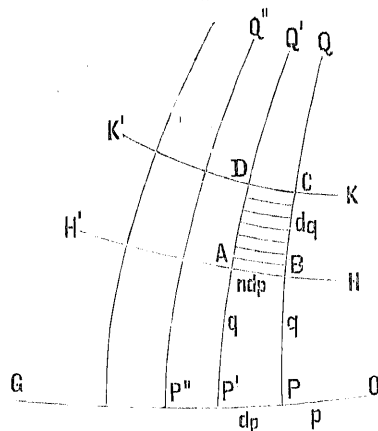
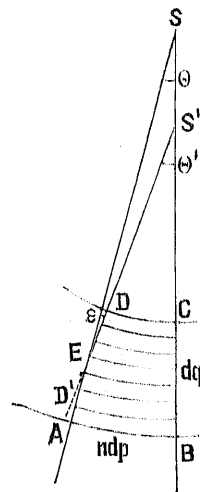


Fig. 2.



Aus (2) und (3) folgt:

$$\frac{1}{r^2} = - \frac{1}{n} \frac{1}{dp} \frac{d^2(n dp)}{dq^2} \quad (4)$$

Bei dieser Betrachtung gilt aber in der zweiten Ableitung von $n dp$ nach q der Faktor dp als konstant (vgl. $PP' = dp$ in Fig. 1.), es wird also:

$$\frac{1}{r^2} = - \frac{1}{n} \frac{d^2 n}{dq^2} \quad (5)$$

Man kann diese wichtige Gleichung (5) bzw. (4) auch dadurch aus Fig. 2. ableiten, dass man eine *Kurve* AD betrachtet, welche AS und $D'S'$ berührt, also in ihrer Krümmung den Winkel α giebt. Der Krümmungshalbmesser der Kurve AD kann als Reciproke von $\frac{d^2(n dp)}{dq^2}$ genommen werden, und damit kommt man ebenfalls auf die Formel (2) und dann auf (5).

Die grosse Wichtigkeit, welche die Differential-Formel (5) für die Geodäsie besitzt, beruht darin, dass dadurch eine Beziehung hergestellt wird zwischen geodätisch *zugänglichen* Massen $n dp$, dq u. s. w. einerseits, und dem geodätisch *unzugänglichen* Krümmungshalbmesser r andererseits. Legt man das Messungs-System Fig. 1. in einer *Ebene* an, so wird das Viereck $ABCD$ ein Rechteck mit $BA = CD = PP'$, und die geodätisch messbaren Verkürzungen von BA und CD gegen PP' , welche man auf einer krummen Fläche findet, gestatten nach dem Gesetz der Formel (5) einen Schluss auf die Krümmung der Fläche.

Polar-Coordinaten.

In ähnlicher Weise, wie ein System rechtwinkliger Coordinaten in Fig. 1. gebildet wurde, kann man auch ein System von Polar-Coordinaten mit geodätischen Linien anordnen.

Man braucht nur anzunehmen, dass in Fig. 1. die geodätischen Linien PQ , $P'Q'$, $P''Q''$ u. s. w., welche alle von einer Abscissenlinie OP ausgehen, statt dessen alle von einem *Punkte* (in der Verlängerung von Q) ausgehen, oder alle nach einem Punkte zusammenlaufen, und dass dann die Linien II' , KK' , nicht mehr geodätische Parallelen, sondern geodätische Kreise um jenen Punkt seien; dann kann man alles was sich auf Fig. 1. bezieht, auch auf das beschriebene Polar-System übertragen.

Das Krümmungsmass.

Als „*mittleren Krümmungshalbmesser*“ r in einem Punkte einer krummen Fläche haben wir das geometrische Mittel der beiden Haupt-Krümmungshalbmesser N und M bezeichnet, also $r = \sqrt{MN}$ oder $r^2 = MN$ gesetzt.

Der reciproke Wert von r^2 wird nach *Gauss* das „*Krümmungsmass*“ genannt, d. h. es ist:

$$\text{Krümmungsmass } k = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{MN} \quad (6)$$

und mit dieser neuen Bezeichnung schreiben wir die wichtige Gleichung (5) nochmals, d. h.:

$$k = \frac{1}{r^2} = - \frac{1}{n} \frac{d^2 n}{dq^2} \quad (7)$$

Wir benützen die Benennung „*Krümmungsmass*“ (*mensura curvaturae*) in diesem Sinne als eine durch *Gauss* eingeführte und bereits feststehende.

Gleichzeitig damit ist der Begriff und die Bezeichnung Gesamtkrümmung (curvatura totalis seu integra) eines begrenzten Flächenteils eingeführt worden, nämlich:

$$\text{Gesamtkrümmung} = \int k dF \quad (8)$$

Das Produkt eines differentialen Flächenteils dF in das für einen einzelnen Punkt von dF gültige, und im Bereiche von dF als konstant zu betrachtende Krümmungsmass k , giebt die Gesamtkrümmung des Flächenteils dF , und das bei (8) angegebene Integral giebt die Gesamtkrümmung des Flächenteils F .

Diese Begriffe und Benennungen hängen damit zusammen, dass die Gesamtkrümmung eines Flächenteils F gemessen werden kann durch einen entsprechenden Teil F' einer Kugel vom Halbmesser $= 1$, indem alle Flächen-Normalen der Begrenzungs-Linie von F mit sich selbst parallel in den Kugelmittelpunkt verlegt werden, und so den Teil F' der Kugel begrenzen, welcher gewissermassen ein Abbild des Flächenteils F wird.

Die von Gauss in Art. 6. der „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ eingeführten Definitionen und Benennungen, betreffend das Krümmungsmass k und die Gesamtkrümmung, bilden keinen wesentlichen Bestandteil der allgemeinen Theorie der geodätischen Dreiecke, namentlich kann der Begriff der Gesamtkrümmung in der Geodäsie entbehrt und durch den „geodätischen Excess“ ersetzt werden.

Sobald man sich überzeugt hat, dass für einen unendlich kleinen krummen Flächenteil dF der durch kongruente Umfangs-Abbildung (§ 94.) darzustellende geodätische Excess $d\epsilon = k dF$ ist (wo $k = 1 : r^2$), so kann man auch nach geometrischer Anschauung so weiterschliessen:

Die Fläche F wird in eine grosse Zahl kleiner Teilflächen dF zerlegt, welche alle ihrem Umfang nach in einer Ebene geschlossen, folglich *nicht* kongruent, abgebildet werden. Bei einem ersten Teil dF_1 wird in der Abbildung der Schluss erzwungen durch eine lineare relative Krümmung $d\epsilon_1$, welche irgendwo an dem Umfang von dF_1 angebracht werden muss. Ein an dieser Stelle ansetzender zweiter Flächenteil dF_2 muss dann, wenn er in der Ebene geschlossen dargestellt werden soll, nicht bloss seinen eigenen Excess $d\epsilon_2$, sondern auch den von dF_1 ihm zugeschobenen Betrag $d\epsilon_1$, durch eine der konformen Abbildung widersprechende lineare Krümmung $d\epsilon_1 + d\epsilon_2$ zum Ausdruck bringen. So wird das ebene Kartenbild $\int dF'$, wenn es die einzelnen Teile dF' sämtlich *geschlossen* darstellt, an seinem Umfange allmählich alle Beträge $d\epsilon$ in Gestalt von linearen Krümmungen, die der kongruenten Abbildung des Umfangs widerstreiten, zum Ausdruck bringen, und der Polygon-Schlussfehler ϵ des kongruent abgebildeten gedachten Umfangs wird daher der Summe aller Einzel-Excesse der Flächenteile gleich sein, d. h.:

$$\epsilon = \int k dF \quad (9)$$

Dieses ist mit (8) übereinstimmend.

Bei einer *abwickelbaren* Fläche ist in jedem Punkte der eine Haupt-Krümmungshalbmesser unendlich, der andere endlich, setzen wir also $N = \infty$, $M = M$, so wird auch $r^2 = \infty$ und $k = 0$, folglich auch die Gesamtkrümmung nach (8) und der Excess ϵ nach (9) beide $=$ Null.

Wenn man hier den geodätisch entbehrlichen Begriff der Gesamtkrümmung bei Seite lässt, und nur von geodätischem Excess nach der Definition (9) redet, so vermeidet man die Abweichung der Gauss'schen Terminologie von dem gewöhnlichen

Sprachgebrauche, welche darin liegt, dass eine abwickelbare Fläche, z. B. ein Cylinder, mit der Gesamtkrümmung = Null behaftet, d. h. als ungekrümmt bezeichnet wird.

Übrigens muss dieser Fall $k = 0$ in vielen unserer früheren, nur auf das Erd-Ellipsoid berechneten Entwicklungen ausgeschlossen werden, wegen folgender mehrfach benützter Formeln:

$$\frac{N}{M} = V^2 = 1 + \eta^2, \quad \eta^2 = \frac{N - M}{M}.$$

Beim Erd-Ellipsoid ist η^2 eine kleine Grösse, und wir haben häufig η^4 gegen η^2 vernachlässigt, was für $k = 0$ mit $N = \infty$ ganz unzulässig wäre. In allen Fällen, in welchen wir in diesem Sinne η^4 und η^6 u. s. w. gegen η^2 vernachlässigt haben, ist die strenge Definition, dass r das *geometrische* Mittel aus N und M sei, verlassen, denn auch das *arithmetische* Mittel und viele andere Mittel-Funktionen von M und N sind bei Vernachlässigung von η^4 als gleich zu betrachten.

Alle unsere von § 94. bis hierher geführten allgemeinen geometrischen Betrachtungen sind entstanden aus dem Wunsche, die Formel (7), $k = -\frac{1}{n} \frac{d^2 n}{d q^2}$, welche zum weiteren gebraucht wird, auf geometrisch anschaulichem Wege zu begründen. Diese Formel hat Gauss in Art. 19. der Abhandlung „Disquisitiones generales“ etc. gegeben (mit anderen Zeichen: $k = -\frac{1}{m} \frac{d^2 m}{d p^2}$); und durch geometrisch anschauliche Herleitung dieser Formel haben wir den geodätischen Schlussatz Art. 20. — 28. jener klassischen Abhandlung auch ohne den abstrakt mathematischen Teil von Art. 1. — Art. 19. dem Geodäten zugänglich gemacht.

Die fragliche Abhandlung ist: „Disquisitiones generales circa superficies curvas, auctore Carolo Friderico Gauss, Göttingae 1828 (societati regiae oblatas d. 8. Octob. 1827) und in „Carl Friedrich Gauss Werken“, IV. Band, Göttingen 1873, S. 217—258.

In neuester Zeit wurde die Abhandlung in deutscher Übersetzung herausgegeben: „Allgemeine Flächentheorie u. s. w. von A. Wangerin, Leipzig, Engelmann 1889.

Unsere nachfolgenden § 96. — § 99. bringen die Schluss-Artikel 20. — 28. der Disquisitiones generales zur Darstellung.

§ 96. Verbindung eines rechtwinkligen Systems und eines Polar-Systems.

In Fig. 1.*) S. 467 ist O der Ausgangspunkt zweier geodätischer Coordinatensysteme, eines rechtwinkligen Systems und eines Polar-Systems, so dass z. B. der Punkt A die rechtwinkligen Coordinaten p, q und die Polar-Coordinaten s, α hat. Entsprechend hat der Punkt B die rechtwinkligen Coordinaten $p + dp, q + dq$ und die Polar-Coordinaten $s + ds, \alpha + d\alpha$.

Ausser dem Richtungswinkel α des Polar-Systems ist der Winkel β eingeführt, welchen der Strahl s und die Ordinate q bei A miteinander bilden.

Zwischen beiden Ordinaten q und $q + dq$ bei A sei der Querabstand $AD = n dp$, und entsprechend $AC = m d\alpha$ der Querabstand bei A zwischen den beiden Strahlen OA und OB .

Dabei sind n und m Funktionen von ähnlicher Bedeutung wie n im vorigen § 95. bei (1) — (5) S. 463—464. Zur Verdeutlichung dieser Funktionen n und m mag man sich etwa den Fall denken, dass das ganze System auf einer Kugel vom Halbmesser r läge, dann wäre sehr einfach:

*) Die Bezeichnungen sind im wesentlichen die Gauss'schen von Art. 23. u. ff. der „Disquisitiones generales“; nur α, β und s stehen statt der Gauss'schen φ, ψ und r , weil wir φ für die geographische Breite und r für den mittleren Krümmungshalbmesser vorbehalten wollen.

$$\left. \begin{aligned} n &= \cos \frac{q}{r} & m &= \sin \frac{s}{r} \\ \text{oder entwickelt: } n &= 1 - \frac{q^2}{2r^2} + \dots & m &= \frac{s}{r} - \frac{s^3}{6r^3} + \dots \end{aligned} \right\} \text{ (Kugel) } \quad (1)$$

Zur Untersuchung des allgemeinen Falles irgend einer krummen Fläche, auf welcher das System Fig. 1. liege, betrachten wir zuerst das kleine Viereck $ACBD$, welches bei C und D rechtwinklig ist. Indem wir in differentialem Sinne dieses Viereck als *eben* behandeln, entnehmen wir aus demselben durch Koordinaten-Umformung die Gleichungen:

$$ds = n dp \sin \beta + dq \cos \beta \quad (2)$$

$$m d\alpha = dq \sin \beta - n dp \cos \beta \quad (3)$$

oder in Gestalt von Differential-Gleichungen:

$$\frac{\partial s}{\partial p} = n \sin \beta \quad \frac{\partial s}{\partial q} = \cos \beta \quad (4)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p} = -\frac{n}{m} \cos \beta \quad \frac{\partial \alpha}{\partial q} = \frac{1}{m} \sin \beta \quad (5)$$

Aus den beiden Gleichungen (4) folgt durch Quadrieren:

$$n^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)^2 + n^2 \left(\frac{\partial s}{\partial q} \right)^2 \quad (6)$$

ferner aus (4) und (5) durch Multiplizieren:

$$\frac{\partial s}{\partial p} \frac{\partial \alpha}{\partial p} = -n^2 \frac{\partial s}{\partial q} \frac{\partial \alpha}{\partial q} \quad (7)$$

Nun muss die Funktion n entsprechend der Flächen-Krümmung eingeführt werden. Um die Beziehung von n zu der Flächen-Krümmung zunächst unbestimmt zu halten, wird n als algebraische Funktion mit unbestimmten Coefficienten $f, g, h \dots$ eingeführt:

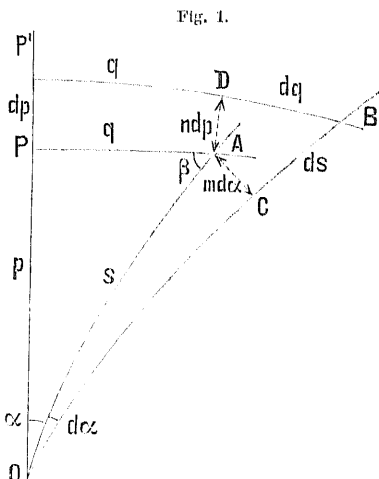
$$n = 1 + f q^2 + g q^3 + h q^4 + \dots \quad (8)$$

Dabei ist kein Glied mit der ersten Potenz q angenommen, weil nach (1) die Bedeutung von n so ist, dass auf einer Kugel kein Glied mit q vorkommt, und weil dasselbe auch bei dem Ellipsoid und allen Flächen von stetiger konvex-konvexer Krümmung der Fall ist, oder allgemeiner, weil dem rechtwinkligen Abgehen der Ordinaten q von der Abscissenaxe OP in Fig. 1., die erste Ableitung $\frac{dn}{dq}$ für $q = 0$, selbst $= 0$ entsprechen muss.

Durch die Gleichung (8) ist n nur als Funktion von q dargestellt; um n auch als Funktion von p zu erhalten, muss man die Coefficienten f, g, h u. s. w. von (8) selbst wieder als Funktionen von p darstellen, dieses geschehe durch die Annahmen:

$$\left. \begin{aligned} f &= f_0 + f_1 p + f_2 p^2 + \dots \\ g &= g_0 + g_1 p + g_2 p^2 + \dots \\ h &= h_0 + h_1 p + h_2 p^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Wenn man diese Ausdrücke (9) in (8) einsetzt, und dabei nur die Glieder bis zur vierten Potenz einschliesslich beibehält, so erhält man:



$$\left. \begin{aligned} n &= 1 + f_0 q^2 + f_1 p q^2 + f_2 p^2 q^2 + \dots \\ &\quad + g_0 q^3 + g_1 p q^3 + \dots \\ &\quad + h_0 q^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Wenn man dieses zweimal partiell nach q ableitet, und dann wieder die Bedeutung der Coefficienten (9) berücksichtigt, oder wenn man unmittelbar (8) nach q zweimal ableitet, so bekommt man:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial q^2} = 2f + 6gq + 12hq^2 \quad (11)$$

Durch diese Annahmen für die Funktion n ist die krumme Fläche, auf welcher das Coordinatensystem Fig. 1. liegt, soweit charakterisiert, als für die nachfolgenden geodätischen Aufgaben nötig ist; für die analoge Funktion m dürfen nicht etwa ebenfalls unabhängige Annahmen gemacht werden, weil m bereits mit n durch die erste Gleichung (5) verbunden ist.

Nun kann man den Ausdruck für das Krümmungsmass nach (5) und (7) § 95. S. 464 anwenden:

$$-k = \frac{1}{n} \frac{d^2 n}{dq^2}$$

Wenn man (8) und (11) hier einsetzt, so bekommt man:

$$-k = \frac{2f + 6gq + 12hq^2}{1 + fq^2 + gq^3 + hq^4}$$

oder bis zur zweiten Potenz einschliesslich genau:

$$-k = 2(f + 3gq + 6hq^2)(1 - fq^2) = 2(f + 3gq + (6h - f^2)q^2)$$

Wenn man hier wieder die Coefficienten (9) einsetzt, so bekommt man bis zur zweiten Ordnung einschliesslich:

$$\left. \begin{aligned} k &= -2f_0 - 2f_1 p - 6g_0 q \\ &\quad - 2f_2 p^2 - 6g_1 p q - (12h_0 - 2f_0^2) q^2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Wir werden nun aber k auf eine *lineare* Funktion beschränken, d. h. wir werden setzen:

$$k = -2f_0 - 2f_1 p - 6g_0 q \quad (14)$$

Diese Annahme (14) schliesst in sich, dass in (13) ist:

$$f_2 = 0, \quad g_1 = 0, \quad 12h_0 = 2f_0^2 \text{ oder } h_0 = \frac{1}{6} f_0^2 \quad (15)$$

Damit reduziert sich auch das frühere n von (10) auf:

$$n = 1 + f_0 q^2 + f_1 p q^2 + g_0 q^3 + \frac{1}{6} f_0^2 q^4 \quad (16)$$

Im folgenden braucht man mehrfach auch $\frac{1}{n}$, weshalb man nach (8) S. 197 entwickelt:

$$\frac{1}{n} = 1 - f_0 q^2 - f_1 p q^2 - g_0 q^3 + \frac{5}{6} f_0^2 q^4 \quad (17)$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir zur Theorie des geodätischen Dreiecks übergehen.

§ 97. Reihen-Entwicklung für das rechtwinklige geodätische Dreieck.

Wir haben von (6) § 96. S. 467:

$$n^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)^2 + n^2 \left(\frac{\partial s}{\partial q} \right)^2 \quad (1)$$

Um hier statt der Ableitungen von s nach p und nach q die entsprechenden Ableitungen von s^2 einzuführen, hat man:

$$\frac{\partial (s^2)}{\partial p} = \frac{\partial (s^2)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial p} = 2s \frac{\partial s}{\partial p} \quad \text{und} \quad \frac{\partial (s^2)}{\partial q} = 2s \frac{\partial s}{\partial q} \quad (1a)$$

also:
$$n^2 = \left(\frac{1}{2s} \frac{\partial (s^2)}{\partial p} \right)^2 + n^2 \left(\frac{1}{2s} \frac{\partial (s^2)}{\partial q} \right)^2$$

oder:
$$4s^2 = \left(\frac{1}{n} \frac{\partial (s^2)}{\partial p} \right)^2 + \left(\frac{\partial (s^2)}{\partial q} \right)^2 \quad (2)$$

Denkt man sich s^2 in eine Reihe nach Potenzen von p und q entwickelt, so wird diese Reihe mit den Gliedern $p^2 + q^2$ beginnen, weil für unendlich kleine Werte p und q die Fig. 1. S. 471 auf ein ebenes rechtwinkliges Dreieck zusammenschrumpft. Wir wollen daher die Reihe für s^2 zunächst in folgender Form annehmen:

$$s^2 = p^2 + q^2 + A p^2 q + B p q^2 \quad (3)$$

wobei A und B vorläufig unbestimmt angenommene Coefficienten sind, welche durch Vergleichung mit (2) bestimmt werden müssen. Man hat zunächst aus (3):

$$\frac{\partial (s^2)}{\partial p} = 2p + 2A p q + B q^2 + \dots \quad (4)$$

hiezv von (17) § 96. S. 468:
$$\frac{1}{n} = 1 - f_0 q^2 + \dots$$

Ferner aus (3):

$$\frac{\partial (s^2)}{\partial q} = 2q + A p^2 + 2B p q + \dots \quad (5)$$

Aus (4) und (5) kann man den Ausdruck (2) zusammen setzen; man erhält bis zur dritten Potenz:

aus (2):
$$4s^2 = 4p^2 + 4q^2 + 12A p^2 q + 12B p q^2$$

andererseits aus (3):
$$4s^2 = 4p^2 + 4q^2 + 4A p^2 q + 4B p q^2$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt als Coefficienten-Vergleichung $12A = 4A$ und $12B = 4B$, d. h. $A = 0$ und $B = 0$.

Man findet also, dass in der Reihe (3) nur die zwei ersten Glieder bestehen, und dass die Glieder mit dritten Potenzen $p^2 q$ und $p q^2$ verschwinden. Wir machen deshalb nun eine Annahme mit Gliedern vierter Ordnung, d. h. statt (3) sei nun:

$$s^2 = p^2 + q^2 + A p^3 q + B p^2 q^2 + A' p q^3 \quad (6)$$

Dieses giebt:

$$\frac{\partial (s^2)}{\partial p} = 2p + 3A p^2 q + 2B p q^2 + A' q^3 \quad (7)$$

hiezv von (17) §. 96. S. 468:
$$\frac{1}{n} = 1 - f_0 q^2 - \dots$$

Ferner aus (6):

$$\frac{\partial (s^2)}{\partial q} = 2q + A p^3 + 2B p^2 q + 3A' p q^2 \quad (8)$$

Wenn man aus (7) und (8) die Formel (2) zusammensetzt, so findet man:

$$\text{aus (2):} \quad 4s^2 = 4p^2 + 4q^2 + 16A p^3 q + 8(2B - f_0) p^2 q^2 + 16A' p q^3$$

$$\text{andererseits aus (6):} \quad 4s^2 = 4p^2 + 4q^2 + 4A p^3 q + 4B p^2 q^2 + 4A' p q^3$$

Die Coefficienten-Vergleichung in diesen beiden Gleichungen giebt:

$$16A = 4A$$

$$16B - 8f_0 = 4B$$

$$16A' = 4A'$$

$$\text{d. h.:} \quad A = 0$$

$$B = \frac{2}{3} f_0$$

$$A' = 0$$

Folglich nun nach (6):

$$s^2 = p^2 + q^2 + \frac{2}{3} f_0 p^2 q^2 \quad (9)$$

Auf diesem Wege eine Stufe weiter gehend, erhält man bis zur fünften Ordnung:

$$s^2 = p^2 + q^2 + \frac{2}{3} f_0 p^2 q^2 + \frac{1}{2} f_1 p^3 q^2 + \frac{1}{2} g_0 p^2 q^3 \quad (10)$$

Um zur sechsten Ordnung zu gelangen, fügen wir zu (10) noch folgende unbestimmte Glieder hinzu (wobei A, B, C wieder *neue* Bedeutungen haben):

$$+ A p^6 + B p^5 q + C p^4 q^2 + D p^3 q^3 + C' p^2 q^4 + B' p q^5 + A' q^6 \quad (10a)$$

Wenn man damit den Ausdruck (2) bildet, so erhält man:

$$\begin{aligned} 4s^2 = & 4p^2 + 4q^2 + \frac{8}{3} f_0 p^2 q^2 + 2f_1 p^3 q^2 + 2g_0 p^2 q^3 \\ & + 24A p^6 + 24B p^5 q + \left(24C + \frac{16}{9} f_0^2\right) p^4 q^2 + 24D p^3 q^3 \\ & + 24A' q^6 + 24B' p q^5 + \left(24C' + \frac{16}{9} f_0^2\right) p^2 q^4 \end{aligned}$$

Wenn man dieses, in Hinsicht auf die Coefficienten, mit (10) und (10a) vergleicht, so sieht man, dass A, B, D, B', A' sämtlich = 0 werden, und es wird:

$$C = C' = -\frac{4}{45} f_0^2$$

Damit giebt die bis zur sechsten Ordnung vervollständigte Reihe (10) und (10a):

$$s^2 = p^2 + q^2 + \frac{1}{6} (4f_0 p^2 q^2 + 3f_1 p^3 q^2 + 3g_0 p^2 q^3) - \frac{4}{45} f_0^2 (p^4 q^2 + p^2 q^4) \quad (11)$$

Dabei ist für lineare Funktion k , nach (15) § 96. S. 468, $f_2 = 0$, $g_1 = 0$ und $h_0 = \frac{1}{6} f_0^2$ gesetzt. (Wenn man diese beschränkenden Annahmen für f_2, g_1 und h_0 nicht macht, bekommt man statt der vorstehenden (11) die allgemeinere Formel [1] von Art. 24. der „Disquis. gen.“.)

Einführung des Krümmungsmasses.

Der allgemeine lineare Ausdruck für das Krümmungsmass ist nach (14) § 96. S. 468:

$$k = -2f_0 - 2f_1 p - 6g_0 q \quad (12)$$

Wenden wir diese Funktion auf unseren Fall nach Andeutung von Fig. 1. an, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} k_\alpha &= -2f_0 \\ k_{\beta_0} &= -2f_0 - 2f_1 p \\ k_\beta &= -2f_0 - 2f_1 p - 6g_0 q \end{aligned} \right\} \quad (13) \quad \begin{array}{c} \text{Fig. 1.} \\ \begin{array}{c} K_{\beta_0} \quad q \\ \nearrow 90^\circ \quad \beta \\ p \quad \searrow \quad K_\beta \\ \quad \quad s \\ K_\alpha \quad \alpha \end{array} \end{array}$$

Dieses ist gerade der Ausdruck, welcher in der grossen Klammer von (11) vorkommt, und wenn wir zugleich in der letzten Klammer von (11) statt $4f_0^2$ den Wert k_α^2 aus (13) setzen, oder weil es in dem letzten Gliede einer konvergierenden Reihe ist, kurzweg k statt k_α , so geht (11) über in:

$$s^2 = p^2 + q^2 - \frac{k_\alpha + 2k_{\beta_0} + k_\beta}{12} p^2 q^2 - \frac{k^2}{45} p^2 q^2 (p^2 + q^2) \quad (14)$$

Reihen-Entwicklungen für $s \sin \alpha$ und $s \cos \alpha$.

Von den allgemeinen Differential-Formeln des § 96. haben wir (4) S. 467:

$$n \sin \beta = \frac{\partial s}{\partial p} \quad \text{und} \quad \cos \beta = \frac{\partial s}{\partial q}$$

oder mit Einführung der Veränderlichen s^2 , wie oben bei (1a):

$$\begin{aligned} n \sin \beta &= \frac{1}{2s} \frac{\partial (s^2)}{\partial p} & \cos \beta &= \frac{1}{2s} \frac{\partial (s^2)}{\partial q} \\ 2s \sin \beta &= \frac{1}{n} \frac{\partial (s^2)}{\partial p} & 2s \cos \beta &= \frac{\partial (s^2)}{\partial q} \end{aligned} \quad (15)$$

Nun ist s^2 nach (11) bestimmt worden, woraus man durch Differenzieren findet:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (s^2)}{\partial p} &= 2p + \frac{4}{3} f_0 p q^2 + \frac{3}{2} f_1 p^2 q^2 + g_0 p q^3 - \frac{16}{45} f_0^2 p^3 q^2 - \frac{8}{45} f_0^2 p^4 q \\ \text{hiez u (17) S. 468: } \frac{1}{n} &= 1 - f_0 q^2 - f_1 p q^2 - g_0 q^3 + \frac{5}{6} f_0^2 q^4 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Ferner die Ableitung nach q von (11):

$$\frac{\partial (s^2)}{\partial q} = 2q + \frac{4}{3} f_0 p^2 q + f_1 p^3 q + \frac{3}{2} g_0 p^2 q^2 - \frac{8}{45} f_0^2 p^4 q - \frac{16}{45} f_0^2 p^2 q^3 \quad (17)$$

Die beiden Gleichungen (15) lassen sich nach (16) und (17) ausführen, und geben:

$$s \sin \beta = p - \frac{1}{3} f_0 p q^2 - \frac{1}{4} f_1 p^2 q^2 - \frac{1}{2} g_0 p q^3 - \frac{8}{45} f_0^2 p^3 q^2 + \frac{7}{90} f_0^2 p^4 q \quad (18)$$

$$s \cos \beta = q + \frac{2}{3} f_0 p^2 q + \frac{1}{2} f_1 p^3 q + \frac{3}{4} g_0 p^2 q^2 - \frac{4}{45} f_0^2 p^4 q - \frac{8}{45} f_0^2 p^2 q^3 \quad (19)$$

Wenn man wieder die Krümmungsmasse nach (13) einführt, so bringt man (18) und (19) auf diese Formen:

$$s \sin \beta = p + \frac{k_\alpha + k_{\beta_0} + 2k_\beta}{4} \frac{p q^2}{6} - \frac{k^2}{360} p q^2 (16 p^2 - 7 q^2) \quad (20)$$

$$s \cos \beta = q - \frac{2k_\alpha + 3k_{\beta_0} + 3k_\beta}{8} \frac{p^2 q}{3} - \frac{k^2}{45} p^2 q (p^2 + 2 q^2) \quad (21)$$

Diese Gleichungen gelten natürlich auch für den anderen Winkel α , und gehen mit entsprechender Vertauschung der p , q und der k :

$$s \sin \alpha = q + \frac{k\beta + k_{90} + 2k_{\alpha}}{4} \frac{p^2 q}{6} - \frac{k^2}{360} p^2 q (16q^2 - 7p^2) \quad (22)$$

$$s \cos \alpha = p - \frac{2k\beta + 3k_{90} + 3k_{\alpha}}{8} \frac{p q^2}{3} - \frac{k^2}{45} p q^2 (q^2 + 2p^2) \quad (23)$$

Zur Probe kann man auch rechnen:

$$(s \sin \beta)^2 + (s \cos \beta)^2 = s^2 \quad \text{oder} \quad (s \sin \alpha)^2 + (s \cos \alpha)^2 = s^2$$

Man wird dadurch denselben Ausdruck für s^2 finden, wie schon bei (14).

Man kann die Reihen (20) — (23) auch umkehren (ähnlich wie in § 44, S. 250 bis 251 die Reihen für $s \sin \alpha$ und $s \cos \alpha$ umgekehrt wurden). Man findet:

$$p = s \cos \alpha + \frac{s^3}{3} \sin^2 \alpha \cos \alpha - \frac{3k_{\alpha} + 3k_{90} + 2k_{\beta}}{8} + \frac{k^2}{15} p q^2 (p^2 + 2q^2) \quad (24)$$

$$q = s \sin \alpha - \frac{s^3}{6} \sin \alpha \cos^2 \alpha - \frac{2k_{\alpha} + k_{90} + k_{\beta}}{4} + \frac{k^2}{120} p^2 q (p^2 - 8q^2) \quad (25)$$

Dabei ist im letzten Glied $p = s \cos \alpha$ und $q = s \sin \alpha$ genommen.

Ausserdem kann man durch Zeichenvertauschung auch folgende Formeln bilden:

$$p = s \sin \beta - \frac{s^3}{6} \sin \beta \cos^2 \beta - \frac{k_{\alpha} + k_{90} + 2k_{\beta}}{4} + \frac{k^2}{120} p q^2 (q^2 - 8p^2) \quad (26)$$

$$q = s \cos \beta + \frac{s^3}{3} \sin^2 \beta \cos \beta - \frac{2k_{\alpha} + 3k_{90} + 3k_{\beta}}{8} + \frac{k^2}{15} p^2 q (2p^2 - q^2) \quad (27)$$

Geodätischer Excess des rechtwinkligen Dreiecks.

Nach Fig. 1, S. 471 ist:

$$\varepsilon = (\alpha + \beta + 90^\circ) - 180^\circ = \alpha + \beta - 90^\circ \quad (28)$$

$$\sin \varepsilon = -\cos(\alpha + \beta) = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta \quad (29)$$

Da wir die Reihen für $s \sin \alpha$, $s \sin \beta$, sowie $s \cos \alpha$, $s \cos \beta$ in (20) haben, können wir die zwei zu (29) erforderlichen Produkte bilden, nämlich:

$$\begin{aligned} s^2 \sin \alpha \sin \beta &= p q + \frac{p^3 q}{6} - \frac{2k_{\alpha} + k_{90} + k_{\beta}}{4} + \frac{k^2}{360} p^3 q (7p^2 - 16q^2) \\ &\quad + \frac{p q^3}{6} - \frac{k_{\alpha} + k_{90} + 2k_{\beta}}{4} + \frac{k^2}{36} p^3 q^3 \\ &\quad + \frac{k^2}{360} p q^3 (-16p^2 + 7q^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^2 \cos \alpha \cos \beta &= p q - \frac{p q^3}{3} - \frac{3k_{\alpha} + 3k_{90} + 2k_{\beta}}{8} - \frac{k^2}{360} p q^3 (16p^2 + 8q^2) \\ &\quad - \frac{p^3 q}{3} - \frac{2k_{\alpha} + 3k_{90} + 3k_{\beta}}{8} + \frac{k^2}{9} p^3 q^3 \\ &\quad - \frac{k^2}{360} p^3 q (8p^2 + 16q^2) \end{aligned}$$

Wenn man diese beiden Ausdrücke von einander abzieht, und wenn man dabei die gleichartigen Glieder zusammen ordnet, so erhält man:

$$s^2 \sin \varepsilon = \frac{p q}{2} \frac{k_{\alpha} + k_{90} + k_{\beta}}{3} (p^2 + q^2) + \frac{15}{360} k^2 p q (p^2 - q^2)^2 \quad (30)$$

Hiezu hat man von (14):

$$\frac{p^2 + q^2}{s^2} = 1 + \frac{k_\alpha + 2k_{90} + k_\beta}{12s^2} p^2 q^2 + k^2 \dots$$

Wenn man dieses in (30) einsetzt, und in den Gliedern mit k^2 die einzelnen k_α , k_β , k_{90} nicht mehr unterscheidet (wie auch bei früheren Formeln in gleichem Falle nicht unterschieden wurde) und wenn man die Glieder von der Ordnung k^3 (ebenfalls wie bisher) ganz vernachlässigt, so erhält man aus (30):

$$t = \frac{pq}{2} \frac{k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{3} + \frac{pq}{24} k^2 (p^2 + q^2) \quad (31)$$

Diese Formel, welche mit $\frac{k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{3} = \frac{1}{r^2}$ in die frühere sphärische Formel (3) S. 249 übergeht, sagt in Worten, dass man den geodätischen Excess eines rechtwinkligen geodätischen Dreiecks erhält, wenn man das Dreieck wie ein *sphärisches* Dreieck berechnet, dessen Kugelhalbmesser r dem arithmetischen Mittel der Krümmungsmasse k_α , k_{90} , k_β in den drei Ecken des Dreiecks entspricht.

Dieser Satz lässt sich auch leicht auf ein beliebiges schiefwinkliges Dreieck ausdehnen, wie wir alsbald im nächsten § 98. sehen werden.

§ 98. Berechnung des allgemeinen (schiefwinkligen) geodätischen Dreiecks.

Mit den Reihen-Entwicklungen für das rechtwinklige geodätische Dreieck, welche wir in dem vorstehenden § 97. kennen gelernt haben, kann man durch Zusammensetzung zweier rechtwinkliger Dreiecke zu einem allgemeinen (schiefwinkligen) Dreieck auch die trigonometrische Berechnung solcher allgemeiner geodätischer Dreiecke zu stande bringen.

Wir werden dabei in gleicher Weise vorgehen, wie früher in § 44., wo wir mit Fig. 4. S. 251 aus den Formeln für zwei rechtwinklige sphärische Dreiecke den erweiterten *Legendreschen* Satz hergeleitet haben. Ebenso werden wir nun die Formeln behandeln, durch welche *Gauss* im Jahre 1827 in Art. 25. der „*Disquisitiones generales circa superficies curvas*“ den bedeutenden Schritt von *Legendres* Kugel-Satze zur Trigonometrie auf einer krummen Fläche überhaupt gemacht hat.

Indem wir im wesentlichen die früheren Bezeichnungen beibehalten, bilden wir in Fig. 1. ein geodätisches Dreieck mit den Seiten b , c und $a = q + q'$, indem eine Senkrechte p das Dreieck b , c , a in zwei rechtwinklige Dreiecke p , q , sowie p , q' zerlegt.

Sind ε_1 und ε_2 die geodätischen Excesse der beiden rechtwinkligen Teildreiecke, so ist nach (31) des vorigen § 97. (s. oben):

Fig. 1.
Geodätisches Dreieck.
Excess: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$.

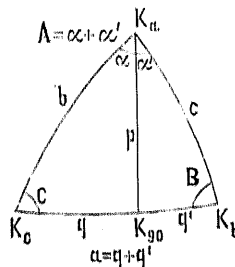
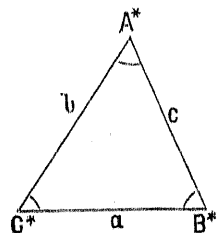


Fig. 2.
Ebenes Dreieck.



$$\varepsilon_1 = \frac{p q}{2} \frac{k_a + k_{g0} + k_c}{3} + k^2 \dots \quad (1)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{p q'}{2} \frac{k_a + k_{g0} + k_b}{3} + k^2 \dots \quad (2)$$

Indem wir zunächst die Glieder von der Ordnung k^2 bei Seite lassen, können wir uns leicht überzeugen, dass der Excess $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$ des ganzen Dreiecks in erster Näherung (d. h. vorbehaltlich der Glieder mit k^2) so berechnet wird:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{p(q + q')}{2} \frac{k_a + k_b + k_c}{3} \quad (3)$$

Um die Übereinstimmung dieser Formel (3) mit der Summe von (1) und (2) nachzuweisen, braucht man nur die der ganzen Theorie zu Grunde liegende Annahme einzuführen, dass das Krümmungsmass k eine lineare Funktion der Coordinaten auf der Fläche sein, also auf der Linie $a = q + q'$ sich proportional den Strecken q und q' ändern soll, d. h. es muss sein:

$$k_{g0} = k_c + \frac{q}{q + q'} (k_b - k_c) \quad \text{oder} \quad k_{g0} (q + q') = k_c q' + k_b q \quad (4)$$

und damit geht die Summe von (1) und (2) in (3) über. Man kann also nun die Gleichung (3) so schreiben:

$$\varepsilon = \frac{a p}{2} \frac{k_a + k_b + k_c}{3} + k^2 \dots \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \triangle \frac{k_a + k_b + k_c}{3} + k^2 \dots \quad (5)$$

Dabei soll \triangle ein Näherungswert für die Fläche des Dreiecks sein, z. B. kann \triangle statt $= \frac{ap}{2}$ auch die Fläche eines ebenen Dreiecks sein, das man aus den drei Seitenlängen a, b, c konstruiert. Wenn übrigens die in (5) vernachlässigten Glieder von der Ordnung k^2 berücksichtigt werden sollen, dann muss auch die Bedeutung von \triangle , z. B. ob es $= \frac{ap}{2}$ oder gleich der Fläche des ebenen Dreiecks a, b, c sein soll, unterschieden werden, weil je nach dieser Unterscheidung auch die höheren Glieder von der Ordnung k^2 verschieden ausfallen.

In Fig. 2. haben wir ein *ebenes* Dreieck gezeichnet, welches dieselben Seiten a, b, c wie das geodätische Dreieck Fig 1. hat, aber deswegen andere Winkel A^*, B^*, C^* haben muss, deren Summe $= 180^\circ$ ist, und deren Differenzen gegen die geodätischen Winkel A, B, C nun untersucht werden sollen.

Von (20)–(23) § 97. S. 471–472 haben wir folgende 4 Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} b \cos \alpha &= p - \frac{p q^2}{3} \frac{3 k_a + 3 k_{g0} + 2 k_c}{8} \\ c \cos \alpha' &= p - \frac{p q'^2}{3} \frac{3 k_a + 3 k_{g0} + 2 k_b}{8} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} b \sin \alpha &= q + \frac{p^2 q}{6} \frac{2 k_a + k_{g0} + k_c}{4} \\ c \sin \alpha' &= q' + \frac{p^2 q'}{6} \frac{2 k_a + k_{g0} + k_b}{4} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Hieraus bildet man:

$$\begin{aligned} b c \cos \alpha \cos \alpha' &= p^2 - \frac{p^2 q^2}{3} \frac{3 k_a + 3 k_{g0} + 2 k_c}{8} - \frac{p^2 q'^2}{3} \frac{3 k_a + 3 k_{g0} + 2 k_b}{8} \\ b c \sin \alpha \sin \alpha' &= q q' + \frac{p^2 q q'}{6} \frac{2 k_a + k_{g0} + k_c}{4} + \frac{p^2 q q'}{6} \frac{2 k_a + k_{g0} + k_b}{4} \end{aligned}$$

Da $\alpha + \alpha' = A$, also $\cos \alpha \cos \alpha' - \sin \alpha \sin \alpha' = \cos A$ ist, erhält man hieraus:

$$\left. \begin{aligned} bc \cos A &= p^2 - qq' - \frac{p^2 k_a}{24} (3q^2 + 3q'^2 + 4qq') - \frac{p^2 k_r}{24} (2q^2 + qq') \\ &\quad - \frac{p^2 k_{90}}{24} (3q^2 + 3q'^2 + 2qq') - \frac{p^2 k_b}{24} (2q'^2 + qq') \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Zwischen den verschiedenen Dreiecksseiten bestehen Beziehungen, nämlich nach (14) § 97. S. 471:

$$b^2 = p^2 + q^2 - \frac{p^2 q^2}{3} \frac{k_a + 2k_{90} + k_r}{4} \quad (9)$$

$$c^2 = p^2 + q'^2 - \frac{p^2 q'^2}{3} \frac{k_a + 2k_{90} + k_b}{4} \quad (10)$$

Nun wird nach Fig. 2. das *ebene* Dreieck betrachtet, welches dieselben Seitenlängen b , c und $a = q + q'$ hat wie das geodätische Dreieck Fig. 1., während die Winkel andere werden, nämlich A^* , B^* , C^* .

Dieses Dreieck Fig. 2. giebt die Gleichung:

$$a^2 = (q + q')^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A^* \quad (11)$$

Man hat also aus (11), (10) und (9):

$$\begin{aligned} 2bc \cos A^* &= b^2 + c^2 - (q^2 + q'^2 + 2qq') \\ &= 2p^2 - 2qq' - \frac{k_a p^2}{12} (q^2 + q'^2) - \frac{k_{90} p^2}{6} (q^2 + q'^2) - \frac{k_r p^2}{12} q^2 - \frac{k_b p^2}{12} q'^2 \end{aligned}$$

Vergleicht man dieses mit (8), so erhält man:

$$\begin{aligned} bc(\cos A^* - \cos A) &= \frac{p^2 k_a}{24} (2q^2 + 2q'^2 + 4qq') + \frac{p^2 k_{90}}{24} (q^2 + q'^2 + 2qq') \\ &\quad + \frac{p^2 k_r}{24} (q^2 + qq') + \frac{p^2 k_b}{24} (q'^2 + qq') \\ bc(\cos A^* - \cos A) &= \frac{p^2 (q + q')}{24} (2k_a (q + q') + k_{90} (q + q') + k_r q + k_b q') \quad (12) \end{aligned}$$

Hier ist wieder das Krümmungsmass k_{90} mit Hilfe der Gleichung (4) zu eliminieren; dadurch bekommt man aus (12):

$$bc(\cos A^* - \cos A) = \frac{p^2 (q + q')^2}{24} (2k_a + k_b + k_r) \quad (13)$$

Hier ist:

$$\cos A^* - \cos A = (A - A^*) \sin A^*$$

und

$$bc \sin A^* = p(q + q') = 2\triangle$$

wobei \triangle ein Näherungswert für die Dreiecksfläche sein soll. Damit giebt (13):

$$A - A^* = \frac{\triangle}{12} (2k_a + k_b + k_r)$$

Indem wir den schon bei (5) gemachten Vorbehalt bezüglich der Bedeutung von \triangle als *erster Näherung* für die ebene oder krumme Dreiecksfläche auch hier machen müssen, schreiben wir die sämtlichen drei Gleichungen von der Art der soeben gefundenen zusammen:

$$\left. \begin{aligned} A - A^* &= \frac{\Delta}{12} (2k_a + k_b + k_c) \\ B - B^* &= \frac{\Delta}{12} (k_a + 2k_b + k_c) \\ C - C^* &= \frac{\Delta}{12} (k_a + k_b + 2k_c) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\text{Summe:} \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{3} (k_a + k_b + k_c) \quad (15)$$

Dieses ist wieder dieselbe Gleichung, wie die schon bei (5) gefundene, und wenn wir die Glieder von der Ordnung k^2 vernachlässigen wollen, so ist die sphäroidische Dreiecks-Berechnung durch die Formeln (14) und (15) erledigt, ebenso wie die *sphärische* Dreiecks-Berechnung durch den einfachen *Legendreschen* Satz (11) (S. 239 bis zur Ordnung $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich, aber $\frac{1}{r^4}$ ausschliesslich, bestimmt war.

Um nun in unserem Falle auch noch die Glieder von der Ordnung k^2 (entsprechend $\frac{1}{r^4}$) zu finden, können wir die ganze vorstehende Entwicklung (6)–(15) mit Zusetzung aller Glieder von der Ordnung k^2 wiederholen, und es ist dabei nur etwa das eine besonders zu bemerken, dass dann die Dreiecksfläche nicht mehr nach Belieben $= \frac{ap}{2}$ oder $= \frac{bc}{2} \sin A$ gesetzt werden darf.

Indem wir für Entwicklung mit Gliedern k^2 nun festsetzen, dass p die Fläche des *ebenen* aus den drei Seitenlängen a, b, c zu konstruierenden Hilfsdreiecks (Fig. 2) sein soll, erhalten wir eine Beziehung zwischen $p(q + q')$ und ε , zunächst durch weitere Benützung der Gleichungen (6) und (7), nämlich:

$$\begin{aligned} \sin A &= \sin(\alpha + \alpha') = \sin \alpha \cos \alpha' + \cos \alpha \sin \alpha' \\ bc \sin A &= p(q + q') \left(1 + \frac{k}{6} (p^2 - 2qq') \right) \\ bc \sin A &= bc \left(\sin A^* + \frac{\Delta}{3} k \cos A^* \right) \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Da hiemit der Weg zur Entwicklung von $A - A^*$ bis auf Glieder k^2 einschliesslich vorgezeichnet ist, beschränken wir uns im weiteren, das *Schluss-Ergebnis* der Entwicklung hier mitzuteilen, umso mehr als die Glieder mit k^2 , wenn man innerhalb derselben keine Unterscheidung zwischen k_a, k_b, k_c mehr macht, lediglich *sphärische* Form annehmen, und nichts anderes sind, als die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$ in den Formeln (31a), (32a), (33a) S. 254, welche wir den Formeln (14) schlechthin zuzusetzen berechtigt sind.

Entweder durch solche Zusetzung, oder durch unmittelbare Weiter-Entwicklung für das geodätische Dreieck bis k^2 findet man:

$$\left. \begin{aligned} A - A^* &= \frac{\triangle}{3} \frac{2k_a + k_b + k_c}{4} + \frac{\triangle}{24} \frac{k^2}{15} \frac{a^2 + 7b^2 + 7c^2}{15} \\ B - B^* &= \frac{\triangle}{3} \frac{k_a + 2k_b + k_c}{4} + \frac{\triangle}{24} \frac{k^2}{15} \frac{7a^2 + b^2 + 7c^2}{15} \\ C - C^* &= \frac{\triangle}{3} \frac{k_a + k_b + 2k_c}{4} + \frac{\triangle}{24} \frac{k^2}{15} \frac{7a^2 + 7b^2 + c^2}{15} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\text{Summe } \varepsilon = \triangle \frac{k_a + k_b + k_c}{3} + \frac{\triangle}{8} k^2 \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \quad (17)$$

Durch diese Formeln (16) und (17) ist die Auflösung eines geodätischen Dreiecks auf die Auflösung eines ebenen Dreiecks zurückgeführt, also vollkommen erledigt, und weitere Formeln sind nicht nötig.

Wenn wir jedoch die sphärischen Vorbilder unserer Formeln auf S. 254 und S. 255 betrachten, so finden wir, dass uns das Analogon zu (35), (38) und (39). S. 254—255 fehlt, das zum praktischen Rechnen zwar nicht erforderlich, aber doch so interessant ist, dass wir im nächsten § 99. uns damit beschäftigen werden.

§ 99. Krumme Oberfläche des geodätischen Dreiecks.

Wir nehmen in Fig. 1. die Vereinigung eines rechtwinkligen und eines Polar-Systems von geodätischen Coordinaten auf der krummen Fläche wieder vor.

Der Punkt A hat in dem rechtwinkligen geodätischen Coordinaten-System mit dem Ursprung O die Abscisse $OP = p$ und die Ordinate $PA = q$, und das dadurch bestimmte rechtwinklige Dreieck OPA habe die krumme Fläche $= F$.

Um das Differential dF zu bestimmen, untersuchen wir, um was sich die Fläche F ändert, wenn p und q bzw. sich um dp und dq ändern.

Wenn F allein sich ändert, so rückt der Punkt A in der geodätischen Parallelen von A nach D , und die Flächen-Änderung ist $= I - II$, wobei mit I der Streifen $PP'DA$ und mit II das schmale Dreieck ODA bezeichnet, und das kleine Dreieckchen mit den Katheten AD und DE vernachlässigt wird. Man kann also schreiben:

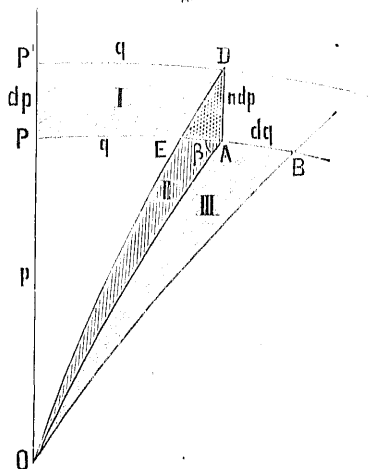
$$\frac{\partial F}{\partial p} dp = I - II \quad (1)$$

In gleicher Weise hat man auch:

$$\frac{\partial F}{\partial q} dq = III \quad (2)$$

wenn mit III das schmale Dreieck OAB bezeichnet wird.

Fig. 1.



Um die drei Flächenteile *I*, *II*, *III* näher zu untersuchen, beginnen wir mit *I*, welches ist:

$$I = \int n \, dp \, dq = dp \int n \, dq \quad (3)$$

Dabei ist dp als Basis PP' des Streifens *I* konstant.

Das Dreieck *II* lässt sich zu *III* in Beziehung setzen durch das Verhältnis $EA : AB$, nämlich:

$$II : III = EA : AB$$

Dabei ist $AB = dq$ und $EA = n \, dp \cotg \beta$; daraus folgt mit Rücksicht auf (2):

$$II = \frac{\partial F}{\partial q} n \, dp \cotg \beta \quad (4)$$

Man hat also nun aus (1), (3) und (4):

$$\frac{\partial F}{\partial p} dp = dp \int n \, dq - n \, dp \cotg \beta \frac{\partial F}{\partial q}$$

Der Faktor dp fällt fort, und dann hat man:

$$\sin \beta \frac{\partial F}{\partial p} + \cos \beta n \frac{\partial F}{\partial q} = \sin \beta \int n \, dq$$

oder, weil $\sin \beta$ und $\cos \beta$ von den früheren Entwicklungen nur in den Produkten $s \sin \beta$ und $s \cos \beta$ vorhanden sind, schreiben wir:

$$s \sin \beta \frac{\partial F}{\partial p} + n s \cos \beta \frac{\partial F}{\partial q} = s \sin \beta \int n \, dq \quad (5)$$

Diese zur Bestimmung von F dienende Gleichung soll in Übereinstimmung gebracht werden mit der folgenden Gleichung, deren Coefficienten A , B , C , D zunächst unbestimmt eingeführt werden:

$$F = \frac{1}{2} p q + A p^2 + B q^2 + C p^2 q + D p q^2 \quad (6)$$

Nach Anleitung von (5) wird hieraus gebildet:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{1}{2} q + 2 A p + 2 C p q + D q^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{1}{2} p + 2 B q + C p^2 + 2 D p q$$

Hiezu nehmen wir in erster Näherung von (18) und (19) S. 471 und (16) S. 468:

$$s \sin \beta = p \quad s \cos \beta = q \quad n = 1 + f_0 q^2$$

Wenn man hiemit die Gleichung (5) bildet, und mit (6) vergleicht, so findet man $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, d. h. die Reihe für F hat keine Glieder von der Form p^2 , q^2 , $p^2 q$, $p q^2$.

Nachdem dieses erkannt ist, wird als neue Form angenommen:

$$F = \frac{1}{2} p q + A p^3 q + B p^2 q^2 + C p q^3 \quad (7)$$

Hieraus wird $\frac{\partial F}{\partial p}$ und $\frac{\partial F}{\partial q}$ gebildet, hiezu in zweiter Näherung von (18), (19)

§ 97. S. 471 nebst (16) § 96. S. 468:

$$\begin{aligned} s \sin \beta &= p - \frac{1}{3} f_0 p q^2 & s \cos \beta &= q + \frac{2}{3} f_0 p^2 q \\ n &= 1 + f_0 q^2 \end{aligned}$$

Dieses wird in (5) eingesetzt, der entstehende Ausdruck mit (7) verglichen, wodurch sich ergeben wird:

$$4A = -\frac{1}{3}f_0 \quad 4B = 0 \quad 4C = -\frac{1}{3}f_0$$

Und setzt man auch noch nach (13) § 97. S. 471, $2f_0 = -k$, so giebt (7):

$$F' = \frac{1}{2}pq + \frac{pq}{24}k(p^2 + q^2) \quad (8)$$

In der nächsten Stufe haben wir 4 weitere unbestimmte Glieder zugesetzt von der Form $Ap^4q + Bp^3q^2 + B'p^2q^3 + A'pq^4$, wozu auch $s \sin \beta$, $s \cos \beta$ und n entsprechend höher zu nehmen waren. Die Ausführung und Coëfficienten-Vergleichung nach dem bisherigen Verfahren gab:

$$F' = \frac{1}{2}pq + \frac{pq}{120} \left(-10f_0p^2 - 10f_0q^2 - 6f_1p^3 - 9g_0p^2q - 7f_1pq^2 - 12g_0q^3 \right)$$

Wenn man hier wieder die Krümmungsmasse nach (13) § 97. S. 471 einführt, so kann man den vorstehenden Ausdruck für F' auf folgende Form bringen:

$$F' = \frac{pq}{2} + \frac{pq}{240} \left\{ k_a(4p^2 + 3q^2) + k_{90}(3p^2 + 3q^2) + k_\beta(3p^2 + 4q^2) \right\} \quad (9)$$

Setzt man die verschiedenen k_a , k_β , k_γ hier einander gleich, schlechthin $= k$, so erhält man wieder die Gleichung (8).

Nun kommt es darauf an, von der Fläche F' eines *rechtwinkligen* geodätischen Dreiecks überzugehen auf die Fläche eines allgemeinen Dreiecks mit beliebigen Winkeln. Der Weg hierzu ist bereits durch die Entwicklung von § 98. mit Fig. 1. S. 473 vorgezeichnet; wir werden wieder das allgemeine Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen, und haben dann, die Flächen der beiden rechtwinkligen Dreiecke nach dem bisherigen mit F'_1 und F'_2 bezeichnend, und für die Gesamtfläche das Zeichen F' annehmend:

$$F' = F'_1 + F'_2 \quad (10)$$

Wenn wir die Formel (9) für die Fläche F' eines rechtwinkligen Dreiecks, auf die beiden Teile von Fig. 1. anwenden, so haben wir:

$$F'_1 = \frac{pq}{2} + \frac{pq}{240} (k_a(4p^2 + 3q^2) + k_{90}(3p^2 + 3q^2) + k_c(3p^2 + 4q^2))$$

$$F'_2 = \frac{p'q'}{2} + \frac{p'q'}{240} (k_a(4p'^2 + 3q'^2) + k_{90}(3p'^2 + 3q'^2) + k_b(3p'^2 + 4q'^2))$$

Hiezu hat man nach (24) – (27) § 97. S. 472:

$$p = b \cos \alpha \left(1 + \frac{q^2}{3} \frac{3k_a + 3k_{90} + 2k_c}{8} \right), \quad p' = c \cos \alpha' \left(1 + \frac{q'^2}{3} \frac{3k_a + 3k_{90} + 2k_b}{8} \right)$$

$$q = b \sin \alpha \left(1 - \frac{p^2}{6} \frac{2k_a + k_{90} + k_c}{4} \right), \quad q' = c \sin \alpha' \left(1 - \frac{p'^2}{6} \frac{2k_a + k_{90} + k_b}{4} \right)$$

$$p = c \cos \alpha' \left(1 + \frac{q'^2}{3} \frac{3k_a + 3k_{90} + 2k_b}{8} \right), \quad p' = b \cos \alpha \left(1 + \frac{q^2}{3} \frac{3k_a + 3k_{90} + 2k_c}{8} \right)$$

Dadurch ist der Weg gezeigt, auf welchem man die krumme Dreiecksfläche F' zunächst in p , q , q' nebst den verschiedenen k ausdrücken kann. Dann hat man verschiedene geometrische Beziehungen in dem Dreieck selbst, z. B. $p^2 + q^2 = b^2$, $p^2 + q'^2 = c^2$ als erste Näherungen u. s. w. Wenn man nach diesen Andeutungen die Rechnung durchführt, so wird man erhalten:

$$F = \frac{bc \sin A}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{120} k_a (3b^2 + 3c^2 - 12bc \cos A) \right. \\ \left. + \frac{1}{120} k_b (3b^2 + 4c^2 - 9bc \cos A) \right. \\ \left. + \frac{1}{120} k_c (4b^2 + 3c^2 - 9bc \cos A) \right\} \quad (11)$$

Diese Gleichung (11), welche man auch noch in zwei anderen Formen mit $ac \sin B$ und mit $ab \sin C$, anschreiben kann, ist nicht symmetrisch, weil eines der drei Elemente A, B, C bzw. a, b, c bevorzugt ist. Wir wollen deshalb $bc \sin A$ durch \triangle ersetzen, und haben hiezu von (14) § 98. S. 476:

$$A = A^* + \frac{\triangle}{3} \frac{2k_a + k_b + k_c}{4}$$

und im ebenen Dreieck: $2bc \cos A^* = b^2 + c^2 - a^2$

Da man in den Gliedern zweiter Ordnung von (11) stets A mit A^* vertauschen darf, kann man mittelst der soeben geschriebenen zwei Gleichungen die (11) auf folgende Form bringen:

$$F = \triangle \left\{ 1 + \frac{1}{120} k_a (a^2 + 2b^2 + 2c^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{120} k_b (2a^2 + b^2 + 2c^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{120} k_c (2a^2 + 2b^2 + c^2) \right\} \quad (12)$$

Setzt man hier $k_a = k_b = k_c = k$, so erhält man:

$$F = \triangle \left(1 + \frac{1}{24} k (a^2 + b^2 + c^2) \right) \quad (13)$$

Dieses entspricht dem früheren (36) S. 255, und damit kann man auch (31) — (42) von S. 254—255 leicht auf unseren Fall übertragen, was in der Formel-Zusammenstellung des § 101. geschehen soll.

§ 100. Zweite Begründung der Grundformeln für geodätische Dreiecke. *)

Alle zu wirklichen Dreiecks-Berechnungen geeigneten Formeln, die wir im bisherigen gefunden haben, beruhen auf Reihen-Entwicklungen, die meist bis zu Gliedern von der Ordnung $\frac{r^2 s^2}{r^2}$ und $\frac{s^4}{r^4}$ fortgesetzt wurden, d. h. bis zu Ordnungen, welche in anderen Fällen, z. B. bei der geodätischen Hauptaufgabe Kapitel VIII, leicht erreicht und auch überschritten wurden. Es ist daher ein naheliegender Gedanke, irgend eine

*) Diese zweite Begründung ist für die nachher in § 101. zu behandelnden praktischen Anwendungen nicht nötig, sondern mehr zur theoretischen Weiterentwicklung, und als eine Anwendung des Prinzips der konformen Linien-Abbildung (nach § 94. S. 462) hier aufgenommen. Ausserdem kann aber dieser § 100. unmittelbar an § 93 und § 94. ohne § 95.—99. angeschlossen werden. (Wir haben die Entwicklungen dieses § 100. teilweise in anderer Form, früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1889“, S. 295—304, behandelt.)

jener früheren Entwicklungen von Kapitel VIII. dadurch auch auf geodätische Dreiecke anzuwenden, dass zwei Dreiecksseiten als zwei Strahlen s in dem Sinne von Fig. 1. S. 386 erscheinen, und der von den zwei Seiten eingeschlossene Dreieckswinkel als Differenz zweier Azimute α nach Fig. 1. S. 386 behandelt wird.

Fig. 1.
Ellipsoid.

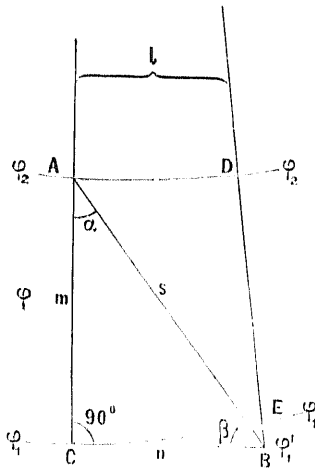
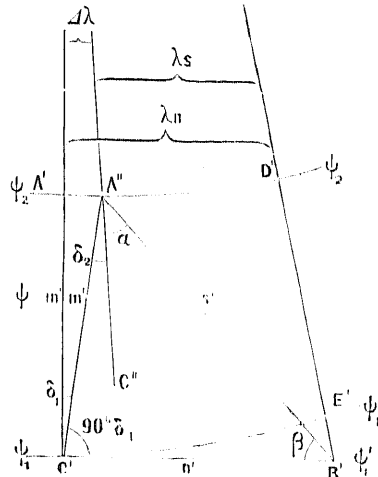


Fig. 2.
Kugel.
(Halbmesser = a .)



Wir betrachten in Fig. 1. ein geodätisches rechtwinkliges Dreieck ABC , dessen eine Kathete AC in einem Meridian liegt; die andere Kathete CB ist in C rechtwinklig zu CA , und die dritte Seite BA ist dadurch bestimmt. Alle drei Seiten sind geodätische Linien, und haben die Längen $AC = m$, $CB = n$, $BA = s$.

Die geographischen Breiten der drei Punkte A , C , B sind in Fig. 1. eingeschrieben, nämlich q_2 für A , dann q_1 für C und q'_1 für B ; ferner sei l der geographische Längenunterschied zwischen A und B oder zwischen C und B .

Nun werden die drei Seiten AC , CB und BA , jede für sich, nach dem Gesetze von § 81. von dem Ellipsoid auf eine Kugel vom Halbmesser $a =$ grosse Ellipsoid-Halbhaxe, übertragen, wie durch Fig. 2. angedeutet ist. Die Breiten q gehen über in die reduzierten Breiten ψ , d. h. es bestehen (nach § 80.) zwischen q und ψ die Gleichungen:

$$\text{tang } \psi = \sqrt{1 - e^2} \text{ tang } q \quad (1)$$

oder nach (24) S. 404:

$$q - \psi = \left(\frac{e^2}{4} + \dots \right) \sin(q + \psi) \quad (2)$$

d. h. bei Vernachlässigung von e^2 dürfen q und ψ gegenseitig vertauscht werden.

Die geodätischen Linien m , n , s geben bei der Übertragung auf die Kugel grösste Kreisbögen m' , n' , s' , welchen beim Halbmesser a die Centriwinkel $\frac{m'}{a}$, $\frac{n'}{a}$, $\frac{s'}{a}$ entsprechen.

Die Azimute der Seiten m , n , s bleiben bei der Übertragung unverändert.

In dieser Weise werde AC nach $A'C'$ übertragen, wo $A'C'$ ein Kugelmeridian ist; dann werde CB nach $C'B'$ übertragen, wobei der Winkel $A'C'B' = ACB = 90^\circ$ bleibt, endlich kommt die Übertragung BA nach $B'A''$, wobei das Azimut in B oder dessen Complement β in Fig. 2. und Fig. 1. gleich bleibt.

Nun hat man aber die Eigentümlichkeit, dass der Endpunkt A'' der Linie $B'A''$ nicht mit dem Anfangspunkt A' der Linie $A'C'$ zusammen fällt, weil die Linien BC und BA zwar gleiche geographische Länge l auf dem Ellipsoid, aber nicht gleiche Werte λ_u und λ_s auf der Kugel haben.

Da das geodätische Dreieck ACB sich in einem nicht geschlossenen Viereck $A'C'B'A''$ abgebildet hat, wird man zuerst darauf ausgehen müssen, das Klaffen zwischen den zwei Punkten A'' und A' zu bestimmen. Wenn $A'C'$ der Meridian von A' , dann $A''C''$ der Meridian von A'' ist, ferner $A\lambda$ der geographische Längenunterschied zwischen diesen beiden Meridianen, so wird es auch möglich sein, für die schiefe Verbindung $C'A''$ (welche sich als hinreichend genau $= C'A'$ ergeben wird) die beiden Azimute δ_1 und δ_2 zu berechnen; und dann hat man ein geschlossenes sphärisches Dreieck $A''C'B'$, dessen Winkel bezw. sind:

$$A'' = \alpha + \delta_2, \quad C'' = 90^\circ - \delta_1, \quad B' = \beta \quad (3)$$

Auf dieses Dreieck kann man die Formeln der sphärischen Trigonometrie anwenden; und da andererseits die Verwandtschaften mit dem ursprünglichen Dreieck ACB bekannt sind, so werden wir auf diesem Wege zu Formeln gelangen, welche sich auf das rechtwinklige geodätische Dreieck ACB auf dem Ellipsoid beziehen.

Nachdem so der Gang unserer Betrachtungen im allgemeinen vorgezeichnet ist, gehen wir zur Ausführung im einzelnen über.

Wir entnehmen von dem früheren § 83. die Gleichung für λ , (20) S. 417, mit Weglassung der Glieder von der Ordnung η^4 :

$$\lambda = Vl \left\{ 1 - \frac{\eta^2}{24} (b^2 (1 + 3l^2) + 2l^2 \sin^2 \varphi) \right\} \quad (4)$$

Die hier zunächst allgemein mit φ bezeichnete Breite hat nun in unserem Falle zwei verschiedene Anwendungen, die mit φ_s und φ_u unterschieden werden sollen, indem φ_s die Mittelbreite der Hypotenuse $AB = s$, und φ_u die Mittelbreite der Kathete $BC = n$ sein soll, d. h. wir bilden aus (4):

$$\lambda_s = Vs l \left\{ 1 - \frac{\eta_s^2}{24} (b_s^2 (1 + 3l_s^2) + 2l_s^2 \sin^2 \varphi_s) \right\} \quad (5)$$

$$\lambda_u = Vu l \left\{ 1 + \frac{\eta_u^2}{24} (b_u^2 (1 + 3l_u^2) + 2l_u^2 \sin^2 \varphi_u) \right\} \quad (6)$$

Mit Benützung der in Fig. 1. eingeschriebenen Breiten φ_2 , φ_1 und φ'_1 haben wir hiefür:

$$\varphi_s = \frac{\varphi'_1 + \varphi_2}{2}, \quad \varphi_u = \frac{\varphi'_1 + \varphi_1}{2} \quad (7)$$

Dabei bestehen nach (25) S. 389 für die beiden Katheten m und n in erster Näherung die Breitenunterschieds-Gleichungen:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{m}{a}, \quad \varphi_1 - \varphi'_1 = \frac{n^2}{2a^2} \tan \varphi_1 \quad (8)$$

Zugleich bezeichnen wir zur Abkürzung:

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi \quad (9)$$

(Diese *Mittelbreite* q ist nicht zu verwechseln mit dem *allgemeinen* Zeichen q in (1), welches nun zweifach in q_s und q_n spezialisiert wird.) Aus (7), (8) und (9) erhält man:

$$q_s = q_1 + \frac{m}{2a} - \frac{n^2}{4a^2} \tan q_1, \quad q_n = q_1 - \frac{n^2}{4a^2} \tan q_1 \quad (10)$$

Um den so bestimmten Wert q_s in (5) einzusetzen, brauchen wir zuerst $\cos q_s$, das in $\eta_s^2 = 1 + e'^2 \cos^2 q_s$ und in $V_s^2 = 1 + \eta_s^2$ vorkommt. Wir bilden also nach (10):

$$\begin{aligned} \cos q_s &= \cos \left(q_1 + \left(\frac{m}{2a} - \frac{n^2}{4a^2} t_1 \right) \right) \\ \cos q_s &= \cos q_1 \left(1 - \left(\frac{m}{2a} - \frac{n^2}{4a^2} t_1 \right) t_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2a} - \frac{n^2}{4a^2} t_1 \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{m}{2a} - \frac{n^2}{4a^2} t_1 \right)^3 \right) \\ \cos q_s &= \cos q_1 \left(1 - \frac{m}{2a} t_1 + \frac{n^2}{4a^2} t_1^2 - \frac{m^2}{8a^3} + \frac{mn^2}{8a^3} t_1 - \frac{m^3}{48a^3} t_1 \right) \\ \cos^2 q_s &= \cos^2 q_1 \left(1 - \frac{m}{a} t_1 + \frac{n^2}{2a^2} t_1^2 - \frac{m^2}{4a^2} + \frac{m^2}{4a^2} t_1^2 + \frac{m^3}{6a^3} t_1 + \frac{mn^2}{4a^3} t_1 - \frac{mn^2}{4a^3} t_1^3 \right) \quad (11) \end{aligned}$$

Hieraus entnehmen wir zunächst in erster Näherung:

$$\begin{aligned} \eta_s^2 &= e'^2 \cos^2 q_s \quad \text{und} \quad \eta_n^2 = e'^2 \cos^2 q_1 \\ \eta_s^2 &= \eta_n^2 \left(1 - \frac{m}{a} t_1 + \dots \right) \quad (11a) \end{aligned}$$

Außerdem aber genauer, für den ersten Faktor von (5):

$$\begin{aligned} V_s = \sqrt{1 + \eta_s^2} = 1 + \frac{\eta_n^2}{2} \left(1 - \frac{m}{a} t_1 + \frac{n^2}{2a^2} t_1^2 - \frac{m^2}{4a^2} + \frac{m^2}{4a^2} t_1^2 + \frac{m^3}{6a^3} t_1 \right. \\ \left. + \frac{mn^2}{4a^3} t_1 - \frac{mn^2}{4a^3} t_1^3 \right) \quad (12) \end{aligned}$$

Ferner ist für (5) zu nehmen:

$$b_s = \frac{m}{a} + \frac{n^2}{2a^2} t_1, \quad b_n = \frac{m^2}{a^2} + \frac{mn^2}{a^3} t_1 \quad (13)$$

$$b_s^2 t_s^2 = \frac{m^2}{a^2} t_1^2 + \frac{m^3}{a^3} t_1 (1 + t_1^2) + \frac{mn^2}{a^3} t_1^3 \quad (14)$$

Nach diesem braucht man noch l , zunächst für das zweite Glied l^2 in (5) hinreichend:

$$l = \frac{n}{a \cos q_1} + \frac{n^3}{a^3} \dots \quad l^2 = \frac{n^2}{a^2 \cos^2 q_1} + \frac{n^4}{a^4} \dots$$

$$\text{hiez u:} \quad q_s = q_1 + \frac{m}{2a}, \quad \sin q_s = \sin q_1 + \frac{m}{2a} \cos q_1$$

$$\text{also:} \quad l^2 \sin^2 q_s = \frac{n^2}{a^2} t_1^2 + \frac{mn^2}{a^3} t_1 \quad (15)$$

Nun kann man die Ausdrücke (11a)–(15) in (5) einsetzen, und bekommt damit, nachdem sich verschiedenes zusammengezogen hat:

$$\lambda_s = l \left\{ 1 + \frac{\eta_n^2}{2} \left(12 - \frac{m}{a} t_1 + \frac{n^2}{3a^2} t_1^2 - \frac{m^2}{8a^2} - \frac{n^2 m}{3a^3} t_1^3 \right) \right\} \quad (16)$$

Erheblich einfacher wird die Entwicklung des anderen Wertes λ , nämlich λ_n nach (6), welcher zu dem Bogen n mit der Mittelbreite q_n nach (10) gehört. Da q_n

in q_n übergeht, wenn man $m = 0$ setzt, so wird auch λ_n aus λ_s hervorgehen durch die Annahme $m = 0$; d. h. wir erhalten aus (16):

$$\lambda_n = l \left\{ 1 + \frac{\eta_1^2}{2} \left(12 + \frac{m^2}{3a^2} t_1^2 \right) \right\} \quad (17)$$

Nun bildet man die Differenz aus (16) und (17):

$$\lambda_n - \lambda_s = l \frac{\eta_1^2}{2} \left\{ \frac{m}{a} t_1 + \frac{m^2}{3a^2} + \frac{m^2 m}{3a^3} t_1^3 \right\} \quad (18)$$

Hier ist l bis zur dritten Ordnung einzuführen, wozu wir die Entwicklung (3) S. 289 benützen können:

$$l = \frac{n}{a} \frac{1}{\cos q_1} - \frac{n^3}{3a^3} \frac{\tan^2 q_1}{\cos q_1} \quad (19)$$

Dieses mit (18) zusammen genommen giebt:

$$(\lambda_n - \lambda_s) \cos q_1 = A \lambda \cos q_1 = \frac{\eta_1^2}{2} \left(\frac{m n}{a^2} t_1 + \frac{m^2 n}{3a^3} \right) \quad (20)$$

Dieses ist auf vierte Ordnung einschliesslich genau, weil die Glieder mit $m n^3$ von selbst fortgefallen sind.

Wir brauchen nun die zwei wichtigen kleinen Azimutalwinkel δ_1 und δ_2 von Fig. 2., welche durch sphärische Entwicklung zu finden sind. Eine Cotangenten-Gleichung ((9) S. 195) auf das Polar-Dreieck mit der kurzen Seite $C'A'$ angewendet giebt:

$$\tan q_2 \cos \psi_1 = \sin \psi_1 \cos A \lambda + \sin A \lambda \cot g \delta_1 \quad (20a)$$

Da $A \lambda$ nach (20) von der Ordnung η^2 ist, haben wir in der Entwicklung von (20a) nur die erste Potenz von $A \lambda$ zu berücksichtigen, weil $A \lambda^2$ bereits η^4 geben würde, was wir immer vernachlässigen. Wir bilden daher aus (20a):

$$\tan q_2 \cos \psi_1 = \sin \psi_1 + A \lambda \cot g \delta_1$$

$$\tan \delta_1 = \frac{A \lambda \cos \psi_2}{\sin (\psi_2 - \psi_1)} \quad , \quad \text{wobei} \quad \psi_2 - \psi_1 = \frac{m'}{a}$$

Dieses giebt bis zur dritten Potenz entwickelt:

$$\delta_1 = \frac{A \lambda a}{m'} \left(1 + \frac{m'^2}{6a^2} \right) \cos \psi_2$$

Hier dürfen aber auch m' mit m und ψ_2 mit q_2 vertauscht werden, und wenn wir zugleich die andere Formel für δ_2 , welche auf ähnlichem Wege gefunden wird, hinzusetzen, so haben wir:

$$\delta_1 = A \lambda \frac{a}{m} \left(1 + \frac{m^2}{6a^2} \right) \cos q_2 \quad , \quad \delta_2 = A \lambda \frac{a}{m} \left(1 + \frac{m^2}{6a^2} \right) \cos q_1 \quad (21)$$

Wenn man hier $q_2 = q_1 + \frac{m}{a}$ setzt, also $\cos q_2 = \cos q_1 \left(1 - \frac{m}{a} t_1 - \frac{m^2}{2a^2} \right)$, so bekommt man:

$$\delta_1 = A \lambda \frac{a}{m} \cos q_1 \left(1 - \frac{m}{a} t_1 - \frac{m^2}{3a^2} \right)$$

Hier und in δ_2 von (21) setzen wir $A \lambda$ aus (20) ein, und erhalten:

$$\delta_1 = \eta_1^2 \frac{n}{2a} \left(t_1 + \frac{m}{3a} - \frac{m}{a} t_1^2 - \frac{2}{3} \frac{m^2}{a^2} t_1 \right) \quad (22)$$

$$\delta_2 = \eta_1^2 \frac{n}{2a} \left(t_1 + \frac{m}{3a} + \frac{m^2}{6a^2} t_1 \right) \quad (23)$$

$$\delta_2 - \delta_1 = \eta_1^2 \frac{n}{2a} \left(\frac{m}{a} t_1^2 + \frac{5}{6} \frac{m^2}{a^2} t_1 \right) \quad (24)$$

Nachdem δ_2 entwickelt ist, kann man an Fig. 2. auch sofort einsehen, dass die beiden Linien $C' A'$ und $C' A''$ als hinreichend gleich zu nehmen sind, denn es wäre in erster Näherung $C' A' = C' A'' \cos \delta_2$; da aber δ_2 nach (23) bereits von der Ordnung η^2 ist, würde $\cos \delta_2$ nur eine Änderung von der Ordnung η^4 geben, welche wir hier vernachlässigen; es ist daher $C' A' = C' A'' = m'$ zu nehmen, wie auch in Fig. 2. mit zweimaligem m' eingeschrieben und für alles weitere gültig ist.

Nachdem wir so über die sämtlichen *Winkel* des Dreiecks $A' C' B'$ ins klare gekommen sind, wollen wir auch noch die *Seiten* m' , n' , s' betrachten. Wir brauchen hiezu die frühere Gleichung (19) S. 417, mit $\sigma = \frac{s'}{a}$ und $S = \frac{s}{N} = \frac{s V_s \sqrt{1-e^2}}{a}$ und Vernachlässigung von η^4 , also:

$$s' = s V_s \left\{ 1 - \frac{\eta_s^2}{24} (l_s^2 (1 - l_s^2) + 2 l_s^2 \sin^2 q_s) \right\} \quad (25)$$

Wenn man hier wieder dieselben Ausdrücke (11a) — (15) einsetzt, welche schon bei (5) gedient haben, so erhält man:

$$s' = s \left\{ 1 + \frac{\eta_1^2}{2} \left(1 - \frac{m}{a} t_1 + \frac{n^2}{3a^2} t_1^2 - \frac{m^2}{3a^2} + \frac{m^2}{3a^2} t_1^2 + \frac{m^3}{3a^3} t_1 \right) \right\} \quad (26)$$

Lässt man hier alle Glieder mit n fort, so bekommt man:

$$n' = n \left\{ 1 + \frac{\eta_1^2}{2} \left(1 + \frac{n^2}{3a^2} t_1^2 \right) \right\} \quad (27)$$

Der Quotient dieser beiden letzten Gleichungen giebt:

$$\frac{s'}{n'} = \frac{s}{n} \left\{ 1 + \frac{\eta_1^2}{2} \left(-\frac{m}{a} t_1 + \frac{m^2}{3a^2} t_1^2 - \frac{m^2}{3a^2} + \frac{m^3}{3a^3} t_1 \right) \right\} \quad (28)$$

Andererseits bekommt man durch Fortlassen der Glieder mit n aus (26):

$$m' = m \left\{ 1 + \frac{\eta_1^2}{2} \left(1 - \frac{m}{a} t_1 - \frac{m^2}{3a^2} + \frac{m^2}{3a^2} t_1^2 + \frac{m^3}{3a^3} t_1 \right) \right\} \quad (29)$$

Aus (26) und (29) hat man auch:

$$\frac{s'}{m'} = \frac{s}{m} \left\{ 1 + \frac{\eta_1^2}{6} \frac{n^2}{a^2} t_1^2 \right\} \quad (30)$$

Einführung der Krümmungsmasse.

Der allgemeine Ausdruck für das Krümmungsmass ist nach (6) § 95. S. 464 und (22a) S. 211:

$$k = \frac{1}{r^2} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 q)^2}{a^2 (1 - e^2)} = \frac{1}{a^2} (1 + e'^2 \cos^2 q) (1 - e^2 \sin^2 q)$$

Wenn wir jedoch, wie schon im bisherigen geschehen ist, die Glieder von der Ordnung e^4 oder e'^4 vernachlässigen (was auch gleichbedeutend ist mit der Näherung $e^2 = e'^2$), so können wir statt des vorstehenden auch schreiben:

$$k = \frac{1}{a^2} (1 - e'^2 + 2 e'^2 \cos^2 q) \text{ oder } k = \frac{1}{a^2} (1 - e'^2 + 2 \eta^2)$$

Da hierin η^2 allgemein $= e'^2 \cos^2 q$ ist, und im besonderen $\eta_1^2 = e'^2 \cos^2 q_1$, sowie $\eta_2^2 = e'^2 \cos^2 q_2$, so hat man $q_2 = q_1 + \frac{m}{a}$, also $\cos q_2 = \cos q_1 - \frac{m}{a} \sin q_1$ und

$\cos^2 \varphi_2 = \cos^2 \varphi_1 \left(1 - \frac{2m}{a} \tan \varphi_1\right)$, also $\eta_2^2 = \eta_1^2 \left(1 - \frac{2m}{a} t_1\right)$; und in den drei Ecken unseres rechtwinkligen Dreiecks Fig. 1. bestehen folgende Krümmungsmasse:

$$k_\alpha = \frac{1}{a^2} \left(1 - e'^2 + 2\eta_1^2 \left(1 - \frac{2m}{a} t_1\right)\right)$$

$$k_{90} = \frac{1}{a^2} (1 - e'^2 + 2\eta_1^2)$$

$$k_\beta = \frac{1}{a^2} (1 - e'^2 + 2\eta_1^2)$$

$$\text{Mittel } \frac{k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{3} = \frac{1}{a^2} \left(1 - e'^2 + 2\eta_1^2 - \frac{4}{3} \eta_1^2 \frac{m}{a} t_1\right) \quad (31)$$

Es ist aber $e'^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_1 + e'^2 \sin^2 \varphi_1 = \eta_1^2 + \eta_1^2 t_1^2$ und damit kann man (31) auch so schreiben:

$$k_s = \frac{k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{3} = \frac{1}{a^2} \left(1 + \eta_1^2 - \eta_1^2 t_1^2 - \frac{4}{3} \eta_1^2 \frac{m}{a} t_1\right) \quad (32)$$

Dieses ist das *einfache* Mittel der drei Krümmungsmasse; zum Gebrauche für das folgende bilden wir auch noch zwei andere Mittelwerte:

$$k_{sin} = \frac{k_\alpha + k_{90} + 2k_\beta}{4} = \frac{1}{a^2} \left(1 + \eta_1^2 - \eta_1^2 t_1^2 - \eta_1^2 \frac{m}{a} t_1\right) \quad (33)$$

$$k_{cos} = \frac{2k_\alpha + 3k_{90} + 3k_\beta}{8} = \frac{1}{a^2} \left(1 + \eta_1^2 - \eta_1^2 t_1^2 - \eta_1^2 \frac{m}{a} t_1\right) \quad (34)$$

Diese beiden Ausdrücke (33) und (34) sind einander *gleich*, d. h. für die in Fig. 1. dargestellten Verhältnisse ist $k_{sin} = k_{cos}$, weil in diesem besonderen Falle $k_{90} = k_\beta$ ist.

Wenn wir nachher in einer Entwicklung die Funktion $1 + \eta_1^2 - \eta_1^2 t_1^2 - \eta_1^2 \frac{m}{a} t_1$ finden, so können wir dieselbe nach (33) oder (34) entweder $= a^2 k_{sin}$ oder $= a^2 k_{cos}$ setzen; wir müssen aber vorsichtig sein, wenn wir *weitere* Schlüsse hierauf bauen wollen. (Weiteres hierüber werden wir bei (43) bemerken.)

Nach all diesen Vorbereitungen können wir die drei Hauptgleichungen für das sphärische Dreieck $A'' C' B'$ anschreiben.

Wir beginnen mit dem sphärischen Excess dieses Dreiecks, welcher ε' heissen soll, während ε der geodätische Excess des ellipsoidischen Dreiecks Fig. 1. sei, dann hat man:

$$\alpha + \beta + 90^\circ - 180^\circ = \varepsilon$$

$$(\alpha + \delta_2) + \beta + (90^\circ - \delta_1) - 180^\circ = \varepsilon'$$

also:

$$\varepsilon = \varepsilon' - (\delta_2 - \delta_1)$$

Nun ist für das sphärische Dreieck:

$$\varepsilon' = \frac{m' n'}{2 a^2} \sin (90^\circ - \delta_1) = \frac{m' n'}{2 a^2} \cos \delta_1$$

Da aber δ_1 nach (22) von der Ordnung η^2 ist, braucht man nur:

$$\varepsilon' = \frac{m' n'}{2 a^2} \text{ also } \varepsilon = \frac{m' n'}{2 a^2} - (\delta_2 - \delta_1) \quad (35)$$

Hierzu benützt man, mit hier ausreichender Genauigkeit, nach (29) und (27):

$$m' = m \left(1 + \frac{\eta_1^2}{2} \left(1 - \frac{m}{a} t_1 \right) \right), \quad n' = n \left(1 + \frac{\eta_1^2}{2} \right)$$

also:
$$\frac{m' n'}{2 a^2} = \frac{m n}{2 a^2} \left(1 + \eta_1^2 - \eta_1^2 \frac{m}{2 a} t_1 \right)$$

hiez u nach (24):
$$\delta_2 - \delta_1 = \frac{m n}{2 a^2} \left(\eta_1^2 t_1^2 + \frac{5}{6} \eta_1^2 \frac{m}{a} t_1 \right)$$

Also:
$$\varepsilon = \frac{m n}{2 a^2} \left(1 + \eta_1^2 - \eta_1^2 t_1^2 - \frac{4}{3} \eta_1^2 \frac{m}{a} t_1 \right) \quad (36)$$

Nach (32) kann man hiefür schreiben:

$$\varepsilon = \frac{m n}{2 a^2} \frac{k_\alpha + k_{g0} + k_\beta}{3} \quad (37)$$

Um zum Sinus-Satz zu gelangen, schreiben wir für das sphärische Dreieck Fig. 2.:

$$\frac{\sin(90^\circ - \delta_1)}{\sin \beta} = \frac{\sin \frac{s'}{a}}{\sin \frac{m'}{a}} = \frac{s' - \frac{s'^3}{6a^3}}{m' - \frac{m'^3}{6a^3}}$$

Dadurch wird der Schlussfehler $A'' A'$ des Dreiecks Fig. 2. in der Richtung rechtwinklig zum Meridian zum Ausdruck gebracht.

Hier kann wieder $\cos \delta_1 = 1$ gesetzt werden, also:

$$\frac{1}{\sin \beta} = \frac{s'}{m'} \left(1 - \frac{s'^2 - m'^2}{6a^2} \right) \quad (38)$$

Um zu $s'^2 - m'^2$ zu gelangen, schreibt man nach Fig. 2.:

$$\cos \frac{s'}{a} = \cos \frac{m'}{a} \cos \frac{n'}{a} + \sin \frac{m'}{a} \sin \frac{n'}{a} \sin \delta_1$$

entwickelt:
$$s'^2 - m'^2 = n'^2 - 2 m' n' \delta_1 \quad (39)$$

Dazu nehmen wir von (27):

$$n'^2 = n^2 \left(1 + \eta_1^2 + \eta_1^2 \frac{n^2}{3a^2} t_1^2 \right)$$

von (22):
$$2 m' n' \delta_1 = \eta_1^2 m \frac{n^2}{a} t_1$$

also:
$$s'^2 - m'^2 = n^2 \left(1 + \eta_1^2 - \eta_1^2 \frac{m}{a} t_1 + \frac{n^2}{a^2} \dots \right) \quad (40)$$

Wenn man hiez u (30) nimmt, und damit (38) zusammensetzt, so bekommt man:

$$s \sin \beta = m + \frac{m n^2}{6} \left(1 + \eta_1^2 - \eta_1^2 t_1^2 - \eta_1^2 \frac{m}{a} t_1 \right)$$

Dafür kann man nach (33) schreiben:

$$s \sin \beta = m + \frac{m n^2}{6} \frac{k_\alpha + 2 k_\beta + k_{g0}}{4} \quad (41)$$

Um endlich auch noch eine Gleichung für $s \cos \beta$ zu erhalten, schreiben wir zunächst folgende auf das sphärische Dreieck $A'' B' C'$ Fig. 2. bezogene Gleichung (nach der Gruppe (11) S. 195), wodurch der Schlussfehler $A' A''$ in der *Breite* zum Ausdruck gebracht wird:

$$\sin \frac{s'}{a} \cos \beta = \cos \frac{m'}{a} \sin \frac{n'}{a} - \sin \frac{m'}{a} \cos \frac{n'}{a} \cos (90^\circ - \delta_1)$$

also:

$$\cos \beta = \frac{\sin \frac{n'}{a}}{\sin \frac{s'}{a}} \cos \frac{m'}{a} - \frac{\sin \frac{m'}{a}}{\sin \frac{s'}{a}} \cos \frac{n'}{a} \sin \delta_1$$

Entwickelt:

$$\cos \beta = \frac{n'}{s'} \left(1 - \frac{n'^2 - s'^2}{6a^2} \right) \left(1 - \frac{m'^2}{2a^2} \right) - \frac{m'}{s'} \left(1 + \frac{s'^2 - m'^2}{6a^2} \right) \left(1 - \frac{n'^2}{2a^2} \right) \delta_1 \quad (42)$$

Hiezu hat man von (39):

$$s'^2 - n'^2 = m'^2 - 2m'n'\delta_1, \quad \text{also nach (29) und (22):}$$

$$\frac{s'^2 - n'^2}{a^2} = \frac{m^2}{a^2} + \eta_1^2 \left(\frac{m^2}{a^2} - \frac{m^3}{a^3} t_1 - \frac{m n^2}{a^3} t_1 \right)$$

$$\text{nochmals aus (29): } 1 - \frac{m'^2}{2a^2} = 1 - \frac{m^2}{2a^2} - \frac{\eta_1^2}{2} \frac{m^2}{a^2} + \frac{\eta_1^2}{2} \frac{m^3}{a^3} t_1$$

Im zweiten Teile von (42) ist δ_1 nach (22) einzusetzen, und da hierbei der Faktor η_1^2 ist, genügt es, im übrigen zu setzen:

$$\frac{m'}{s'} \left(1 + \frac{s'^2 - m'^2}{6a^2} \right) \left(1 - \frac{n'^2}{2a^2} \right) = \frac{m}{s} \left(1 - \frac{n^2}{3a^2} \right)$$

Wenn man alles dieses in (42) einsetzt, und gleichartiges ordnet, so erhält man:

$$s \cos \beta = n - \frac{m^2 n}{3} \left(1 + \eta_1^2 - \eta_1^2 t_1^2 - \eta_1^2 \frac{n}{a} t_1 \right)$$

und wegen (34) schreiben wir hierfür:

$$s \cos \beta = n - \frac{m^2 n}{3} \frac{2k_\alpha + 3k_\beta + 3k_{90}}{8} \quad (43)$$

Nun haben wir in den drei Gleichungen (37), (41), (43) *dieselben* Formeln wie früher in den ersten Gliedern von (31), (20), (21) § 97. S. 471—473, wenn $m = p$ und $n = q$ genommen wird. Es besteht aber noch der grosse Unterschied, dass unsere neue Entwicklung (37), (41), (43) nur für den besonderen Fall der Fig. 1. S. 481 gilt, nämlich für ein rechtwinkliges geodätisches Dreieck, dessen eine Kathete m im Meridian und dessen andere Seite n rechtwinklig zum Meridian liegt.

Um die Formeln zu verallgemeinern, kann man zuerst zeigen, dass die Gleichungen (41) und (43) auch entsprechend für den *anderen* Winkel α gelten, indem man $\beta = 90^\circ - (\alpha - \epsilon)$ setzt, und dazu ϵ nach (37) benützt. Hat man dieses erkannt, so kann man weiter schliessen, dass die beiden Formeln (33) und (34), obgleich in dem besonderen Falle $k_{\sin} = k_{\cos}$ war, nun ihre für α und β gemeinsame Berechtigung haben; und weiter kann man auf demselben Wege wie bei § 93. mit Fig. 4. S. 459 die Verallgemeinerung der gefundenen Formeln fortsetzen.

Wir wollen dieses hier nicht weiter verfolgen, da nach den Entwicklungen von § 97. und § 98. kein praktisches Bedürfnis hiezu vorliegt.

Unsere vorstehende Entwicklung wollen wir aber in zweifachem Sinne als nicht überflüssig bezeichnen: Erstens giebt sie uns eine schöne Anwendung des Prinzips der konformen Linien-Abbildung in dem Sinne der Anmerkung zu § 94. S. 462, und zweitens haben wir in diesem § 100. eine sofort an § 93. und § 94. anschliessbare Theorie, welche den Einfluss derjenigen Glieder zu schätzen gestattet, welche in § 93. vernachlässigt wurden.

§ 101. Praktische Anwendung der allgemeinen Theorie der geodätischen Dreiecke.

(Bezeichnungen nach Fig. 1. und 2. S. 473.)

Wir wollen zuerst die verschiedenen von § 98. und § 99. zur praktischen Anwendung geeigneten Formeln zusammenstellen, und dazu auch noch einige zusammenfassende Bezeichnungen einführen. Wenn die Krümmungsmasse in den drei Ecken eines Dreiecks mit k_a, k_b, k_c bezeichnet sind, so nehmen wir hierzu einen Mittelwert:

$$\frac{k_a + k_b + k_c}{3} = k_0 \quad (1)$$

Dieser Wert k_0 entspricht dem Schwerpunkt des Dreiecks und dem arithmetischen Mittel der geographischen Breiten der drei Eckpunkte des Dreiecks.

Wenn die drei Seiten eines geodätischen Dreiecks die Längen a, b, c haben, so berechnen wir das mittlere Seitenquadrat:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = m^2 \quad (2)$$

Die Winkel des geodätischen Dreiecks sind A, B, C , und die Winkel eines ebenen Dreiecks, welches mit dem geodätischen Dreieck gleiche Seitenlängen a, b, c hat, sind A^*, B^*, C^* . Die Winkelsumme des ebenen Dreiecks, d. h. $A^* + B^* + C^*$ ist $= 180^\circ$, und die Summe der Winkel des geodätischen Dreiecks, d. h. $A + B + C$ ist $= 180^\circ + \varepsilon$, wo ε der geodätische Excess des Dreiecks heisst.

Die Fläche des geodätischen Dreiecks, auf der krummen Oberfläche gemessen, sei F , und die Fläche des ebenen Dreiecks mit den Seiten a, b, c sei \triangle .

Mit diesen Bezeichnungen haben wir von (16) und (17) § 98. S. 477 mit Zu-
setzung der nötigen ϱ :

$$A - A^* = \frac{\triangle}{3} \varrho \frac{2k_a + k_b + k_c}{4} + \frac{\triangle}{24} \varrho k^2 \frac{a^2 + 7b^2 + 7c^2}{15} \quad (3)$$

oder mit Einführung von k_0 und von m^2 in dreifacher Form:

$$\left. \begin{aligned} A - A^* &= \frac{\triangle}{3} \varrho k_0 + \frac{\triangle}{12} \varrho (k_a - k_0) + \frac{\triangle}{120} \varrho k^2 (7m^2 - 2a^2) \\ B - B^* &= \frac{\triangle}{3} \varrho k_0 + \frac{\triangle}{12} \varrho (k_b - k_0) + \frac{\triangle}{120} \varrho k^2 (7m^2 - 2b^2) \\ C - C^* &= \frac{\triangle}{3} \varrho k_0 + \frac{\triangle}{12} \varrho (k_c - k_0) + \frac{\triangle}{120} \varrho k^2 (7m^2 - 2c^2) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\text{Summe } \varepsilon = \triangle \varrho k_0 + 0 + \frac{\triangle}{8} \varrho k^2 m^2 \quad (5)$$

Der theoretischen Vollständigkeit wegen fügen wir auch die Formel für die krumme Oberfläche F hier bei, nach (13) § 99. S. 480:

$$F = \triangle + \frac{\triangle}{8} k m^2 \quad (6)$$

und als Folge von (5) und (6):

$$\varepsilon = F \varrho k_0 + k^3 \dots \quad (7)$$

Endlich bildet man aus (4) und (5) durch Elimination von \triangle die Differenz:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} \frac{2k_a + k_b + k_c}{4k_0} + \varepsilon \frac{k}{180} (-2a^2 + b^2 + c^2) \quad (8)$$

oder mit Einführung der Mittelwerte k_0 und m^2 nach (1) und (2) in dreifacher Form:

$$\left. \begin{aligned} A - A^* &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{12} \left(\frac{k_a - k_0}{k_0} \right) + \frac{\varepsilon k}{60} (m^2 - a^2) \\ B - B^* &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{12} \left(\frac{k_b - k_0}{k_0} \right) + \frac{\varepsilon k}{60} (m^2 - b^2) \\ C - C^* &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{12} \left(\frac{k_c - k_0}{k_0} \right) + \frac{\varepsilon k}{60} (m^2 - c^2) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Summe $\varepsilon = \varepsilon$.

Wo in den höheren Gliedern dieser Formeln k schlechthin steht, sind die einzelnen k_a, k_b, k_c nicht mehr unterschieden, und man kann dann nach Belieben etwa $k = k_0$ nehmen.

Die Zahlenwerte von k kann man aus der Hilfstafel Seite [2]—[23] unseres Anhangs entnehmen, denn es ist:

$$k = \frac{1}{r^2}, \quad \log k = \log \frac{1}{r^2} \quad (10)$$

Auch darf man sich wohl erlauben, wenn es sich um den Mittelwert k_0 nach (1) handelt, statt des Mittels aus den k selbst, das Mittel aus den verschiedenen $\log k$ als $\log k_0$ gelten zu lassen, oder man kann auch $\log k_0$ zu dem arithmetischen Mittel der Breiten q der drei Ecken des Dreiecks nehmen, insofern auf nicht zu weite Erstreckung die Differenzen zwischen den Breiten q , zwischen den Werten k und den Werten $\log k$ alle nahezu einander proportional angenommen werden dürfen.

Wenn die Proportionalität zwischen Δq und Δk nicht mehr stattfindet, so ist auch die der ganzen Theorie zu Grunde liegende Annahme, dass k eine lineare Funktion der Flächen-Coordinationen sei, nicht mehr erfüllt (vgl. (13) und (14) § 96. S. 468 und (13) § 97. S. 471).

Zu einem Zahlen-Beispiele nehmen wir zuerst wieder das klassische Dreieck Inselfberg-Hohehagen-Brocken, welches uns schon mehrfach, auf S. 234 und S. 256 als Rechen-Beispiel gedient hat.

Wir nehmen nach S. 234 zuerst wieder die genäherten geographischen Breiten der drei Eckpunkte des Dreiecks, und entnehmen darnach von Seite [14] des Anhangs die Krümmungsmasse:

Punkt	Breite	$\log k = \log \frac{1}{r^2}$	(10)
Inselfberg	50° 51' 9"	$\log k_a = 6.390\,1277.8$	
Hohehagen	51° 28' 31"	$\log k_b = 6.390\,0659.4$	
Brocken	51° 48' 2"	$\log k_c = 6.390\,0337.4$	
Mittel	51° 22' 34"	$\log k_0 = 6.390\,0758.2$	

Wir haben dabei ausnahmsweise scharf gerechnet, d. h. von Seite [14] zuerst $\log r$ interpoliert, und daraus $\log r^2$ und $\log k$ gebildet. Wir wollen damit die Winkel auf 0,000 001" genau berechnen, was nur formellen Sinn für ein Vergleichs-Beispiel hat.

Indem wir die früheren Zahlenwerte von S. 239 und 255—256 wieder benützen, haben wir:

$$\begin{aligned} a &= 69,194^{km} & b &= 105,973^{km} & c &= 84,941^{km} \\ a^2 &= 4787,8^{qkm} & b^2 &= 11280,2^{qkm} & c^2 &= 7215,0^{qkm} & m^2 &= 7744,8^{qkm} \\ \log \triangle &= 9.467\ 2167.6 & \triangle &= 2\ 932\ 356\ 450^{qm} \end{aligned}$$

hiemit nach (5):

$$\varepsilon = 14,849\ 701'' + 0,000\ 353'' = 14,850\ 054 \quad (11)$$

dann nach (6):

$$F = 2\ 932\ 356\ 450^{qm} + 69\ 693^{qm} = 2\ 932\ 426\ 143^{qm}$$

und damit ε nach (7):

$$\varepsilon = 14,850\ 054'' \quad (\text{stimmt mit (11)})$$

Die Gruppe (4) und (5) giebt:

$$\left. \begin{aligned} A - A^* &= 4,949\ 900'' - 0,000\ 148'' + 0,000\ 136'' = 4,949\ 888'' \\ B - B^* &= 4,949\ 900'' + 0,000\ 028'' + 0,000\ 096'' = 4,950\ 024'' \\ C - C^* &= 4,949\ 900'' + 0,000\ 120'' + 0,000\ 121'' = 4,950\ 141'' \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\varepsilon = 14,849\ 700'' + 0 \quad + 0,000\ 353'' = 14,850\ 053''$$

Ferner giebt die Gruppe (9):

$$\left. \begin{aligned} A - A^* &= 4,950\ 018'' + 0,000\ 148'' + 0,000\ 018'' = 4,950\ 184'' \\ B - B^* &= 4,950\ 018'' - 0,000\ 028'' - 0,000\ 021'' = 4,949\ 969'' \\ C - C^* &= 4,950\ 018'' - 0,000\ 120'' + 0,000\ 003'' = 4,949\ 901'' \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\varepsilon = 14,850\ 054'' + 0 \quad + 0 \quad = 14,850\ 054''$$

Wenn man diese Winkel (12) und (13) mit den früheren sphärischen Angaben auf S. 256 oben vergleicht, so findet man nur Differenzen von etwa 0,0001'', woraus zu ersehen ist, dass in diesem Falle eines sehr grossen Dreiecks die Berechnung nach den sphäroidischen Formeln keine merkbare Abweichung von der sphärischen Rechnung bringt.

Die Zahlenwerte, welche wir hier in (12) und (13) berechnet haben, stimmen nicht überein mit den Werten, welche Gauss selbst in Art. 28. der „Disquisitiones generales etc.“ gegeben hat, die Gauss'schen Angaben sind nämlich:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Inselberg} & A - A^* = 4,95131'' \\ \text{Hohehagen} & B - B^* = 4,95113'' \\ \text{Brocken} & C - C^* = 4,95104'' \end{array} \right\} \quad (14)$$

$$\varepsilon = 14,85348''$$

Diese Werte (14) haben unter sich sehr nahe dieselben Differenzen wie unsere Werte (12) und (13), die Werte (14) selbst sind aber erheblich kleiner als unsere (12) und (13).

Es rührt das jedenfalls davon her, dass Gauss im Jahre 1827 andere Erddimensionen seiner Rechnung zu Grunde legte, als die erst von 1841 herrührenden Bessel'schen Erddimensionen, welche unseren Berechnungen zu Grunde liegen. Man kann aus (14) rückwärts berechnen, dass der dabei von Gauss angenommene mittlere Erdradius r sein muss:

$$\log r = 6,804\ 9120 \quad (14a)$$

Um diese Annahme zu erklären, machten wir einen Versuch mit denjenigen zwei Erddimensions-Bestimmungen, welche Gauss in der „Bestimmung des Breiten-Unterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona, Göttingen 1828“, S. 72 und S. 82 erwähnt hat, nämlich die Walbeck'schen und Schmidt'schen Erddimensionen, die wir auch in unserer Einleitung S. 8 zitiert haben. Dieselben geben:

$$\begin{aligned} \text{Walbeck: } \log c &= 6,806\ 0460 & \log c'^2 &= 7,823\ 087 \\ \text{Schmidt: } \log c &= 6,806\ 0824 & \log c'^2 &= 7,828\ 433 \end{aligned}$$

und damit den mittleren Krümmungshalbmesser für die Breite $\varphi = 51^\circ\ 22'\ 34''$:

$$\text{Walbeck: } \log r = 6,804\ 9241 \quad (14b)$$

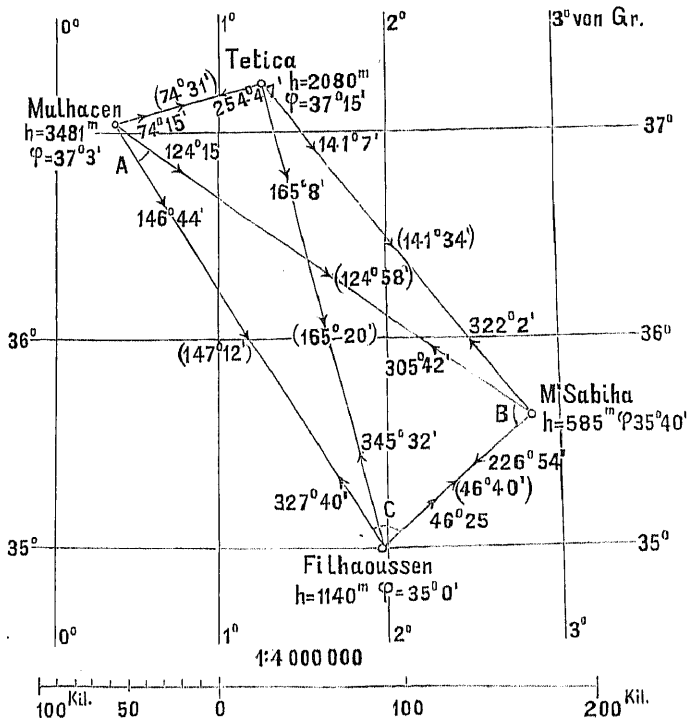
$$\text{Schmidt: } \log r = 6,804\ 9440 \quad (14c)$$

Diese beiden stimmen nicht genügend mit (14a), es ist also zweifelhaft, welche Erddimensionen Gauss bei dem Zahlen-Bispiel von Art. 28. der „Disquisitiones generales“ zu Grunde gelegt hat. Indessen besteht auch kein wissenschaftliches Interesse, dieses herauszubringen.

Die im Vorstehenden berechneten Winkel-Reduktionen sind unabhängig von den Reduktionen zwischen den geodätischen Linien und den vertikalen Schnitten, welche durch die früheren Formeln (30) und (31) S. 380 bestimmt sind. Jene Reduktionen müssen *vorher* schon angebracht sein, ehe die geodätische Theorie von § 97.—§ 99. zur Anwendung kommt.

Wir wollen dieses an einem zweiten grösseren Beispiele zeigen, welches in Fig. 1. dargestellt ist.

Fig. 1. (vgl. Fig. 4. S. 25).
Trigonometrische Verbindung zwischen Spanien und Algier.



Hiezu nehmen wir eines der grossen Dreiecke, welche im Jahre 1879 von *Ibanez* und *Perrier* zur trigonometrischen Verbindung zwischen Spanien und Algier angelegt worden sind, wie wir schon früher auf S. 24—25 im allgemeinen berichtet haben.

Diese grossen Dreiecke eignen sich sehr gut als Zahlen-Beispiele zur Anwendung der geodätischen Formeln mit sphäroidischen Gliedern, und in diesem Sinne ist auch schon eine Berechnung nach *Helmerts* Formeln mitgeteilt worden von *Ferner* in der „Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 303—308. Im übrigen haben wir die Quellschriften: „Enlace geodésico y astronómica de Europa y Africa, Madrid 1880“ und in dem „Generalbericht d. europ. Gradm. für 1880“, S. 44—57: „Jonction géodésique et astronomique de l'Algérie avec l'Espagne“, und in endgültiger Berechnung in dem Werke: „Memorias del instituto geográfico y estadístico. Tomo VII. Madrid 1888“, S. 97—111.

Nach diesen Schriften und einigen Nebenberechnungen haben wir die zur Berechnung nötigen Hauptwerte der Breiten und der Azimute in Fig. 1. zusammengestellt, welche nun in Verbindung mit Fig. 1. S. 25 alles wesentliche giebt.

Wir wollen hier nur *eines* der vier Verbindungs-Dreiecke durchrechnen, nämlich das grösste: Mulhacen, M'Sabiha, Filhaoussen.

Die gemessenen Winkel sind folgende (Memorias etc. S. 100):

$$\left. \begin{array}{lll} \text{Mulhacen} & A = 22^\circ 28' 45,269'' \\ \text{M'Sabiha} & B = 78^\circ 48' 45,563'' \\ \text{Filhaoussen} & C = 78^\circ 43' 39,198'' \end{array} \right\} \quad (15)$$

$$\text{Summe} = 180^\circ 0' 70,030''$$

Wir wollen jedoch für unsere Zwecke diese 3 Winkel lieber in Gestalt von 6 *Richtungen* darstellen, und zwar so, dass die Richtungen nahezu gleich den Azimuten der betreffenden Seiten werden:

$$\left. \begin{array}{lll} \text{Mulhacen} & \text{M'Sabiha} & \text{Filhaoussen} \\ (A\ B) = 124^\circ 15' 0,000'' & (B\ C) = 226^\circ 53' 0,000'' & (C\ A) = 327^\circ 40' 0,000'' \\ (A\ C) = 146^\circ 43' 45,269'' & (B\ A) = 305^\circ 41' 45,563'' & (C\ B) = 46^\circ 23' 39,198'' \\ A = 22^\circ 28' 45,269'' & B = 78^\circ 48' 45,563'' & C = 78^\circ 43' 39,198'' \end{array} \right\} \quad (16)$$

Die Differenzen A, B, C sind wieder dieselben wie bei (15). Dass $(A\ B)$ und $(B\ A)$ u. s. w. nicht nahezu um 180° verschieden sind, obgleich die Richtungen selbst auf etwa $1'$ genau Azimute sind, rührt von den Meridian-Konvergenzen her; die Mittelwerte zweier solcher Gegenrichtungen sind als *Mittel*-Azimute genähert in Fig. 1. eingeschrieben, z. B. $(147^\circ 12')$ als Mittel aus $146^\circ 44'$ und $327^\circ 40' \pm 180^\circ$.

Nun müssen die gemessenen Richtungen (16) zunächst in zweifacher Weise wegen der Abplattung der Erde reduziert werden.

Erstens erfolgt die Reduktion wegen der *Höhe* der Zielpunkte über dem Meere; es ist nach der Formel für γ in § 70, S. 363 die Reduktion für einen Zielpunkt der in der Höhe h über dem Meere, im Azimut α angezielt wird, in Sekunden:

$$\gamma = \eta^2 \frac{h}{N} \varrho \sin \alpha \cos \alpha \quad (17)$$

Zweitens ist Reduktion erforderlich von den vertikalen Schnitten, in welchen die Richtungen (16) gemessen sind, auf die geodätischen Linien; hiefür haben wir nach (30) und (31) S. 380 nebst Fig. 2. S. 378, die Reduktion in genügender Näherung:

$$v = -\frac{1}{3} \eta^2 \varepsilon = -\frac{1}{6} \eta^2 \frac{s^2}{N^2} \varrho \sin \alpha \cos \alpha \quad (18)$$

Der in (17) und (18) vorkommende Faktor η^2 hat wie gewöhnlich die Bedeutung $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$. Da die Breiten φ der drei Eckpunkte in Fig. 1. angegeben sind, hat man damit auch die *Mittelbreiten* für die drei Seiten, und hiezu lassen sich die drei Werte $\log \eta^2$ berechnen, sowie die nötigen $\log N$ aus der Tafel Seite [10] entnehmen:

M'Sabiha	35° 40'	Mulhacen	37° 3'	Mulhacen	37° 3'
Filhaoussen	35° 0'	Filhaoussen	35° 0'	M'Sabiha	35° 40'
Mittelbreite $\varphi = 35^\circ 20'$			36° 2'		36° 22'
$\log \eta^2$	7.65049		7.64286		7.63917
$\log N$	6.80513		6.80514		6.80515

$$\left. \begin{array}{l} \log \eta^2 \\ \log N \end{array} \right\} \quad (19)$$

Da im übrigen zu der Rechnung nach den Formeln (17) und (18) nichts weiter zu bemerken ist, indem die nötigen Elemente teils in (19) gegeben, teils in Fig. 1. eingeschrieben sind, so teilen wir sofort die Ergebnisse dieser Rechnungen mit:

Richtung	Mulhacen		M'Sabiha		Filhaoussen	
	(A B)	(A C)	(B C)	(B A)	(C A)	(C B)
γ	— 0,039"	— 0,074"	+ 0,082"	— 0,230"	— 0,225"	+ 0,042"
ν	+ 0,126"	+ 0,123"	— 0,021"	+ 0,126"	+ 0,123"	— 0,021"
$\gamma + \nu$	+ 0,087", + 0,049"		+ 0,061", — 0,104"		— 0,102", + 0,021"	
	— 0,038"		— 0,165"		+ 0,123"	

(20)

Indem wir diese Reduktionen (20) den gemessenen Richtungen (16) hinzufügen, erhalten wir folgende neue Tabelle der Richtungen, die wir zur Unterscheidung von (A B) u. s. w. nun mit [A B] u. s. w. bezeichnen wollen:

Mulhacen		M'Sabiha		Filhaoussen	
[A B]	= 124° 15' 0,087"	[B C]	= 226° 53' 0,061"	[C A]	= 327° 39' 59,898"
[A C]	= 146° 43' 45,818"	[B A]	= 305° 41' 45,459"	[C B]	= 46° 23' 39,219"
A'	= 22° 28' 45,231"	B'	= 78° 48' 45,398"	C'	= 78° 43' 39,321"

(21)

Um nun das Dreieck, welchem diese Winkel angehören, auf ein *ebenes* Dreieck mit gleich langen Seiten zu reduzieren, oder um die früher mit A^* , B^* , C^* bezeichneten Winkel zu finden, hat man wieder die hiefür gültigen Formeln anzuwenden, welche wir am Anfang dieses § 101. unter (1)–(9) S. 489–490 zusammengestellt haben.

Die hiezu nötigen Krümmungsmasse k , bzw. die entsprechenden $\log k \varrho$ sind:

A, Mulhacen	$\varphi = 37^\circ 3'$	$\log k \varrho = \log \frac{\varrho}{r^2} = 1.705\,9395$
B, M'Sabiha	.. $35^\circ 40'$ 1.706\,0782
C, Filhaoussen	.. $35^\circ 1'$ 1.706\,1356

Was die Rechnung im übrigen betrifft, so haben wir die Seite $AC = b = 269\,926^m$ zu Grunde gelegt, die Winkel A , B , C zunächst vorläufig auf 180° ausgeglichen und damit erste Näherungen von A^* , B^* , C^* erhalten, woraus weiter folgte: $BC = a = 105\,178,9^m$ und $AB = c = 269\,845,7^m$. Damit konnte weiter gerechnet werden $\log \triangle = 10.143\,6726$ und $\varepsilon = 70,7607''$ und endlich:

$$A' - A^* = 23,5866'' \quad B' - B^* = 23,5866'' \quad C' - C^* = 23,5875'' \quad (22)$$

Zieht man diese (22) von den A' , B' , C' in (21) ab, so erhält man:

$$\begin{aligned} A^* &= 22^\circ 28' 21,644'' \\ B^* &= 78^\circ 48' 21,811'' \\ C^* &= 78^\circ 43' 15,733'' \\ \text{Summe} &= 179^\circ 59' 59,188'' \end{aligned}$$

$$w = -0,812'' \quad (23)$$

Dieser nun noch bleibende Widerspruch $w = -0,812''$ ist den Beobachtungs-Fehlern zuzuschreiben. Die geodätische Winkel-Reduktion an sich ist damit vollendet.

Wenn man die praktische Frage aufwirft, ob die kleinen Reduktionen, mit denen wir uns hier beschäftigt haben, bei Triangulierungen in Rechnung zu bringen

sind, so wird man beim heutigen Stande der Beoberkungskunst diese Frage für die gewöhnlichen kleinen Dreiecke und geringen Höhen wohl vereinen, dagegen bei solchen grossen Verhältnissen wie diejenigen der Triangulierung zwischen Spanien und Algier sind kleine Grössen wie die unter (20) erhaltenen neben einem nur etwa 8 mal grösseren Messungs-Fehler w nach gewöhnlicher Anschauung nicht zu vernachlässigen.

Dieses betrifft diejenigen Reduktionen, deren Theorie in den früheren § 70. und § 75. behandelt worden ist. Die kleinen Grössen, welche durch die Theorie dieses Kapitels X. § 97.—§ 99. gewonnen wurden, sind noch erheblich kleiner, z. B. in dem behandelten spanisch-algerischen Dreieck mit Excess von $70''$ betragen die Fehler in den drei Winkeln A^* , B^* , C^* , wenn man nach dem ganz einfachen Legendreschen Satze von § 41. rechnet, allerdings bzw. $-0,0035''$, $-0,0035''$, $-0,0044''$, zusammen $-0,0114''$, allein schon der erweiterte sphärische Legendresche Satz von § 44. S. 255 vermag diese Fehler fast ganz zu tilgen, und der praktische Gewinn unseres ganzen Kapitel X. beschränkt sich also sogar bei der grossen spanisch-algerischen Triangulierung auf Glieder von höchstens $0,001''$ Betrag.

Wenn hiernach die Theorie der Gauss'schen „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ sich hier nur als schöne Theorie zeigt, welche man in der Praxis kaum unmittelbar braucht, so ist die Theorie damit doch auch praktisch nicht überflüssig, denn ohne diese Theorie wüsste man eben nicht, dass die zweifellos vorhandenen Einflüsse der Abplattung der Erde in diesem Falle so wenig ausmachen, und die höheren sphärischen Glieder mit $\frac{1}{r^4}$ in § 44. S. 254–256 würden ohne die Kenntnis der sphäroidischen Glieder wertlos sein.

Nachdem also hiemit gezeigt ist, wie man ein einzelnes grosses Dreieck sphäroidisch berechnen kann, ist auch die entsprechende Berechnung eines Zusammenhangs von grossen Dreiecken, also eines Dreiecksnetzes klar gemacht. Damit ist auch die Berechnung langer geodätischer Linien als Diagonalen von Dreiecksketten erklärt, und wir haben zu Fig. 3. S. 384 und dem Citat Hansen S. 385 nur zu bemerken, dass die langgestreckten Dreiecke mit den Seiten s_1 , s_2 , s in Fig. 3. S. 384 nun nach den Formeln (4), (5) oder (9) S. 489–490 berechnet werden können, wobei allerdings die höheren Glieder mehr Einfluss erlangen können als bei der Berechnung einzelner gemessener Dreiecke.

Wirkung der Refraktion. Infolge der Abplattung der Erde und der Niveauschichten der Atmosphäre findet eine Ablenkung eines Lichtstrahles durch Refraktion nicht bloss in vertikalem Sinne, sondern auch in horizontalem Sinne statt. Je zwei aufeinander folgende Elemente eines Lichtstrahls liegen in einer Ebene, welche die Lotlinie der Trennungsfläche zwischen zwei verschiedenen dichten und verschiedenen brechenden Schichten der Atmosphäre enthält. Da die Trennungsfläche zweier solcher Schichten rechtwinklig zur Lotrichtung sein muss, finden wir für den Lauf einer Lichtkurve durch die Atmosphäre ein ähnliches Gesetz wie für die geodätische Linie (vgl. Fig. 2. S. 368), dass nämlich die Schmiegungs-Ebene der Lichtkurve überall Normalebene der lichtbrechenden Fläche sei oder die Lotlinie dieser Fläche enthalten muss.

Auf Grund dieses Gesetzes sind Untersuchungen über die azimutale Ablenkung des Lichtstrahles angestellt worden von Andrae, Sanderhof und Helmert (s. Helmert, höhere Geodäsie II, S. 565), in ähnlicher Weise, wie für den Lauf der geodätischen Linie auf dem Erdellipsoid zwischen den beiden Normalschnitten (vgl. Fig. 2. S. 378). Da die Lichtkurve in ihrer Hauptkrümmung viel flacher ist als die geodätische Linie auf der Erde, so wird auch der Querabstand zwischen den Normalschnitten (q in Fig. 7. S. 350 oder $2v$ in Fig. 2. S. 378) in denselben Verhältnisse kleiner, und ebenso auch die kleinen Winkel v und v' (Fig. 2. S. 378) beider Lichtkurven kleiner als für die geodätische Linie auf der Erde. Das Krümmungsverhältnis zwischen der Lichtlinie und einer Erdlinie ist der sogenannte Refraktions-Koeffizient, im Mittel etwa $k = 0,13$ (vgl. Band II, S. 429), und hiernach verhält sich die azimutale Ablenkung des Lichtstrahls zu der entsprechenden geodätischen Reduktion $\alpha_1 - \alpha = v$ (nach (38) S. 380) wie $0,13$ zu 1 . Da nun diese geodätische Reduktion $\alpha_1 - \alpha = v$ selbst sehr gering ist (vgl. die Zahlenwerte (20) S. 494), so ist nach den zitierten Untersuchungen von Andrae, Sanderhof und Helmert, die Lichtablenkung kv zu vernachlässigen.

Hiebei wollen wir auch als Nachtrag zu § 70. S. 363–364 noch bemerken, dass die erste uns bekannte veröffentlichte Entwicklung der sphäroidischen Reduktion für die Höhe des Zielpunktes in *Bohnenberger's* Abhandlung „De computandis dimensionibus etc.“, § 9. (vgl. die Anmerkung S. 347) zu finden ist, so wie von uns in § 70. dargestellt wurde.

Rechtwinklige geodätische Coordinaten mit geodätischen Linien.

Nachdem wir an zwei Zahlen-Beispielen gezeigt haben, wie die allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke zur Berechnung einzelner *Dreiecke* und damit zur Berechnung von *Dreiecks-Netze* gebraucht werden kann, wollen wir auch noch die Anwendung dieser Theorie zur Berechnung weit ausgedehnter rechtwinkliger geodätischer *Coordinaten* zeigen.

Es handelt sich um die Verallgemeinerung und Erweiterung des Prinzips der rechtwinkligen *Soldnerschen* Coordinaten von § 46. Wir haben jene nur *sphärisch* entwickelten Formeln schlechthin mit einem *mittleren* Krümmungshalbmesser auf das Ellipsoid angewendet, nur mit der auf S. 233 angedeuteten Begründung, dass die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ ihrer Kleinheit wegen sphärisch berechnet werden dürfen.

Das Bedürfnis einer gründlicheren Theorie der rechtwinkligen Coordinaten ist bei der Preussischen Landesaufnahme durch die Polygonschluss-Bedingungen hervorgerufen worden, wie wir bereits nach einer Mitteilung von Major *Haupt*, auf S. 135 berichtet haben. Auf Grund der Dreiecks-Formeln der *Gauss'schen* „Disquisitiones generales“ ist die Theorie der rechtwinkligen Coordinaten mit geodätischen Linien von General *Schreiber* entwickelt worden, die wir, nach erhaltenen Angaben des Urhebers, zur Darstellung gebracht haben in dem Werke „Deutsches Vermessungswesen von *Jordan-Steppes*, 1882, I.“ S. 109–113.

Hierauf verweisend, wollen wir über die Gebrauchsformeln (a. a. O. (50) S. 112) berichten, dass dieselben in erster Näherung in die bekannten *Soldnerschen* Formeln übergehen, so dass sie auch dazu benützt werden können, die Fehler zu bestimmen, welche in den *Soldnerschen* Formeln bei gewissen Erstreckungen übrig bleiben. Das Ergebnis ist sehr tröstlich, indem die einfachen *Soldnerschen* Formeln auf mehrere hundert Quadratmeilen angewendet werden dürfen, ohne Fehler von dem Range 0,01" in den Azimuten zu erzeugen.

Wenn also auch hier wieder der Gewinn der feinen Theorien ein teilweise nur mittelbarer und negativ wirkender ist, indem sich herausstellt, dass man zu vielen Zwecken die feinere Theorie nicht braucht, so ist hiezu, wie als Schlussatz zu unserem ganzen gegenwärtigen Kapitel X. zu sagen: Wenn man die feinere Theorie nicht hätte, so würde man die Grenzen der Anwendbarkeit gröberer Theorien auch *nicht* wissen, und nur die über die nächsten praktischen Zwecke hinausgehenden Theorien, deren Grundlage bis heute noch die *Gauss'schen* „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ sind, haben ein sicheres Urteil über die Brauchbarkeit und das nötige Vertrauen zur Anwendung der gröberen sphärischen geodätischen Formeln geschaffen.

Kapitel XI.

Bestimmung der Dimensionen des Erd-Ellipsoids.

§ 102. Bestimmung der Meridian-Ellipse durch zwei Breiten-Gradmessungen.

Das älteste Mittel zur Bestimmung der Erddimensionen sind die sogenannten Breiten-Gradmessungen, deren Geschichte wir in der Einleitung S. 1—9 mitgeteilt haben.

Unter einer Breiten-Gradmessung versteht man die Messung eines Meridianbogens der Erde, und der Polhöhen oder geographischen Breiten seiner Endpunkte.

Wenn man die Messungs-Ergebnisse *zweier* solcher Gradmessungen unter verschiedenen Breiten kennt, so kann man die Dimensionen der dadurch bestimmten Meridian-Ellipse berechnen.

Ehe wir uns damit beschäftigen, ist eine Bemerkung über die Messung der Meridianbögen zu machen. Geradezu auf einem Meridian der Erde eine Linie unmittelbar zu messen, das war das Bestreben der ersten Gradmesser (vgl. z. B. S. 3, arabische Gradmessung und S. 6, amerikanische Gradmessung), und wenn der gemessene Bogen einen kleinen Winkel α mit der Meridianrichtung bildete, so konnte man leicht eine Reduktion auf den Meridian ausführen, welche im wesentlichen in der Multiplikation des gemessenen Bogens mit $\cos \alpha$ besteht. Auch Triangulierungsketten, welche nach ihrer Haupterstreckung nahe der Meridianrichtung liegen, lassen sich auf den Meridian reduzieren, wie wir ausführlicher im nächsten § 103. zeigen werden.

Nach Andeutung von Fig. 1. nehmen wir nun an, man habe zwei Gradmessungen in demselben Meridian, oder, was hier dasselbe ist, zwei Gradmessungen, deren Elemente in einer Meridian-Ellipse dargestellt sind. Die erste Gradmessung habe den Meridianbogen m mit den Breiten φ_1 und φ_2 seiner Endpunkte, und die zweite Gradmessung entsprechend den Meridianbogen m' mit den Breiten φ_3 und φ_4 . Zur Abkürzung wollen wir hiezu schreiben:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = A\varphi \quad \varphi_4 - \varphi_3 = A\varphi' \quad (1)$$

$$\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi \quad \frac{\varphi_4 + \varphi_3}{2} = \varphi' \quad (2)$$

Nun wissen wir von § 35. S. 218 und S. 223, dass man die Länge m eines mässig grossen Meridianbogens als Kreisbogen berechnen kann, dessen Halbmesser der Meridian-Krümmungshalbmesser M für die Mittelbreite φ , und dessen Centriwinkel die Breiten-Differenz $A\varphi$ ist; d. h. man hat für die beiden Gradmessungen:

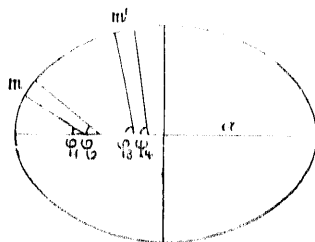
$$m = \frac{A\varphi}{\varrho} M \quad m' = \frac{A\varphi'}{\varrho} M' \quad (3)$$

Dabei ist nach (21) und (19) S. 210:

$$M = \frac{c}{\sqrt{3}} \quad M' = \frac{c}{\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$\sqrt{2} = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi \quad \sqrt{2} = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi' \quad (5)$$

Fig. 1.
Zwei Breiten-Gradmessungen.



Wenn man diese (5) und (4) in (3) einsetzt, und dann die beiden Gleichungen (3) dividiert, so erhält man:

$$\left(\frac{m}{m'} \frac{\Delta \varphi'}{\Delta \varphi} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1 + e'^2 \cos^2 \varphi'}{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad (6)$$

Zur Abkürzung schreiben wir:

$$\left(\frac{m}{m'} \frac{\Delta \varphi'}{\Delta \varphi} \right)^{\frac{2}{3}} = q^2 \quad (6a)$$

Die Gleichung (6) ist in Bezug auf e'^2 linear, und kann daher geradezu nach e'^2 aufgelöst werden. Wenn man dabei die Abkürzung (6a) benützt, so erhält man:

$$e'^2 = \frac{1 - q^2}{q^2 \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi'} \quad (7)$$

Hat man hieraus e'^2 berechnet, so erhält man mit Probe aus (3), (4) und (5):

$$c = \frac{m}{\Delta \varphi} \varrho V^3 \quad \text{oder} \quad c = \frac{m'}{\Delta \varphi'} \varrho V'^3 \quad (8)$$

Die beiden Ellipsen-Halbachsen a und b erhält man aus c und e'^2 nach (7) und (10) S. 206:

$$a = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2}} \quad b = \frac{c}{1 + e'^2} \quad (9)$$

woraus man nochmals zur Probe bilden kann:

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2} = e'^2$$

Damit hat man auch e^2 und die Abplattung α :

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} \quad , \quad \alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2} \quad \text{oder} \quad \alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}} \quad (10)$$

Auch die Länge des Meridian-Quadranten Q kann nach (19) S. 219 berechnet werden:

$$Q = a \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16} \right) \quad (11)$$

Zur Anwendung der entwickelten Formeln wollen wir die bekannten klassischen Gradmessungen von Peru und Lappland benützen.

Nach *Bessels* Angabe im 14. Band, 1837, der „Astr. Nachr.“ S. 334 und S. 337 sind die Ergebnisse der Gradmessungen in Peru und Lappland (Schweden) die folgenden:

Gradmessung in Peru:

$$\left. \begin{array}{l} m = 176\,875,5 \text{ Toisen} = 344\,736,772 \text{ Meter} \\ \varphi_1 = -3^\circ 4' 32,068'' \quad \varphi_2 = +0^\circ 2' 31,387'' \end{array} \right\} \quad (12)$$

Gradmessung in Lappland:

$$\left. \begin{array}{l} m' = 92\,777,981 \text{ Toisen} = 180\,827,654 \text{ Meter} \\ \varphi_3 = 65^\circ 31' 30,265'' \quad \varphi_4 = 67^\circ 8' 49,830'' \end{array} \right\} \quad (13)$$

Man bildet hieraus die Differenzen und die Mittel:

$$\begin{array}{ll} \Delta \varphi = 3^\circ 7' 3,455'' & \Delta \varphi' = 1^\circ 37' 19,565'' \\ = 11\,223,455'' & = 5839,565'' \\ \varphi = -1^\circ 31' 30,3405'' & \varphi' = 66^\circ 20' 10,0475'' \end{array}$$

Nun rechnet man nach den angegebenen Formeln:

$$\begin{aligned}
 \log \overset{m}{Aq} &= 1.487\,3610\cdot4 & \log \overset{m'}{Aq'} &= 1.490\,8843\cdot5 \\
 \log q^2 &= 9.997\,6511\cdot3 \\
 e'^2 &= \frac{1 - 0.994\,606\,119}{0.993\,901\,593 - 0.161\,096\,660} = 0.006\,476\,764 \\
 \log V^2 &= 0.002\,8017\cdot7 & \log V'^2 &= 0.000\,4529\cdot0 \\
 \log c &= 6.805\,9888\cdot4 \\
 \log a &= 6.804\,5869\cdot6 & \log b &= 6.803\,1850\cdot8 \\
 \alpha &= 1:310,29534 & Q &= 10\,000\,157 \text{ Meter}
 \end{aligned} \tag{14}$$

Wenn man statt e'^2 zuerst e^2 haben will, so kann man dieses aus (7) ableiten, denn es ist nach (6) S. 206:

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} \tag{15}$$

Dieses auf (7) angewendet giebt:

$$e^2 = \frac{1 - q^2}{\sin^2 q' - q^2 \sin^2 q} \tag{16}$$

Auf dieselbe Formel wird man auch unmittelbar dadurch geführt, dass man statt (4) und (5), nach (16) S. 209 und (19) S. 210 schreibt:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{W^3} \quad M' = \frac{a(1 - e'^2)}{W'^3} \tag{17}$$

$$W^2 = 1 - e^2 \sin^2 q \quad W'^2 = 1 - e'^2 \sin^2 q' \tag{18}$$

Wenn man dieses ebenso behandelt, wie früher (3) (6), so wird man auf (16) geführt, worauf aus (17) auch a mit Probe folgt.

Die beiden Rechnungsformen (7) und (16) sind hier gleichberechtigt; wir ziehen aber im allgemeinen die Form mit e'^2 und c vor, weil dabei die Formel für den Meridian-Krümmungshalbmesser M nur e'^2 in V , nicht aber noch besonders enthält, wie bei e^2 in (17) der Fall ist.

Berechnungen von solcher Art spielten eine wichtige Rolle in der Zeit der Gradmessungen des vorigen Jahrhunderts (vgl. Einleitung S. 7); heute ist dieses nicht mehr der Fall, indem die Frage nach den Erddimensionen jetzt in anderer Form auftritt.

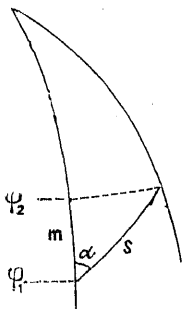
§ 103. Reduktion eines Gradmessungs-Bogens auf den Meridian.

Wir haben die am Eingange des vorigen § 102. berührte Aufgabe nun nachzuholen, nämlich Berechnung des Meridianbogens m , welcher einem *schief* gegen den Meridian gelegten Gradmessungs-Bogen s zwischen den Breiten der Endpunkte entspricht. Oder im Anschluss an Fig. 1. haben wir die Aufgabe, den Meridianbogen m zu berechnen, welcher zwischen denselben Breiten q_1 und q_2 liegt, wie ein *schief* gelegter Bogen $AB = s$, dessen Richtung wenigstens durch ein Azimut α bestimmt ist.

Der Bogen s kann unmittelbar gemessen sein, im allgemeinen ist aber anzunehmen, dass dieser Bogen s als lange Diagonale einer Triangulierungskette nach Art von AB in Fig. 2. S. 383 oder Fig. 3. S. 384 berechnet sei, und dass auf diesem



Fig. 1.



Wege auch das Azimut α , dessen astronomische Messung nicht geradezu auf die Sicht der Linie s gemacht werden konnte, durch Rechnung auf s bezogen wurde.

Je nachdem diese Berechnung weniger oder mehr fein (vgl. S. 385) ausgeführt ist, kann man das Ergebnis s mit einem Azimut α (oder mit zwei Azimuten α_1, α_2 , nach Fig. 3. S. 503) als *geodätische Linie* mit geodätischen Azimuten betrachten, und als solche weiter behandeln.

Wir betrachten nun zuerst nach Fig. 1. den einfachen Fall, dass nur *ein* Azimut α gemessen sei; wir wollen dann aber als Erleichterung andererseits annehmen, dass dieses α ziemlich *klein* sei, d. h. dass der Gradmessungs-Bogen s nahezu die Meridianrichtung habe, was ja bei reinen Breitengrad-Messungen von vornherein angestrebt wird.

Zwischen $\varphi_2 - \varphi_1$, s und α besteht eine Beziehung, welche in erster Näherung durch die zwei ersten Glieder von (25*) S. 390 ausgedrückt wird, nämlich:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = V^2 \left(m - \frac{n^2}{2} t \right) \quad (1)$$

Dabei ist:

$$V^2 = \frac{N}{M}, \quad m = \frac{s}{N} \cos \alpha, \quad n = \frac{s}{N} \sin \alpha, \quad t = \tan \varphi_1$$

also:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{s}{M} \cos \alpha - \frac{s^2}{2MN} \sin^2 \alpha \tan \varphi_1$$

Dieselbe Gleichung auf den Meridianbogen m angewendet, giebt mit $\alpha = 0$:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{m}{M}$$

Dieses mit der vorhergehenden Gleichung verbunden giebt:

$$m = s \cos \alpha - \frac{s^2}{2N} \sin^2 \alpha \tan \varphi_1 + \dots \quad (2)$$

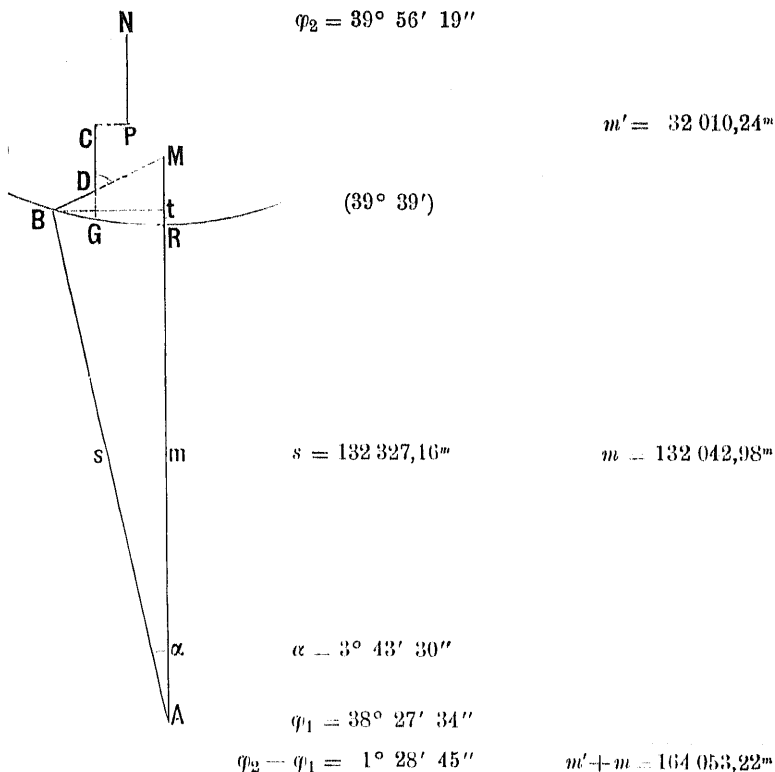
Für den Quer-Krümmungshalbmesser N , der hier im Nenner des zweiten Gliedes vorkommt, kann man einen abgerundeten Näherungswert nehmen. Wenn das Azimut α ziemlich klein ist, so wird das zweite Glied mit $\sin^2 \alpha$ sehr klein, und es ist dann ziemlich gleichgültig, wie der hierbei nötige Näherungswert N angenommen wird.

Man könnte die Formel (2) leicht auch noch auf höhere Glieder entwickeln, indem man bei (1) weitere Glieder von (25*) S. 390 berücksichtigte; wir wollen das aber hier nicht ausführen, sondern ein einfaches Zahlen-Beispiel vornehmen, bei welchem die Reduktionsformel (2) völlig ausreicht.

Als solches Beispiel soll die durch Einfachheit sich auszeichnende pennsylvanische Gradmessung dienen, welche im vorigen Jahrhundert, 1764—1768, von *Mason* und *Dixon* nicht durch Triangulierung, sondern durch unmittelbare Lattenmessung ausgeführt wurde, wie wir schon in der Einleitung S. 6. angegeben haben.

Die Haupt-Zahlenangaben über diese merkwürdige Messung wurden vor kurzem von Prof. *J. Howard* in Washington in der „Zeitschr. f. Verm., 1888“, S. 33—39 mitgeteilt, woraus wir folgendes entnehmen:

Fig. 2.
Pennsylvanische Gradmessung (1764—1768).



Die Hauptmessung erfolgte in der Geraden AB , welche von dem südlichsten Punkte A mit der astronomisch gemessenen Breite $\varphi_1 = 38^\circ 27' 34''$ unter dem Azimut $\alpha = 3^\circ 43' 30''$ sich bis zu einem Punkte B erstreckt, dessen Breite nicht astronomisch gemessen ist ($39^\circ 39'$ durch nachträgliche Interpolation). Dann wurde noch ein gebrochener Zug $BDCPN$ hinzugemessen bis zu dem nördlichsten Punkte N , dessen astronomisch gemessene Breite $\varphi_2 = 39^\circ 56' 19''$ ist.

Als gemessene Längen sind angegeben: erstens die schiefe Hauptlänge $s = 434\,011,64$ Fuss und die Summe der zwei unmittelbaren Meridianbögen ($GCPN$) $= 104\,988,4$ Fuss. (In Fig. 2. soll BGR den Parallelkreis von B , und CP ein kleines Stück des Parallels von C vorstellen.)

Dazu wird angegeben, dass der hier benützte englische Fuss $= \frac{107}{144}$ Pariser Fuss sei, woraus man berechnet $1 \text{ Fuss} = 0,304\,893\,06 \text{ Meter.}^*)$

*) Der heutige englische Fuss ist $= 0,304\,797\,27^m$, also erheblich anders als jene Annahme der pennsylvanischen Gradmessung. Die in unserer Einleitung S. 6 angegebene Reduktion $434\,011,64 \text{ Fuss} = 132\,286 \text{ Meter}$ beruht auf dem neuen Verhältnis $1 \text{ Fuss} = 0,304\,79727^m$.

Mit dieser Verhältniszahl rechnen wir die beiden mitgetheilten Entfernungen in Meter um:

$$m' = 104\,988,4 \text{ Fuss} = 32\,010,24^m \quad (3)$$

$$s = 434\,011,64 \text{ Fuss} = 132\,327,16^m \quad (4)$$

(Diese Masse sind auch bei Fig. 2. beschrieben.)

Nun kommt die Hauptaufgabe, welche uns hier beschäftigt, nämlich die schiefe Länge s auf die Meridianlänge zu reduzieren, wozu die Formel (2) dient. Dabei ist einzusetzen $s = 132\,327,16^m$, $\alpha = 3^\circ 43' 30''$, $\varphi_1 = 38^\circ 27' 34''$ und nach Seite [10] genähert $\log N = 6.80521$. Die Ausrechnung giebt:

$$m = 132\,047,60^m - 4,62^m = 132\,042,98^m \quad (5)$$

Die beiden Teile dieser Rechnung sind in Fig. 2. geometrisch veranschaulicht, es ist nämlich:

$$At = s \cos \alpha = 132\,047,60^m \quad \text{und} \quad tR = 4,62^m$$

also:

$$m = AR = At - tR$$

Nun hat man den gesamten Gradmessungs-Meridianbogen zwischen den Parallelen von A und N nach (3) und (5):

$$m' + m = 164\,053,22^m \quad (6)$$

Hiezu die beiden astronomisch gemessenen Breiten:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= 39^\circ 56' 19'' \\ \varphi_1 &= 38^\circ 27' 34'' \end{aligned} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = 1^\circ 28' 45'' = 5325'' \quad (7)$$

$$\text{Mittel } \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi = 39^\circ 11' 56,5'' \quad (8)$$

Aus (6) und (8) erhält man den Meridiangrad für die Mittelbreite φ :

$$G = \frac{3600''}{5325''} \cdot 164\,053,22^m = 110\,909,22^m \quad (9)$$

Wenn man mit *Besselschen* Erddimensionen den Meridiangrad für die Mittelbreite $\varphi = 39^\circ 11' 56,5''$ ausrechnet (nach der Hilfstafel Seite [11], $\log [1] = 8.510\,95094$), so findet man $G = 111\,007,8^m$, d. h. um 98^m oder etwa ein Tausentel mehr als das Ergebnis (9) der pennsylvanischen Gradmessung.

(Diese pennsylvanische Gradmessung wurde von *Laplace*, *Airy* und *Schubert* zur Berechnung der Erddimensionen mit benützt, aber nicht von *Bessel* und *Clarke*.)

Nachdem wir an diesem geschichtlich-interessanten Beispiel die Reduktion eines Gradmessungs-Bogens mit einem Azimut gründlich behandelt haben, gehen wir zu dem theoretisch interessanteren und wichtigeren Falle über, dass zwei Azimute gemessen sind, nämlich α_1 und α_2 in Fig. 3.

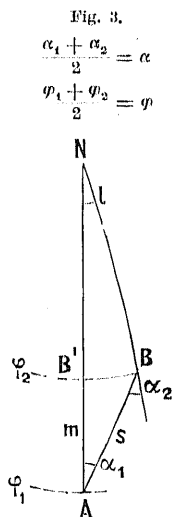
Hiezu haben wir von (21) S. 396 die Gleichung:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = \frac{s}{N} \cos \alpha \left(1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{24} (2 - 3t^2 + 2\eta^2) + \frac{l^2}{8V^4} \eta^2 (t^2 - 1 - \eta^2 - 4\eta^2 t^2) \right) \quad (10)$$

Dieselbe Formel gilt auch für den Meridianbogen m , wenn das mittlere Azimut $\alpha = 0$ und auch der Längenunterschied $l = 0$ gesetzt wird, also:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = \frac{m}{N} \left(1 + \dots + \frac{l^2}{8V^4} \eta^2 (t^2 - 1 - \eta^2 - 4\eta^2 t^2) \right) \quad (11)$$

(Gelegentlich bemerken wir hier, dass diese Formel (11) auch schon in der



früheren Formel (32) S. 222 enthalten ist, wie sich zeigt, wenn man dort den Gesamtnenner $8\sqrt{4}$ herstellt und $\cos 2\varphi$ sowie $\sin 2\varphi$ in $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ ausdrückt).

Nun giebt die Division von (10) und (11):

$$m = s \cos \alpha \left(1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{24} (2 + 3 l^2 + 2 \eta^2) \right) \quad (12)$$

Diese Formel kann man unmittelbar anwenden, wenn man für den geographischen Längenunterschied l einen Näherungswert einsetzt und φ als *Mittelbreite* annimmt (auch in $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$).

Man kann jedoch auch in erster Näherung nach (16) S. 396 setzen:

$$l \cos \varphi = \frac{s}{N} \sin \alpha \quad (13)$$

Damit giebt (12):

$$m = s \cos \alpha \left(1 + \frac{s^2 \sin^2 \alpha}{24 N^2} (2 + 3 l^2 + 2 \eta^2) \right) \quad (14)$$

Für N^2 und η^2 genügen hier irgend welche leicht zu beschaffende Näherungswerte.

Die soeben entwickelte Formel (14) wird wohl in den meisten Fällen ausreichen, und man könnte sie auch wohl auf dem betretenen Wege noch um einen Grad weiter treiben; wir wollen dieses aber nicht thun,

sondern lieber noch eine andere Form der Entwicklung behandeln, wobei *reduzierte Breiten* benutzt werden und ein Faktor $\frac{\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1}{2}$ unentwickelt gelassen wird. In

dieser Weise hat *Bessel* die fragliche Aufgabe mehrfach behandelt.

Wenn wir zu Fig. 4., welche unsere Aufgabe auf dem Ellipsoid veranschaulicht, auch die Übertragung auf die Kugel mit reduzierten Breiten nach § 81. vornehmen, so bekommen wir zu Fig. 4. noch die entsprechende Fig. 5., welche dieselben Azimute wie Fig. 4. und im übrigen sphärische Masse enthält, die wir nach § 83. behandeln wollen. Wir haben von dort (19) S. 417 die Beziehung zwischen s und σ :

$$\sigma = N \sqrt{1 - e^2} \left\{ 1 - \frac{\eta^2}{24} \left(\frac{b^2}{V^4} (1 - l^2 + \eta^2 + 6 \eta^2 l^2) + 2 l^2 \sin^2 \varphi \right) \right\} \quad (15)$$

Dieselbe Gleichung giebt auch eine Beziehung zwischen $\psi_2 - \psi_1$ und m , nämlich mit $l = 0$, wenn zugleich $\psi_2 - \psi_1 = \mu$ gesetzt wird:

$$\psi_2 - \psi_1 = \mu = \frac{m}{N \sqrt{1 - e^2}} \left\{ 1 - \frac{\eta^2}{24} \left(\frac{b^2}{V^4} (1 - l^2 + \eta^2 + 6 \eta^2 l^2) + 0 \right) \right\} \quad (16)$$

Die Division dieser beiden Gleichungen giebt:

$$\frac{m}{s} = \frac{\mu}{\sigma} \left(1 - \frac{\eta^2}{12} l^2 \sin^2 \varphi \right) \quad (17)$$

Wenn man hier wieder l nach (18) einsetzt, so bekommt man:

$$\frac{m}{s} = \frac{\mu}{\sigma} \left(1 - \frac{\eta^2 s^2}{12 N^2} \sin^2 \alpha \tan^2 \varphi \right) \quad (18)$$

Hier wollen wir statt φ die reduzierte Breite ψ einführen, also nach (13) S. 403, $\tan \psi = \tan \varphi \sqrt{1 - e^2}$ setzen, und wenn wir zugleich in erster Näherung nach (15) $\sigma^2 = \frac{s^2}{N^2(1 - e^2)}$ in (18) einführen, so nimmt (18) diese Gestalt an:

$$\frac{m}{s} = \frac{\mu}{\sigma} \left(1 - \frac{\eta^2 \sigma^2}{12} \sin^2 \alpha \tan^2 \psi \right) \quad (19)$$

Zur weiteren Verwertung der zunächst gefundenen Formel (19) braucht man eine sphärische Entwicklung für das Verhältnis $\psi_2 - \psi_1 : \sigma$, wozu wir die früheren sphärischen Entwicklungen von § 57. und § 58. teilweise benützen könnten, die wir aber hier von neuem machen, in der dem neuen Zweck am besten angepassten Form.

Von (6) und (8) S. 305 haben wir die Gleichung:

$$\tan \frac{\beta}{2} = \tan \frac{\sigma}{2} \cos \alpha \sec \frac{\gamma}{2}$$

Dabei bedeutet β die Breiten-Differenz, welche nun mit $\psi_2 - \psi_1 = \mu$ nach Fig. 2. bezeichnet ist, und $\gamma = \alpha_2 - \alpha_1$ die Meridian-Konvergenz; zugleich setzen wir:

$$\cos \alpha \sec \frac{\gamma}{2} = k \quad (20)$$

Wir haben also:

$$\tan \frac{\mu}{2} = k \tan \frac{\sigma}{2}$$

Wenn man hier beiderseits die Tangenten-Reihe nach (19) S. 199 einsetzt, so bekommt man:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} + \frac{1}{3} \frac{\mu^3}{8} + \frac{2}{15} \frac{\mu^5}{32} &= k \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{3} \frac{\sigma^3}{8} + \frac{2}{15} \frac{\sigma^5}{32} \right) \\ \mu + \frac{\mu^3}{12} + \frac{\mu^5}{120} &= k \left(\sigma + \frac{\sigma^3}{12} + \frac{\sigma^5}{120} \right) \\ \mu &= k \sigma + \sigma^3 \dots \quad \mu^3 = k^3 \sigma^3 \quad \text{erste Näherung} \\ \mu &= k \sigma + k \frac{\sigma^3}{12} (1 - k^2) + \sigma^5 \dots \quad \text{zweite Näherung.} \end{aligned} \quad (21)$$

Diese zweite Näherung für μ setzt man wieder in das zweite Glied von (21), d. h.:

$$\begin{aligned} \mu^3 &= k^3 \sigma^3 + \frac{1}{4} k^3 \sigma^5 (1 - k^2) + \dots \\ \mu + \frac{1}{12} \left(k^3 \sigma^3 + \frac{1}{4} k^3 \sigma^5 (1 - k^2) \right) + \frac{k^5 \sigma^5}{120} &= k \sigma + \frac{k \sigma^3}{12} + \frac{k \sigma^5}{120} \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich unmittelbar nach μ auflösen und giebt:

$$\mu = k \sigma \left\{ 1 + \frac{\sigma^2}{12} (1 - k^2) + \frac{\sigma^4}{240} (1 - k^2) (2 - 3k^2) \right\} \quad (22)$$

Nun geben (19) und (22) zusammen:

$$\frac{m}{s} = k \left\{ 1 - \frac{\eta^2}{12} \sigma^2 \sin^2 \alpha \tan^2 \psi + \frac{\sigma^2}{12} (1 - k^2) + \frac{\sigma^4}{240} (1 - k^2) (2 - 3 k^2) \right\} \quad (23)$$

Die Bedeutung von k^2 soll nach (20) eingeführt werden:

$$k = \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}} \quad (24)$$

Dabei ist in erster Näherung nach (25) S. 308:

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha \tan \psi \\ \cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} &= 1 - \frac{\sigma^2}{8} \sin^2 \alpha \tan^2 \psi \end{aligned} \quad (25)$$

Also nun (24):

$$\begin{aligned} k &= \cos \alpha \left(1 + \frac{\sigma^2}{8} \sin^2 \alpha \tan^2 \psi \right) \\ k^2 &= \cos^2 \alpha \left(1 + \frac{\sigma^2}{4} \sin^2 \alpha \tan^2 \psi \right) \\ 1 - k^2 &= \sin^2 \alpha - \frac{\sigma^2}{4} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \tan^2 \psi \end{aligned}$$

Dieses in (23) eingeführt giebt, zugleich mit Einsetzung von genähert $k^2 = \cos^2 \alpha$ im letzten Gliede:

$$m = k s \left\{ 1 + \frac{\sigma^2}{12} \sin^2 \alpha (1 - \eta^2 \tan^2 \psi) - \frac{\sigma^4}{240} \sin^2 \alpha (5 \cos^2 \alpha \tan^2 \psi - 2 + 3 \cos^2 \alpha) \right\} \quad (26)$$

Hier kann man noch σ nach (15) genähert einführen, nämlich:

$$\sigma^2 = \frac{s^2}{N^2 (1 - e^2)} = \frac{s^2 (1 - e^2 \sin^2 \psi)}{a^2 (1 - e^2)} = \frac{s^2}{a^2} (1 + e'^2 \cos^2 \psi)$$

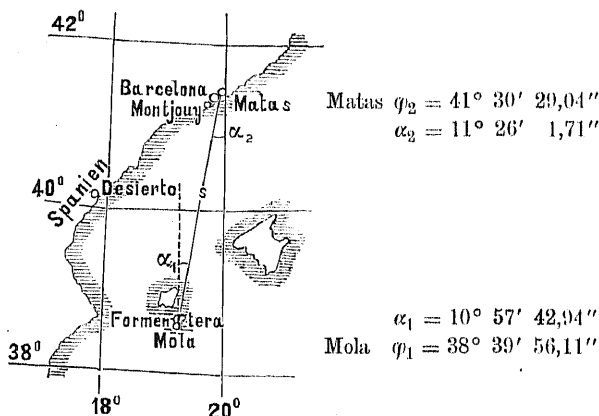
In der Formel (26) sind die Glieder von der Ordnung $e'^4 \sigma^2$ noch beibehalten, indem z. B. $\tan^2 \psi$ von $\tan^2 \varphi$ unterschieden ist; wenn wir die Genauigkeit von der Ordnung $e'^4 \sigma^2$ nun im Interesse der Vereinfachung aufgeben wollen, so wird $\eta^2 \tan^2 \psi = e'^2 \sin^2 \varphi$, und damit wird die ganze Formel ausführlichst geschrieben:

$$\begin{aligned} m = s \cos \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \left\{ 1 + \frac{s^2 \sin^2 \alpha}{12 a^2} (1 + e'^2 \cos^2 \varphi) \right. \\ \left. - \frac{s^4 \sin^2 \alpha}{240 a^4} (-2 + 3 \cos^2 \alpha + 5 \cos^2 \alpha \tan^2 \varphi) \right\} \quad (27) \end{aligned}$$

Dieses ist im wesentlichen die Formel, welche von *Bessel* im 14. Bande der „Astr. Nachrichten 1837“, S. 310, in der „Gradmessung in Ostpreussen“ 1838, S. 446 und in *General Baeyers* „Messungen auf der sphäroidischen Oberfläche“ 1862, S. 48 angegeben wurde. Die vorhergehende Formel (18), welche von *Bessel* und von *Baeyer* ohne Herleitung eingeführt wurde, kann man am kürzesten durch unseren § 83, begründen, wie in (15) geschehen ist. *Bessels* Formel unterscheidet sich von unserer (27) nur formell dadurch, dass die Entwicklung (25), welche das Glied mit s^2 vereinfacht und dafür einen Beitrag zu dem Gliede mit s^4 giebt, nicht angewendet ist. (Die obige Formel (27) ist auch im wesentlichen identisch mit der Formel in *Helmert*, Höhen-Geodäsie I, (16) S. 308.)

Das Hauptglied der Formel (27) ist unabhängig von den Erddimensionen, und für die folgenden Glieder, in welchen a und e' vorkommen, genügen irgend welche Näherungswerte hierfür.

Fig. 6.
Süd-Ende der französisch-spanischen Gradmessung von 1792.
(Massstab 1 : 10 000 000.)



Zu einem Zahlen-Beispiel für die Anwendung der Formel (27) nehmen wir entsprechend vorstehender Fig. 6. eine Mitteilung von *Bessel* „Astr. Nachr., 19. Band, 1841“, S. 112—114, über seine Neuberechnung des südlichen Teiles der alten französisch-spanischen Gradmessung von Dünkirchen bis zu den balearischen Inseln. Der nördliche Punkt *Matas* liegt an der spanischen Küste bei Barcelona, und der südliche Punkt *Mola* ist der südlichste Gradmessungspunkt auf der Insel Formentorera.

Aus der Triangulierung hat *Bessel* die geodätische Linie zwischen *Matas* und *Mola*, $s = 165\,108,586$ Toisen oder $= 321\,802,629^m$ berechnet, sowie auch die Azimute α_1 und α_2 reduziert, welche nebst den Breiten φ_1 und φ_2 bei Fig. 6. eingeschrieben sind. Man hat hieraus:

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = 11^\circ 11' 52,325'' \qquad \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = 0^\circ 14' 9,385''$$

$$\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = 40^\circ 5' 12,575''$$

Wenn man damit die Ausrechnung nach der Formel (27) macht, so findet man:

$$m = 315\,678,950^m + 2,529^m - 0,001^m$$

$$m = 315\,681,478^m.$$

Das letzte Glied der Formel (27) bringt also hier nur 1 Millimeter; dieses Glied wird wohl immer zu vernachlässigen sein.

§ 104. Ausgleichung mehrerer Breiten-Gradmessungen.

Indem wir unserer Einleitung S. 7—10 folgen, kommen wir zu der Bestimmung der Dimensionen des Erd-Ellipsoids aus *mehr* als zwei Breiten-Gradmessungen, oder zu der Ausgleichung mehrerer Breiten-Gradmessungen nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Man geht dabei von der Anschauung aus, dass die astronomische Messung der

Polhöhen q verhältnismässig viel ungenauer ist, als die geodätische Messung der Meridianbögen m , denn ein Fehler von $1''$ an der Polhöhe oder Breite q erzeugt bereits eine Änderung von etwa 31 Meter an dem Meridianbogen m , während der mittlere Fehler der geodätischen Meridianbogen-Messung (vgl. S. 191) ein viel geringerer ist.

Allerdings überzeugte man sich bald, dass auch die Messungsfehler der Polhöhen q nicht genügten zur Erklärung der Widersprüche in den verschiedenen Gradmessungen; allein man behielt doch die *Form* der Ausgleichungs-Rechnung, wonach die Quadratsumme aller Polhöhen-Änderungen zu einem Minimum gemacht wurde, noch lange bei, obgleich man wusste, dass die Polhöhen-Widersprüche zum grossen Teil gar nicht in Messungsfehlern, sondern in Lotabweichungen (vgl. Einleitung S. 11) ihren Grund haben. Die Methode der kleinsten Quadrate hat bei solcher Anwendung nur die Bedeutung einer empirischen Vermittlung widerstrebender Elemente, und die dabei übrig bleibenden Fehler v geben erste Fingerzeige, an welchen Stellen Lotablenkungen zu suchen sind.

Wir wollen nun ein vollständiges Zahlen-Beispiel einer solchen Ausgleichung von Breiten-Gradmessungen vornehmen, und dazu die von *Bessel* 1837—1841 gesammelten und gesichteten Gradmessungs-Ergebnisse benützen, aus welchen *Bessel* 1841 seine berühten, heute noch benützten Erddimensionen (vgl. S. 207) abgeleitet hat.

Wir wollen aber nicht geradezu die *Besselsche* Rechnung selbst hier vorführen, sondern wir wollen eine der *Besselschen* Gesamt-Ausgleichung analoge Berechnung nur für die älteren Breiten-Gradmessungen in *Europa* vornehmen, und auch von diesen noch etwa ein Viertel der Punkte ausfallen lassen, um eine möglichst gleichförmige Verteilung der Polhöhen zu erzielen. Auf diese Weise behalten wir von den 38 Punkten der *Besselschen* Ausgleichung (vgl. S. 9) nur noch 20 bei, welche in der nachfolgenden Zusammenstellung angegeben sind.

Da unsere darauf folgende Ausgleichung somit auf einer willkürlichen Auswahl von Beobachtungen beruht, hat dieselbe kaum eine andere Bedeutung als die eines *formellen Rechen-Beispiels*, allein auch als solches hat sie ihren Wert, weil, wie auch bei vielen anderen Ausgleichungs-Aufgaben, ein übersichtliches Zahlen-Beispiel leichter und rascher zum Verständnis der Sache führt, als allgemeine Formeln.

I. Breiten-Gradmessungen in Europa.*)

	Station	Polhöhe q	Aq	Meridianbogen m
Französische Gradmessung	Formentera	$q_1 = 38^\circ 39' 56,1''$.	.
	Barcelona	$q_2 = 41^\circ 22' 47,9''$	$2^\circ 42' 51,8''$	301 354
	Carcassonne	$q_3 = 43^\circ 12' 54,3''$	4 32 58,2	505 137
	Pantheon	$q_4 = 48^\circ 50' 49,4''$	10 10 53,3	1 131 050
	Dünkirchen	$q_5 = 51^\circ 2' 8,8''$	12 22 12,7	1 374 572

*) Die Angaben für die französische Gradmessung sind entnommen von „Astr. Nachr. 19. Band, 1842“, S. 115, die Werte der übrigen Gradmessungen dagegen sind von „Astr. Nachr. 14. Band, 1837“, S. 336—337, oder Abhandlungen von *Bessel*, herausgegeben von *Ingelmann*, Leipzig 1876, III. Band, S. 61 und S. 43. Die Station Formentera ist dieselbe, welche in Fig. 6. § 103. S. 506 mit Mola bezeichnet ist, und der dort angegebene Punkt Matas liegt in der Nähe der Gradmessungsstation Barcelona, woselbst auch noch ein Gradmessungspunkt Montjoux sich befindet, den wir in unsere Rechnung nicht aufgenommen haben.

	Station	Polhöhe φ	$\Delta\varphi$	Meridianbogen m
Englische Gradmessung	Dunnose	$\varphi_6 = 50^\circ 37' 7,6''$
	Greenwich	$\varphi_7 = 51 28 39,0$	$0^\circ 51' 31,4''$	95 620
	Arburyhill	$\varphi_8 = 52 13 28,0$	$1 36 20,4$	178 720
	Clifton	$\varphi_9 = 53 27 31,1$	$2 50 23,5$	315 892
Hannoversche Gradmessung	Göttingen	$\varphi_{10} = 51^\circ 13' 47,8''$
	Altona	$\varphi_{11} = 53 32 45,3$	$2^\circ 0' 57,5''$	224 458
Preussische Gradmessung	Trunz	$\varphi_{12} = 54^\circ 13' 11,5''$
	Königsberg	$\varphi_{13} = 54 42 50,5''$	$0^\circ 29' 39,0''$	54 985
	Memel	$\varphi_{14} = 55 43 40,4$	$1 30 28,9$	167 962
Russische Gradmessung	Belin	$\varphi_{15} = 52^\circ 2' 40,9''$
	Jakobstadt	$\varphi_{16} = 56 30 4,6$	$4^\circ 27' 23,7''$	496 114
	Dorpat	$\varphi_{17} = 58 22 47,3$	$6 20 6,4''$	705 209
	Hochland	$\varphi_{18} = 60 5 9,8$	$8 2 28,9$	895 315
Schwedische Gradmessung	Malörn	$\varphi_{19} = 65^\circ 31' 30,3''$
	Pahtawara	$\varphi_{20} = 67 8 49,8$	$1^\circ 37' 19,5''$	180 828

Um die Fehler-Gleichungen für eine Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen zu erhalten, legen wir die *Besselschen* Erd-Dimensionen a und c^2 nach S. 207 zu Grunde, und bestimmen solche Verbesserungen von a und von c^2 , welche die Quadratsumme aller an den Polhöhen φ anzubringenden Verbesserungen zu einem Minimum machen.

Dazu müssen wir zuerst Beziehungen zwischen den Polhöhen-Differenzen $\Delta\varphi$ und den zugehörigen Meridianbögen m ermitteln; und um hierbei einfache Rechnung zu haben, verfahren wir nach dem Satze von § 35. S. 217 oder S. 222, welcher sagt, dass man einen Meridian-Bogen m als Kreisbogen berechnen darf, mit dem Meridian-Krümmungshalbmesser M der *Mittelbreite* und mit dem Centriwinkel $\Delta\varphi$. Allerdings werden durch dieses Verfahren bei den grossen Bögen der Gradmessungen Fehler begangen, welche in einzelnen Fällen mehrere Meter betragen; allein da wir die Breiten φ auf $0,1''$, entsprechend 3 Meter, abgerundet haben, so ist die angegebene Näherung zulässig.

Es ist auch sehr leicht, die Meridianbögen *genauer* zu rechnen, nach (32) S. 222, wir wollen jedoch die Rechnung so *übersichtlich* als möglich halten, und für eine Genauigkeit von $0,1''$ jenes einfache Verfahren beibehalten, und deshalb auch in den Coëfficienten der Fehler-Gleichungen nur erste Näherungen anwenden.

Auch ist noch zu bemerken, dass man für diese Ausgleichung als unabhängige Erddimensions-Unbekannte am besten unsere auch sonst mit Vorteil benützten c und c'^2 *) nach (10) und (6) S. 206 nehmen würde; wir wollen aber, weil die älteren Gradmessungen-Berechnungen gewöhnlich mit den Unbekannten a und c^2 geführt sind, zur Vergleichung mit jenen, ebenfalls a und c^2 als Unbekannte annehmen.

Die zwei ersten gemessenen Polhöhen φ_1 und φ_2 sind mit dem dazwischen liegenden Meridianbogen m verbunden durch die Beziehung:

*) Vgl. hiezu die Formeln [1]—[12] am Schlusse S. 515—516.

$$q_2 - q_1 = \frac{m}{M} \varrho \quad (1)$$

wobei nach (16) und (10) S. 209:

$$\frac{1}{M} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{a(1 - e^2)}, \quad \varphi = \frac{q_1 + q_2}{2} \quad (2)$$

Da die hier vorkommenden Erddimensionen a und e^2 für unsere Ausgleichung die Unbekannten sind, zerlegen wir dieselben in Näherungswerte a_0 und e_0^2 mit zugehörigen Verbesserungen δa und δe^2 , d. h. wir setzen:

$$a = a_0 + \delta a \quad e^2 = e_0^2 + \delta e^2 \quad (3)$$

Wir bezeichnen auch mit M_0 denjenigen Wert von M , welcher durch die Näherungs-Annahmen $a = a_0$ und $e^2 = e_0^2$ entsteht; und demnach entwickeln wir nach dem *Taylor*'schen Satz:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_0} + \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{M} \right) \delta a + \frac{\partial}{\partial e^2} \left(\frac{1}{M} \right) \delta e^2 \quad (4)$$

Die beiden hier gebrauchten partiellen Ableitungen der Funktion $\frac{1}{M}$ entwickeln wir nur in erster Näherung, nämlich nach (2), mit Vernachlässigung aller Glieder mit e^2 :

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{M} \right) = - \frac{1}{a^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial e^2} \left(\frac{1}{M} \right) = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi \right) \quad (5)$$

Nun kann man zur Bildung der Fehler-Gleichungen schreiten. Die Gleichung (1), welche wegen der Beobachtungs-Fehler im allgemeinen nicht erfüllt sein wird, wird dadurch zum Stimmen gebracht, dass den beobachteten q_1 und q_2 ihre Verbesserungen v_1 und v_2 zugesetzt werden, also:

$$q_2 - q_1 + v_2 - v_1 = m \varrho \left(\frac{1}{M} \right) \quad (6)$$

Wenn man hier (4) und (5) einsetzt, so bekommt man:

$$q_2 - q_1 + v_2 - v_1 = m \varrho \left\{ \frac{1}{M_0} - \frac{\delta a}{a^2} + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi \right) \frac{\delta e^2}{a} \right\} \quad (7)$$

Hier darf man in den Gliedern mit δa und mit δe^2 statt der Unbekannten a , deren Näherungswert a_0 setzen; ja wir wollen sogar, da ohnehin schon alle Glieder mit e^2 in den Coefficienten von δa und δe^2 vernachlässigt sind, hier $a = M$, also auch (1)

das Produkt $\frac{m \varrho}{a} = \frac{m \varrho}{M} = q_2 - q_1$ setzen, und damit wird (7):

$$v_2 - v_1 = - \frac{q_2 - q_1}{a_0} \delta a + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi \right) (q_2 - q_1) \delta e^2 + \frac{m \varrho}{M_0} - (q_2 - q_1) \quad (8)$$

Dieses ist eine Gleichung, welche die Differenz $v_2 - v_1$ zweier Beobachtungs-Fehler als lineare Funktion der Unbekannten δa und δe^2 darstellt, d. h. eine Gleichung, welche in gleicher Weise auch auf die übrigen Beobachtungen angewendet, zur Ausgleichung benützt werden kann; ehe wir jedoch die Ausgleichung beginnen, wollen wir noch einige kleine Änderungen vornehmen. Um bequeme Zahlen zur Rechnung zu bekommen, wollen wir nicht δa und δe^2 selbst bestimmen, sondern von δa das Tausendel und von δe^2 das Tausendfache; d. h. wir wollen zwei neue Unbekannte x und y einführen durch die Gleichungen:

$$x = \frac{\delta a}{1000} \quad y = 1000 \delta e^2 \quad (9)$$

Dieses in (8) eingesetzt, wird geben:

$$v_2 - v_1 = a'x + b'y + l' \quad (10)$$

wobei a' , b' und l' folgende Bedeutungen haben:

$$a' = -1000 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{a_0} \quad b' = + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{1000} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi\right) \quad (11)$$

$$l' = \frac{m \varrho}{M_0} - (\varphi_2 - \varphi_1) \quad (12)$$

Als Näherungswerte a_0 und e_0^2 nehmen wir die bekannten *Besselschen*, nach S. 207, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 6\,377\,397,155^m & \log a_0 &= 6.804\,6434.6 \\ e_0^2 &= 0,006\,674\,372 & \log e_0^2 &= 7.824\,4104.2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Wir werden dadurch die Annehmlichkeit haben, dass unsere Absolutglieder l' in (12) geradezu gleich den *Besselschen* endgültigen $v_2 - v_1$ u. s. w. werden; doch wollen hier davon zunächst keinen Gebrauch machen, sondern die Anwendung der Formeln (10), (11), (12) an den zwei ersten Werten der Tabelle I. von S. 507 zeigen:

$$\left. \begin{array}{lll} \text{Formentera} & \varphi_1 = 38^\circ 39' 56,1'' & m = 301\,354^m \\ \text{Barcelona} & \varphi_2 = 41^\circ 22' 47,9'' & \\ \hline & \varphi_2 - \varphi_1 = 2^\circ 42' 51,8'' & \\ & = 9771,8'' & \\ \text{Mittel} & \varphi = 40^\circ 1' 22,0'' & \end{array} \right\} \quad (14)$$

Damit kann man nach den Formeln (11) sofort berechnen:

$$a' = -1,532 \quad b' = +3,709 \quad (15)$$

Auch die Berechnung von l nach (12) hat keine Schwierigkeit, indem dabei M_0 derjenige Wert ist, welcher den Werten a_0 und e_0^2 von (13) entspricht, d. h.:

$$M_0 = \frac{a_0 (1 - e_0^2)}{(1 - e_0^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad \log M_0 = 6.803\,5358 \quad (16)$$

Indessen können wir wohl auch den günstigen Umstand ausnützen, dass die a_0 und e_0^2 von (13) die bekannten *Besselschen* sind, welche auch unseren Hilfstafeln S. [2] — [23] des Anhangs zu Grunde liegen; und wir können daher, statt nach (16) $\log M_0$ auszurechnen, dasselbe auch von Seite [12] des Anhangs entnehmen, oder lieber noch sofort von Seite [13]:

$$\begin{array}{rcl} \log [1] = \log \frac{\varrho}{M_0} & | & 8.510\,8893 \\ \text{hiezv von (14) } \log m = \log 301\,354 & | & 5.479\,0770 \\ \hline \log \frac{m \varrho}{M_0} & | & 3.989\,9663 \\ \hline \frac{m \varrho}{M_0} & = & 9\,771,6'' \\ \text{hiezv von (14) } \varphi_2 - \varphi_1 = 9\,771,8'' & & \\ \hline \text{also} & l' = & -0,2'' \end{array} \quad (17)$$

Nimmt man dieses mit (15) zusammen, so hat man die erste Gleichung von der Form (10):

$$v_2 - v_1 = -1,53x + 3,71y - 0,2'' \quad (18)$$

Nachdem wir so die Aufstellung *einer* Gleichung mit Ausrechnung der Coëfficienten und des Absolutgliedes in aller Ausführlichkeit gezeigt haben, werden wir das Ergebnis der Berechnung für alle übrigen anschreiben:

II. Fehlerdifferenz-Gleichungen.

Formentera-Barcelona	$v_2 - v_1 = -1,53 x + 3,71 y - 0,2''$
" -Carcassonne	$v_3 - v_1 = -2,57 x + 5,83 y - 1,4$
" -Pantheon	$v_4 - v_1 = -5,75 x + 10,36 y - 2,1$
" -Dünkirchen	$v_5 - v_1 = -6,98 x + 11,31 y + 1,2$
Dunnose-Greenwich	$v_7 - v_6 = -0,48 x + 0,29 y + 3,2''$
" -Arburyhill	$v_8 - v_6 = -0,91 x + 0,48 y + 3,2$
" -Clifton	$v_9 - v_6 = -1,60 x + 0,69 y - 1,9$
Göttingen-Altona	$v_{11} - v_{10} = -1,14 x + 0,40 y + 5,0''$
Trunz-Königsberg	$v_{13} - v_{12} = -0,28 x + 0,01 y - 0,5''$
" -Memel	$v_{14} - v_{12} = -0,85 x - 0,03 y + 3,3$
Belin-Jakobstadt	$v_{16} - v_{15} = -2,52 x + 0,18 y + 3,6''$
" -Dorpat	$v_{17} - v_{15} = -3,58 x - 0,27 y + 0,7$
" -Hochland	$v_{18} - v_{15} = -4,54 x - 0,94 y + 2,3$
Malörn-Pahtawara	$v_{20} - v_{19} = -0,92 x - 1,51 y - 1,1''$

Dieses sind keine Fehler-Gleichungen in dem gewöhnlichen Sinne, weil in jeder Gleichung *zwei* Verbesserungen v auftreten. Die Trennung der v geschieht dadurch, dass man für jede Gradmessung eine Polhöhen-Verbesserung v selbst als Unbekannte einführt. Der Fall ist ganz entsprechend der Ausgleichung geodätischer Richtungsmessungen, wo man auch für jeden Satz von Messungen eine Nullpunkts-Korrektion als Unbekannte einführen muss (vgl. Band I. § 78.).

Welchen von den verschiedenen Werten v einer Gradmessung man hiebei auswählen will, ist ursprünglich willkürlich; wir haben aber durch die Differenzenbildung $v_2 - v_1, v_3 - v_1$ u. s. w. bereits jeweils das *erste* v jeder Gradmessung zur unabhängigen Unbekannten bestimmt, und wir bilden daher nun aus unseren 14 vorstehenden Fehlerdifferenz-Gleichungen, folgendes System von 20 Fehler-Gleichungen:

III. Fehler-Gleichungen.

$v_1 = v_1$
$v_2 = v_1$	$-1,53 x$	$+ 3,71 y$	$- 0,2''$
$v_3 = v_1$	$-2,57 x$	$+ 5,83 y$	$- 1,4''$
$v_4 = v_1$	$-5,75 x$	$+ 10,36 y$	$- 2,1''$
$v_5 = v_1$	$-6,98 x$	$+ 11,31 y$	$+ 1,2''$
$v_6 = v_6$
$v_7 = v_6$	$-0,48 x$	$+ 0,29 y$	$+ 3,2''$
$v_8 = v_6$	$-0,91 x$	$+ 0,48 y$	$+ 3,2''$
$v_9 = v_6$	$-1,60 x$	$+ 0,69 y$	$- 1,9''$

$v_{10} = \dots$	\dots	v_{10}	\dots	\dots	\dots	$-1,14 x$	$+ 0,40 y$	$+ 5,0''$
$v_{11} = \dots$	\dots	v_{10}	\dots	\dots	\dots	$-0,28 x$	$+ 0,01 y$	$-0,5''$
$v_{12} = \dots$	\dots	\dots	v_{12}	\dots	\dots	$-0,85 x$	$- 0,03 y$	$+ 3,3''$
$v_{13} = \dots$	\dots	\dots	v_{12}	\dots	\dots	$-2,52 x$	$+ 0,18 y$	$+ 3,6''$
$v_{14} = \dots$	\dots	\dots	v_{12}	\dots	\dots	$-3,58 x$	$- 0,27 y$	$+ 0,7''$
$v_{15} = \dots$	\dots	\dots	\dots	v_{15}	\dots	$-4,54 x$	$- 0,94 y$	$+ 2,3''$
$v_{16} = \dots$	\dots	\dots	\dots	v_{15}	\dots	$-0,92 x$	$- 1,51 y$	$- 1,1''$
$v_{17} = \dots$	\dots	\dots	\dots	\dots	v_{19}			
$v_{18} = \dots$	\dots	\dots	\dots	\dots	v_{19}			
$v_{19} = \dots$	\dots	\dots	\dots	\dots	v_{19}			
$v_{20} = \dots$	\dots	\dots	\dots	\dots	v_{19}			

Aus diesen Fehler-Gleichungen bildet man in bekannter Weise die Normal-Gleichungen welche ausführlich geschrieben (d. h. nicht mit der Abkürzung (3) S. 62, Band I.) folgende sind:

IV. Normal-Gleichungen.

[illegible]

Bei der Auflösung dieser 8 Gleichungen kann man den Umstand benützen, dass die ersten 6 Unbekannten in den ersten Gliedern nur vereinzelt vorkommen; d. h. man kann mit Hilfe der 6 ersten Gleichungen die v in x und y ausdrücken, wodurch man erhält:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= +3,366\,x - 6,242\,y + 0,500 \\ v_6 &= +0,748\,x - 0,365\,y - 1,125 \\ v_{10} &= +0,570\,x - 0,200\,y - 2,500 \\ v_{12} &= +0,377\,x - 0,007\,y - 0,933 \\ v_{15} &= +2,660\,x + 0,258\,y - 1,650 \\ v_{19} &= +0,460\,x + 0,755\,y + 0,550 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Dasselbe, was wir hier durch (19) und (20) mit (21) angegeben haben, erhält man auch dadurch, dass man die Normal-Gleichungen IV. nebst dem angehängten [11] schrittweise reduziert (nach den Regeln (4), (5) u. s. w. S. 63, Band I.). Dabei macht sich das Ausfallen vieler Coëfficienten in dem ersten Teile der Normal-Gleichungen IV. von selbst angenehm bemerklich, und thatsächlich thut man dabei genau dasselbe, was in (19), (20) mit (21) beschrieben worden ist.

Jedenfalls haben wir nun das reduzierte System (20) vollends nach x und y aufzulösen, wodurch wir finden:

$$x = +0,4023 \qquad y = +0,2347 \qquad (22)$$

$$[11 \cdot 8] = 52,1 = [v v] \qquad (23)$$

aus x und y von (22) bilden wir die eigentlichen Unbekannten δa und δc^2 nach (9):

$$\delta a = 1000 x = +402,3^m \qquad \delta c^2 = 0,001 y = +0,0002347$$

Hiezu hat man die Näherungswerte nach (13):

$$\begin{array}{ll} a_0 = 6\,377\,397,2 & c_0^2 = 0,006\,6744 \\ a_0 + \delta a = a = 6\,377\,800^m & c_0^2 + \delta c^2 = c^2 = 0,006\,9091 \end{array} \qquad (24)$$

Damit ist die Aufgabe im wesentlichen gelöst; wir wollen aber auch noch die einzelnen v ausrechnen, um die Fehlerverteilung kennen zu lernen, und um eine durchgreifende Rechenprobe in der Summe $[v v]$ zu erhalten.

Zuerst bestimmt man diejenigen v , welche als unabhängige Unbekannte eingeführt wurden, indem man die x und y von (22) in (19) einsetzt. Man findet dadurch:

$$\begin{array}{ll} v_1 = +0,389 & v_{12} = -0,783 \\ v_6 = -0,910 & v_{15} = -0,519 \\ v_{10} = -2,311 & v_{19} = +0,912 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} v_1 \\ v_6 \\ v_{10} \end{array}} \right\} \qquad (25)$$

Endlich setzt man diese Werte (25) in die Fehler-Gleichungen III. S. 511–512, und bekommt dadurch die sämtlichen v , wie wir in der nachfolgenden Schluss-Tabelle angeben:

V. Fehler-Verteilung und Quadratsumme $[v v]$.

			v^2
Französische Gradmessung	Formentera	$v_1 = +0,39''$	0,15
	Barcelona	$v_2 = +0,44''$	0,19
	Carcassonne	$v_3 = -0,66''$	0,44
	Pantheon	$v_4 = -1,59''$	2,53
	Dünkirchen	$v_5 = +1,43''$	2,04
	Summe	$+0,01''$	
Englische Gradmessung	Dunnose	$v_6 = -0,91''$	0,83
	Greenwich	$v_7 = +2,17''$	4,71
	Arburyhill	$v_8 = +2,04''$	4,16
	Clifton	$v_9 = -3,29''$	10,82
	Summe	$+0,01''$	
Hannoversche Gradmessung	Göttingen	$v_{10} = -2,31''$	5,34
	Altona	$v_{11} = +2,32''$	5,38
	Summe	$+0,01''$	

Preussische Gradmessung	Trunz	$v_{12} = -0,78''$	0,61
	Königsberg	$v_{13} = 1,39''$	1,93
	Memel	$v_{14} = +2,17''$	4,71
		Summe	0,00
Russische Gradmessung	Belin	$v_{15} = 0,52''$	0,27
	Jakobstadt	$v_{16} = +2,11''$	4,15
	Dorpat	$v_{17} = 1,33''$	1,74
	Hochland	$v_{18} = -0,26''$	0,07
		Summe	+0,01
Schwedische Gradmessung	Malörn	$v_{19} = +0,91''$	0,83
	Pahtawara	$v_{20} = -0,91''$	0,83
		Summe	0,00
			52,03 [xx] (23a)

Die übrig bleibenden Fehler v geben in der einzelnen Gradmessung je die Summe Null (ebenso wie bei einem trigonometrischen Netze die Summen der Richtungs-korrekturen stationsweise gleich Null sind). Die Summe $[vv] = 52,03$ als Ergebnis der Tabelle V. stimmt hinreichend mit $[vv] = 52,1$ nach (23) als Ergebnis der Elimination, und damit ist die Ausgleichung vom Ansatz der Fehlerdifferenz Gleichungen II. S. 511 an versichert. Ob in dem Ansätze jener Gleichungen II. selbst kein Versehen vorgekommen ist, das erfährt man dadurch, dass man mit den gefundenen Erdklimmenschen $a = 6\,377\,800^m$ und $e^2 = 0,006\,9091$ von (24), auch noch die $q_2 - q_1$ nach (1) und (2) berechnet, und sie mit den beobachteten Δq der Tabelle I. S. 507–508 vergleicht, worauf $v_2 - v_1 = q_2 - q_1 - \Delta q$ u. s. w. werden muss. Wir haben dieses für je einen grossen Bogen jeder der 6 Gradmessungen ausgerechnet, und innerhalb der dazu nötigen Rechenschärfe von $0,1''$ richtig gefunden.

Nachdem somit $[vv] = 52,0$ in runder Zahl von (23) und von (23a) bestätigt ist, bestimmen wir daraus den mittleren Fehler einer Polhöhe:

$$m = \sqrt{\frac{52}{12}} = \pm 2,1'' \quad (23b)$$

Dabei ist der Nenner $12 = 20 - 8$, weil 20 Beobachtungen und 8 unabhängige Unbekannte ($v_1, v_6, v_{10}, v_{12}, v_{15}, v_{19}, x, y$) vorhanden sind.

Aus dem Excentricitätsquadrat e^2 von (24) findet man auch die Abplattung α nach (8) S. 206:

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2} = 1 : 288,975 \quad (25)$$

und endlich aus a und α findet man den Meridian-Quadrant Q nach (19) S. 219 mit dem Hilfstafelchen unten auf S. 219:

$$\log \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16} \right) = 0.195\,3681 \quad , \quad Q = 10\,000\,900^m \quad (26)$$

Unser Gesamt-Ergebnis ist also nun für die älteren Europäischen Gradmessungen, abgerundet:

$$\left. \begin{aligned} a &= 6\,377\,800 & e^2 &= 0,006\,909 \\ \alpha &= 1 : 289,0 & Q &= 10\,000\,900^m \\ m &= \pm 2,1'' \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Man könnte auch noch die mittleren Fehler von a und e^2 oder von α und Q berechnen, wie wir an einem entsprechenden Beispiele unserer vorigen Auflage, Karlsruhe 1878, S. 325—326 gezeigt haben.

Obgleich wir unserer ganzen vorstehenden Berechnung von Anfang an keine andere Bedeutung als die eines formellen Rechenbeispiels zur Erläuterung der Gradmessungs-Theorien aus der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts (vgl. S. 8—9) zugeschrieben haben, so wollen wir nun doch die Ergebnisse (28) mit den neuesten Annahmen für ein „Referenz“-Ellipsoid vergleichen, die wir auf S. 15 zusammengestellt haben. Hiernach hat unser Europa-Ellipsoid (28) dieselbe Abplattung 1:289 wie *Listings* „typisches“ Ellipsoid und einen Quadranten Q , der etwa zwischen *Listings* und *Clarke* die Mitte hält.

Ausgleichung mit den Unbekannten c und e'^2 , und mit schärferen Formeln.

Die vorstehende Ausgleichung wurde mit den Unbekannten a und e^2 geführt, im Anschluss an die in den früheren geodätischen Formeln am meisten gebrauchten Grössen (vgl. die Anmerkung auf S. 508).

Es ist aber auch hier wie in vielen anderen Fällen besser, die Grössen c und e'^2 nach (10) und (6) S. 206 zu Grunde zu legen, weshalb wir die vorstehende Aufgabe auch mit c und e'^2 als Unbekannten behandeln, und zugleich die bei (5) und (8) vernachlässigten höheren Glieder nun berücksichtigen wollen.

Man hat zunächst wie oben bei (1) S. 509:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{m}{M} \varrho \quad [1]$$

$$\text{Dabei ist: } \frac{1}{M} = \frac{V^3}{c} \quad \text{wobei } V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad [2]$$

Die Erddimensionen seien:

$$c = c_0 + \delta c \quad e'^2 = e_0'^2 + \delta e'^2 \quad [3]$$

Dazu wird nach dem *Taylor*schen Satze entwickelt:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_0} + \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{1}{M} \right) \delta c + \frac{\partial}{\partial e'^2} \left(\frac{1}{M} \right) \delta e'^2 \quad [4]$$

Hiezu hat man die Differentialquotienten:

$$\frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{1}{M} \right) = -\frac{1}{c^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial e'^2} \left(\frac{1}{M} \right) = \frac{3}{2} \frac{V}{c} \cos^2 \varphi \quad [5]$$

Zur Aufstellung der Fehler-Gleichungen hat man:

$$\varphi_2 - \varphi_1 + v_2 - v_1 = m \varrho \left(\frac{1}{M} \right) \quad [6]$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 + v_2 - v_1 = m \varrho \left\{ \frac{1}{M_0} - \frac{\delta c}{c^2} + \frac{3}{2} \frac{V}{c} \cos^2 \varphi \delta e'^2 \right\} \quad [7]$$

$$v_2 - v_1 = -\frac{m \varrho}{c} \frac{\delta c}{c} + \frac{3}{2} \frac{m \varrho}{c} V \cos^2 \varphi \delta e'^2 + \frac{m \varrho}{M_0} - (\varphi_2 - \varphi_1) \quad [8]$$

Statt $\frac{m \varrho}{c}$ kann man auch schreiben $\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^3}$ und als Unbekannte der Ausgleichung sollen eingeführt werden:

$$x = \frac{\delta c}{1000} \quad y = 1000 \delta e'^2 \quad [9]$$

Um die Theorie der Längen-Gradmessung in ihren Grundzügen zu behandeln, brauchen wir nur die Gleichung (16) S. 396 vorzuführen:

$$l \cos \varphi = S \sin \alpha \left\{ 1 + \frac{S^2}{24} (\sin^2 \alpha l^2 - \cos^2 \alpha (1 + \eta^2 - 9 \eta^2 l^2)) \right\} \quad (1)$$

Dabei ist:

$$S = \frac{s}{c} \quad V = \frac{s}{c} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad (2)$$

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad (3)$$

Ausser dem astronomischen Längenunterschied l und dem geodätischen Bogen s sind auch noch die Breiten φ_1, φ_2 und die Azimute α_1, α_2 durch Messung zu bestimmen (vgl. Fig. 1.). Wenn die Messung unter niederen Breiten (in der Nähe des Äquators) stattfindet, braucht φ nicht sehr genau zu sein, und wenn der Bogen s wesentlich west-östliche Erstreckung hat (α nahezu $= 90^\circ$), braucht α nicht sehr genau zu sein.

Die Ausrechnung nach der Formel (1) hat die Bedeutung einer Reduktion der geodätischen Linie s auf den Parallelkreis der Mittelbreite φ , und diese Reduktion spielt hier dieselbe Rolle wie die Reduktion einer Breiten-Gradmessung auf den Meridian, die wir in § 103. ausführlich für sich behandelt haben.

Wir denken nun die Reduktion nach (1) ausgeführt, d. h. wir setzen:

$$s \sin \alpha \left\{ 1 + \left(\frac{s}{c} V \right)^2 (\sin^2 \alpha l^2 - \cos^2 \alpha (1 + \eta^2 - 9 \eta^2 l^2)) \right\} = p \quad (4)$$

Dann ist nach (1):

$$l \cos \varphi = \frac{p}{c} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad (5)$$

Hier erscheint der Parallelbogen p in gleicher Weise als gemessene Grösse wie der Meridianbogen m bei den Breiten-Gradmessungen.

Nun sollen zwei solcher Messungen vorliegen, nämlich ausser (5) auch noch entsprechend:

$$l' \cos \varphi' = \frac{p'}{c} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi'} \quad (6)$$

Aus den Gleichungen (5) und (6) kann man die beiden Unbekannten e'^2 und c bestimmen; wir schreiben hiebei zur Abkürzung:

$$\frac{p l' \cos \varphi}{p' l \cos \varphi'} = q \quad (7)$$

Dann wird:

$$e'^2 = \frac{1 - q^2}{q^2 \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi'} \quad (8)$$

Dann mit Probe aus (5) und (6):

$$c = \frac{p}{l \cos \varphi} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} = \frac{p'}{l' \cos \varphi'} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi'} \quad (9)$$

Diese Gleichungen (7), (8), (9) sind ganz entsprechend den früheren für zwei Breiten-Gradmessungen gefundenen Gleichungen § 102. S. 497—498.

Ausser der Zeitübertragung durch elektrische Telegraphie ist in neuester Zeit auch wieder die optische Signalgebung zur astronomischen Längenbestimmung benützt

werden. Das Nähere hierüber giebt „Bestimmung des Längenunterschieds zwischen den Stationen Wangerooz und Schilling durch optische Signale mittelst des Heliotropenlichtes. Von A. Fischer“. „Astr. Nachr.“, 124. Band (1890), Nr. 2962.

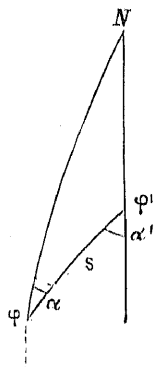
§ 106. Azimut-Übertragung.

Nachdem wir gesehen haben, dass die Excentricität der Meridian-Ellipse durch zwei *Breiten*-Gradmessungen bestimmt werden kann, und dass dieselbe Aufgabe auch durch zwei *Längen*-Gradmessungen gelöst wird, ist drittens noch zu zeigen, dass auch zwei *Azimut*-Messungen mit den zugehörigen Breiten und mit einer Triangulierungs-Verbindung, zur Bestimmung der Excentricität der Meridian-Ellipse führen.

Azimut-Messungen sind auch schon bei den Breiten-Gradmessungen und bei den Längen-Gradmessungen mit benützt worden, aber mehr nur als *Hilfs*-Messungen, zur Reduktion der gemessenen Bögen auf den Meridian oder rechtwinklig zum Meridian; dagegen bei der dritten Aufgabe, die wir nun vorhaben, sind die Azimute gerade die Hauptwerte der Messung.

Wenn man nach Andeutung von Fig. 1. die beiden Breiten q, q' und die beiden Azimute α, α' gemessen hat, so kann man zwischen diesen 4 Grössen einerseits, und der Excentricität der Meridian-Ellipse andererseits, eine Beziehung herstellen durch Vermittlung der reduzierten Breiten.

Fig. 1.
Azimut-Übertragung.



Bezeichnen wir die reduzierten Breiten mit ψ und ψ' , so ist nach (1) S. 403:

$$\cos \psi = \frac{\cos q}{V\sqrt{1-e^2}} \quad \cos \psi' = \frac{\cos q'}{V'\sqrt{1-e^2}} \quad (1)$$

oder:

$$\cos \psi = \frac{\cos q \sqrt{1+e'^2}}{V} \quad \cos \psi' = \frac{\cos q' \sqrt{1+e'^2}}{V'} \quad (1a)$$

Die reduzierten Breiten ψ und ψ' gehen mit den Azimuten α und α' nach (1) S. 405 mit Fig. 2. S. 406 die Gleichung:

$$\cos \psi \sin \alpha = \cos \psi' \sin \alpha' \quad (2)$$

Dieses in Verbindung mit (1a) giebt:

$$\left(\frac{\cos q' \sin \alpha'}{\cos q \sin \alpha} \right)^2 = \frac{V'^2}{V^2} = \frac{1+e'^2 \cos^2 q'}{1+e'^2 \cos^2 q}$$

Setzt man:

$$\frac{\cos q' \sin \alpha'}{\cos q \sin \alpha} = q \quad (3)$$

so wird:

$$e'^2 = \frac{1-q^2}{q^2 \cos^2 q - \cos^2 q'} \quad (4)$$

Damit hat man auch:

$$1+e'^2 = \frac{\sin^2 q' - q^2 \sin^2 q}{q^2 \cos^2 q - \cos^2 q'} = \frac{1}{1-e^2} \quad (5)$$

Man hat also in (3)–(5) abnormals ein Gleichungs-System von derselben Form wie bei zwei Breiten-Gradmessungen (6), (7), (8) § 102. S. 498 und bei zwei Längen-Gradmessungen (7), (8), (9) § 105. S. 517.

Zu einem Zahlen-Beispiele nehmen wir:

$$\begin{array}{lll} \text{Tranz} & q' = 54^\circ 13' 11,466'' & \alpha' = 67^\circ 26' 56,152'' \\ \text{Berlin} & q = 52^\circ 30' 16,680'' & \alpha = 62^\circ 31' 15,416'' \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Tranz} \\ \text{Berlin} \end{array}} \right\} \quad (6)$$

(Diese Zahlenwerte, welche für uns nur die Bedeutung eines formellen Rechen-Beispiels haben, sind nahezu dieselben wie in General *Baeyers* „Messen auf der sphäroidischen Oberfläche“ S. 104—106.)

Wenn man diese Zahlenwerte (6) in die Formeln (3), (4) und (5) einsetzt, so bekommt man:

$$\begin{aligned} \log q^2 &= 9.999\,9152\,63 \\ e'^2 &= \frac{0,000\,195\,095}{0,370\,440\,0839 - 0,341\,846\,755} \\ \log e'^2 &= 7.833\,981 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\log (1 + e'^2) = \log \frac{1}{1 - e^2} = 9.997\,0468 \quad (8)$$

Damit ist die Excentricität der Meridian-Ellipse bestimmt. Man sieht aus den Gleichungen (3) und (4) unmittelbar, dass das ganze Verfahren unbrauchbar wird, wenn die beiden Punkte, in welchen die Breiten q , q' und die gegenseitigen Azimute α , α' gemessen werden, entweder auf demselben Meridian oder auf gleicher Breite liegen, denn im Meridian ist $\alpha = \alpha' = 0$, also $q = \frac{0}{0}$; und wenn $q' = q$ ist, so muss wegen (1) und (2), auch $\alpha' = \alpha$ werden, also wieder $q = \frac{0}{0}$, d. h. unbestimmt. Auch wenn q und q' beide klein sind, d. h. die Messung in der Nähe des Äquators stattfindet, versagt die Methode, weil dann α und α' sehr wenig verschieden sind, also q nahe $= 1$ und e'^2 nahezu $= \frac{0}{0}$.

Hiernach ist das Verfahren anwendbar in höheren Breiten mit Erstreckung *schief* zum Meridian.

Wenn ausser den astronomischen Messungs-Ergebnissen q , q' , α , α' auch die Länge s der verbindenden geodätischen Linie bekannt ist, so kann man auch die Erdaxe bestimmen.

Wir können hiezu die Gleichung (17) S. 416 benützen, nämlich mit Einsetzung von S nach (10) S. 415:

$$\sigma \sqrt{1 - e^2} = \frac{s}{c} \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{24} \left(2 \left(\frac{s}{c} \sqrt{\sin \alpha} \right)^2 t^2 + \left(\frac{s}{c} \sqrt{\cos \alpha} \right)^2 (1 - t^2 + \eta^2 + 6 \eta^2 t^2) \right)}$$

Hier ist nach (10) S. 206, $c \sqrt{1 - e^2} = a$, also giebt vorstehende Gleichung, mit Zusetzung des nötigen ϱ :

$$\alpha = s \sqrt{\frac{\varrho}{\sigma}} \left\{ 1 - \frac{\eta^2}{24} \left(2 \left(\frac{s}{c} \sqrt{\sin \alpha} \right)^2 t^2 + \left(\frac{s}{c} \sqrt{\cos \alpha} \right)^2 (1 - t^2 + \eta^2 + 6 \eta^2 t^2) \right) \right\} \quad (9)$$

Es kommt also nur noch darauf an, σ zu berechnen, und das ist eine rein sphärische Aufgabe, welche mit Hilfe der Fig. 2. S. 520 bzw. der ausführlicheren Fig. 2. S. 408 gelöst wird.

Als Vorbereitung hiezu berechnet man die beiden reduzierten Breiten ψ und ψ' , wobei der zuvor in (5) und (7) ermittelte Excentricitätswert e bzw. e' zu benützen ist.

$$\tan \psi = \sqrt{1 - e^2} \tan q, \quad \tan \psi' = \sqrt{1 - e'^2} \tan q'. \quad (10)$$

Nun hat man in dem sphärischen Dreieck von Fig. 2. vier Stücke gegeben, nämlich ψ , ψ' , α , α' ; die Berechnung von σ ist also nicht bloss bestimmt, sondern sogar überbestimmt, wodurch eine Rechenprobe entsteht, denn die reduzierten Breiten ψ und ψ' nach (10) beruhen auf derjenigen Excentricität e bzw. e' , welche in (3)–(5) aus den 4 Grössen q , q' , α , α' selbst abgeleitet worden ist. Würde also die Rechenprobe bei der Doppelbestimmung von σ nicht stimmen, so könnte, der Grund entweder in der sphärischen Rechnung nach Fig. 2. oder aber auch in der vorhergehenden Berechnung der reduzierten Breiten nach (10) liegen.

Die zu der genannten sphärischen Berechnung von σ nach Fig. 2. nötigen Formeln können wir von S. 408 entnehmen; wir wollen dabei zwei Werte M einführen, den ersten zu ψ und α gehörig, den zweiten zu ψ' und α' gehörig, dann ist:

$$\sigma = M' - M \quad (11)$$

Für M und M' hat man nach (2) S. 408:

$$\tan M = \frac{\tan \psi}{\cos \alpha} \quad \tan M' = \frac{\tan \psi'}{\cos \alpha'} \quad (12)$$

Aus (12) und (11) hat man bereits das gewünschte σ . Die dazu gehörige, oben erwähnte Rechenprobe kann man auf verschiedene Art erlangen, z. B. durch Vermittlung des Bogens m , welcher für M und M' derselbe ist. Nach (2) und (3) S. 408 ist:

$$\sin m = \cos \psi \sin \alpha = \cos \psi' \sin \alpha'$$

dann:
$$\sin M = \frac{\cos m}{\sin \psi} \quad , \quad \sin M' = \frac{\cos m}{\sin \psi'} \quad (13)$$

Damit hat man die zweite Bestimmung von M und M' , als Versicherung für (12). Wenn aber M und M' erheblich grösser als 45° sind, so sind die Bestimmungen (13) nicht günstig; dann rechnet man lieber:

$$\begin{aligned} \cot \gamma_1 &= \tan M \sin m & , & & \cot \gamma_2 &= \tan M' \sin m \\ \gamma_2 - \gamma_1 &= \lambda \\ \sin \sigma &= \frac{\sin \lambda \cos \psi'}{\sin \alpha} = \frac{\sin \lambda \cos \psi}{\sin \alpha'} \end{aligned} \quad (14)$$

Die Anwendung dieser Formeln auf unser Beispiel (6) giebt:

$$\begin{array}{lll} \text{Trunz} & \psi = 54^\circ 7' 38,6482'' & \alpha' = 67^\circ 26' 56,152'' \\ \text{Berlin} & \psi = 52^\circ 24' 37,8514'' & \alpha = 62^\circ 31' 15,416'' \end{array}$$

$$M = 70^\circ 26' 40,0950'' \quad M' = 74^\circ 29' 58,3496''$$

$$M' - M = \sigma = 4^\circ 3' 18,2546'' \quad (15)$$

$$m = 32^\circ 45' 50,2488''$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda = 6^\circ 8' 45,6806''$$

hieraus:
$$\sigma = 4^\circ 3' 18,2548'' \quad (16)$$

Die beiden Werte σ nach (15) und (16) stimmen unter sich hinreichend; wir haben mit dem Mittel $\sigma = 4^\circ 3' 18,2547''$ weiter gerechnet, und damit aus (9) erhalten:

$$\begin{aligned} \log \eta^2 &= 7.385\,5669 & , & & \log V^2 &= 0.001\,0539.6 \\ a &= 6\,380\,516,074^m - 9,543^m + 0,448^m \\ a &= 6\,380\,506,979^m & \log a &= 5.804\,8551.88 \end{aligned} \quad (17)$$

Die Korrektionsglieder von (9) haben also hier nur $9,5^m$ und $0,4^m$ ausgemacht, woraus zugleich zu ersehen ist, dass keine Wiederholung der Rechnung nötig ist wegen des in (9) *vorläufig* benützten $c = a\sqrt{1 + e'^2}$.

Die Berechnung der Axenlänge a kann man statt nach (9) auch in manchen anderen Formen machen, wie in General *Baeysers* Messen auf der sphäroidischen Oberfläche § 13. und § 27. gezeigt ist.

(In unserer vorigen Auflage, Karlsruhe 1878, hatten wir in § 88. zwei verschiedene andere Berechnungsarten für dasselbe Beispiel Berlin-Trunz wie hier; die Zahlenwerte waren im wesentlichen auch dieselben wie die neuen; die nicht unerheblichen Abweichungen in den letzten Stellen sind nicht Rechenfehler, sondern rühren daher, dass in der vorigen Auflage nur mit 7stelligen Logarithmen gerechnet war, während die neue Rechnung mit 8—9 richtigen Stellen geführt ist.)

Der Grundgedanke, die Excentricität der Meridian-Ellipse aus *einer* Gradmessung schief zum Meridian zu bestimmen, ist zuerst von *J. Tobias Mayer* erfasst worden, wie aus einer von ihm hinterlassenen und in den „Astr. Nachr., 13. Band, 1836“, S. 353, veröffentlichten Entwicklung hervorgeht.

Die erste Ausführung dieses Gedankens haben wir in der „Gradmessung in Ostpreussen“ von *Bessel*, welcher in der Vorrede S. V—VI seines Werkes über diese Gradmessung, jene Notiz von *Tobias Mayer* zitiierend, die Anordnung der Messungen zu dem fraglichen Zwecke bespricht.

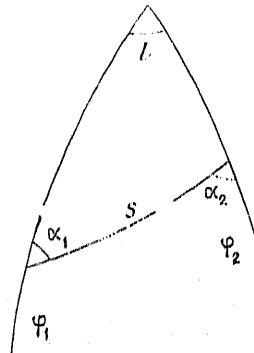
Es handelt sich hauptsächlich um Azimut-Übertragung mit möglichst wenig Zwischenpunkten, also mit möglichst langen Sichten, ganz ebenso wie die gewöhnlichen Polygonzüge des Feldmessers am besten mit *langen* Zielweiten angelegt werden. Daraus erklärt sich die Figur des *Besselschen* Dreiecksnetzes, das wir in der Einleitung S. 14 mitgeteilt haben: Es gelang, zwischen den äussersten, etwa 200 Kilometer von einander entfernten Punkten Trunz und Memel, *zwei* von einander sichtbare Punkte, Galtgarben und Niddlen, zu finden, von deren einem man Trunz, von dem anderen Memel sehen konnte. Man erhielt dadurch die Möglichkeit, die Richtungen der Meridiane von Trunz und Memel durch nur *zwei* Winkelmessungen mit einander zu vergleichen.

§ 107. Gradmessung schief zum Meridian.

Wenn man nach Fig. 1. eine geodätische Linie s (bzw. eine Dreieckschette) schief zum Meridian anlegt, am Anfangspunkt und am Endpunkt derselben die Azimute α_1 , α_2 und die Breiten q_1 , q_2 und endlich noch den Längenunterschied l astronomisch misst, so hat man alles das, was wir bisher als Breiten-Gradmessung, Längen-Gradmessung und Azimut-Übertragung getrennt behandelt haben, nun vereinigt; und da eine schiefe geodätische Linie mit Azimuten und Breiten an den Endpunkten nach § 106. hinreicht zur Bestimmung der Ellipsen-Dimensionen, so haben wir in der Vereinigung der 6 genannten Messungen bereits eine über das unmittelbare Bedürfnis hinaus gehende Bestimmung der Erddimensionen.

Man kann sich dieses auch so klar machen: Ein sphärisches Dreieck von der Form Fig. 1. ist seiner Form nach bestimmt durch 3 Stücke, z. B. durch q_1 , q_2 , l ; um auch den Halbmesser zu bestimmen, auf welchem das sphärische Dreieck liegen soll, braucht man ein viertes Stück, s linear gemessen. Geht man über zu einem Ellipsoid, auf welchem das Dreieck Fig. 1. liegen soll, so tritt eine weitere Unbekannte auf in der Excentricität, so dass nun 5 Messungsstücke erforderlich werden. Wenn also in Fig. 1. im ganzen 6 Stücke gemessen sind, so ist

Fig. 1.
Gradmessung schief zum
Meridian.



auch für das Ellipsoid noch *eine* Messung überschüssig, oder man hat es mit einer Ausgleichung zu thun.

Wie gewöhnlich wird diese Ausgleichung dadurch behandelt, dass man *Näherungswerte* der Erd-Dimensionen einführt, und durch Differenzieren Beziehungen herstellt zwischen Verbesserungen jener Näherungswerte einerseits und Änderungen der beobachteten Grössen andererseits.

Man überblickt auch sofort, dass man *mehrere* solcher Systeme, wie das in Fig. 1. dargestellte, zusammenfassen kann.

Unter allen Umständen braucht man also Beziehungen zwischen den gemessenen Grössen und den Ellipsoid-Dimensionen; diese Beziehungen entnehmen wir aus den sphäroidischen Mittelbreiten-Formeln von § 79., nämlich nach (21), (22), (23) S. 396:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= V^2 S \cos \alpha (1 + l^2 \dots + b^2 \dots) \\ l \cos \varphi &= S \sin \alpha (1 + l^2 \dots + b^2 \dots) \\ \alpha_2 - \alpha_1 &= S \sin \alpha \tan \varphi (1 + l^2 \dots + b^2 \dots) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dabei haben wir mit $l^2 \dots$ und $b^2 \dots$ die Korrektionsglieder zweiter Ordnung angedeutet, welche man immer ohne Schwierigkeit berechnen kann, welche auch durch die Ausgleichung nicht weiter berührt werden, insofern wir bereits gute Näherungswerte von η^2 bzw. e'^2 u. s. w. voraussetzen; und deswegen wollen wir diese Glieder im Folgenden ausser Betracht lassen (oder bereits in S inbegriffen denken). Setzt man für S seinen Wert aus (22) S. 389, so geben die vorstehenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= \frac{s}{c} \cos \alpha V^3 \\ l &= \frac{s}{c} \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} V, & V &= \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \\ \alpha_2 - \alpha_1 &= \frac{s}{c} \sin \alpha \tan \varphi V, & \frac{dV}{de'^2} &= \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \varphi}{V} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Nun betrachten wir c und e'^2 als unabhängige Bestimmungsstücke des Erd-Ellipsoids, und bilden, dem System (1) entsprechend, folgende Differential-Formeln:

$$\left. \begin{aligned} d\varphi_2 - d\varphi_1 &= -\frac{s}{c} \cos \alpha V^3 \frac{dc}{c} + \frac{3}{2} \frac{s}{c} V \cos \alpha \cos^2 \varphi de'^2 \\ dl &= -\frac{s \sin \alpha}{c \cos \varphi} V \frac{dc}{c} + \frac{1}{2} \frac{s \sin \alpha}{c V} \cos \varphi de'^2 \\ d\alpha_2 - d\alpha_1 &= -\frac{s}{c} \sin \alpha \tan \varphi V \frac{dc}{c} + \frac{1}{2} \frac{s \sin \alpha \sin \varphi \cos \varphi}{c V} de'^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Hiebei ist die geodätische Linie s selbst als fehlerfrei angenommen, was unter Umständen eine brauchbare Annahme ist, insofern ein geodätischer Fehler ds hier von verhältnismässig geringerem Einfluss ist, als ein Fehler der astronomisch gemessenen Grössen, Breiten, Längen und Azimute. Z. B. bei der Ausgleichung von Breiten-Gradmessungen (§ 104.) wurde die Annahme fehlerfreier terrestrischer Meridianbögen früher allgemein gemacht.

Wenn s nicht als fehlerfrei gelten soll, so hat man die Gleichungen (1) auch nach s zu differenzieren, was wir hier unterlassen, indem solche Differenzierung später bei den Lotablenkungen (§ 111.—112.) behandelt werden wird.

Indem wir auch nochmals darauf aufmerksam machen, dass die in (1) mit $l^2 \dots$ und $b^2 \dots$ angedeuteten Glieder bereits in den Gleichungen (3) in s inbegriffen sein

sollen, schreiben wir (3) in übersichtliche Form, indem die Coefficienten kurz mit a, b u. s. w. bezeichnet und die Unbekannten $\frac{dc}{c}$ und de'^2 davon abgehoben werden:

$$\left. \begin{aligned} (d\varphi_2 - d\varphi_1) &= +a_1 \frac{dc}{c} + b_1 de'^2 \\ dl &= +a_2 \frac{dc}{c} + b_2 de'^2 \\ (d\alpha_2 - d\alpha_1) &= +a_3 \frac{dc}{c} + b_3 de'^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

So lange nun nur *ein* solches System vorhanden ist, kann man die Differenzen $d\varphi_2 - d\varphi_1$ und $d\alpha_2 - d\alpha_1$ in dieser Form stehen lassen, diese (4) als drei Fehler-Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate weiter behandeln, wobei die *Gewichte* der $\varphi_2 - \varphi_1, l$ und $\alpha_2 - \alpha_1$ durch die Art der Beobachtung bestimmt sein müssen; und dann bekommt man die zwei Unbekannten $\frac{dc}{c}$ und de'^2 aus den zwei zu (4) gehörigen Normal-Gleichungen.

Nun können aber *mehrere* Systeme von der Form (4) vorhanden sein, welche dann meist auch nicht von einander unabhängig sein werden. Wenn z. B. in dem astronomisch-geodätischen Netze Fig. 1. S. 193 alle Knotenpunkte astronomisch bestimmt und geodätisch verbunden sind, so giebt jede Verbindung ein Gleichungssystem von der Form (4), wobei jedoch $d\varphi_1$ eine Breiten-Verbesserung ist, welche auf *zwei* oder mehr Verbindungen Einfluss hat, wie auch $d\alpha_1$ als astronomischer Azimut-Messungsfehler nach allen von einem Punkt ausgehenden Richtungen wirkt, während wir von den Längen l annehmen wollen, dass sie unabhängig bestimmt seien. Man muss dann einzelne $d\varphi$ und $d\alpha$ selbst als Unbekannte einführen, ebenso wie mit den Anfangs-Verbesserungen der Breiten-Gradmessungen in § 104. geschehen ist.

Die Fehler-Gleichungen werden sich dann beispielshalber für zwei Systeme, die einen Punkt gemeinsam haben, so darstellen, wobei $\frac{dc}{c} = x$ und $de'^2 = y$ gesetzt ist:

$$\left. \begin{aligned} d\varphi_1 &= d\varphi_1 & . & . & . & . \\ d\varphi_2 &= d\varphi_1 & . & . & +a_1 x & +b_1 y \\ dl_{1.2} &= . & . & . & +a_2 x & +b_2 y \\ d\alpha_1 &= . & d\alpha_1 & . & . & . \\ d\alpha_2 &= . & d\alpha_1 & +a_3 x & +b_3 y \\ d\varphi_3 &= d\varphi_1 & . & . & +a_4 x & +b_4 y \\ dl_{1.3} &= . & . & . & +a_5 x & +b_5 y \\ d\alpha_3 &= . & d\alpha_1 & +a_6 x & +b_6 y \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Die Weiterbehandlung eines solchen Systems von Fehler-Gleichungen ist ebenso, wie wir bei dem besonderen Falle der Breiten-Gradmessungs-Ausgleichung in § 104. gezeigt haben.

Indessen kommt bei einer solchen Ausgleichung auch noch die Frage der Lot-abweichung hinzu, zu welcher wir im nächsten Kapitel übergehen.

Kapitel XII.

Lotabweichungen.

§ 108. Allgemeines über Lotabweichung.

Anknüpfend an das, was wir schon in der Einleitung S. 11 über den Begriff der Lotabweichungen und des Geoids erwähnt haben, gehen wir nun zu näherer Betrachtung der Lotabweichungen über.

Wenn wir bei unseren Triangulierungen die unmittelbar gemessenen Grundlinien auf die Höhe des Meeres, bzw. auf Normal-Null, reduzieren (vgl. S. 75), so legen wir damit unseren Messungen und Berechnungen eine ideale Erdoberfläche zu Grunde, welche, in erster Näherung, mit der Oberfläche der Weltmeere zusammenfallend, und unter den Kontinenten stetig fortgesetzt, angenommen wird.

Wenn wir ferner bei unseren geodätischen und astronomischen Winkelmessungen die vertikale Axe der Instrumente durch die Wasserwage einstellen, und die so erhaltenen Messungen in üblicher Weise weiter rechnerisch behandeln, wie wir in der Theorie der geodätischen Dreiecke und der Coordinaten-Systeme (Kapitel VI.—X.) und namentlich in der Theorie der Erd-Dimensionsbestimmung (Kapitel XI.) gezeigt haben, so nehmen wir die durch die Wasserwage bestimmte Schwere-Richtung als geometrische Normale jener idealen Erdoberfläche an, und führen für diese Fläche ein Umdrehungs-Ellipsoid von gewissen Dimensionen in die Rechnung ein.

Nun haben aber schon die ersten zusammenfassenden Berechnungen der Gradmessungen ergeben, dass jene ideale Erdoberfläche nicht genau ein Ellipsoid ist, und man kann durch eine einfache physikalische Betrachtung zeigen, dass die ideale Erdoberfläche, welche wir den geodätischen Messungen und Berechnungen zu Grunde legen, kein Ellipsoid sein *kann*, weil die physische Erdoberfläche mit ihren Bergen und Thälern, Kontinenten und Meeren, selbst nicht ellipsoidisch ist.

Die Gesamtanziehung, welche ein Punkt (bzw. ein Massen-Element) an der Erdoberfläche erfährt, ist die Resultante der Anziehungen, welche alle einzelnen Massenteile des Erdkörpers auf den Punkt ausüben (in Verbindung mit der Einwirkung der Centrifugalkraft, welche wir im Folgenden nicht besonders zu berücksichtigen brauchen.)

Zwischen zwei Massenteilen m_1 und m_2 , welche sich im Abstand r von einander befinden, besteht eine Anziehung, welche proportional $\frac{m_1 m_2}{r^2}$ ist.

Wenn eine einzelne Gebirgsmasse über die sonst regelmässige Erdoberfläche hervorragte, so lässt sich deren Einfluss auf die Lotrichtung eines benachbarten Punktes durch folgende Betrachtung finden. In Fig. 1. S. 525 ist die Erde kugelförmig angenommen, und über die kugelförmige Erdoberfläche soll eine Gebirgsmasse m hervorragen. Wenn es sich um Bestimmung der Lotrichtung in einem ausserhalb der kugelförmigen Erdoberfläche liegenden Punkte A handelt, so kann man die ganze Masse der Erde im Erdmittelpunkt konzentriert annehmen. (Der Beweis für die Zulässigkeit dieser Annahme lässt sich in elementarer Weise aus der Definition der Gravitation herleiten.)

Es sei nun M die Masse der Erde und m die Masse eines Gebirges, dann bekommt man für einen Punkt A , dessen horizontaler Abstand von dem Schwerpunkt

des Gebirges $= r$ ist, eine durch das Gebirge erzeugte Lotabweichung θ , welche bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\tan \theta = \frac{m}{r^2} \cdot \frac{M}{R^2} = \frac{m R^2}{M r^2} \quad (1)$$

Aus dem mittleren Erdhalbmesser R berechnet man das Volumen der Erde $= \frac{4}{3} \pi R^3$, und wenn A die mittlere Dichte der Erde ist, so hat man die Masse der Erde:

$$M = \frac{4}{3} A \pi R^3 \quad (2)$$

Das Volumen des Gebirges sei V , dessen Dichte sei δ , dann ist die Gebirgs-Masse:

$$m = V \delta \quad (3)$$

Aus (1), (2) und (3) findet man die Lotabweichung θ , wenn man θ als kleinen Winkel behandelt und zugleich für numerische Rechnung die Reduktions-Konstante ρ zufügt:

$$\theta = \frac{3}{4} \frac{\delta}{A} \frac{V}{R^2} \frac{\rho}{\pi} \quad (4)$$

Nach *Listing* „Neue geometrische und dynamische Konstanten des Erdkörpers“, aus den „Nachr. der Königl. Gesellsch. der Wissensch., Göttingen 1878“, S. 61, ist die mittlere Dichte der Erde:

$$A = 5,63 \quad (5)$$

der mittlere Erdhalbmesser ist in runder Zahl (nach S. 230):

$$R = 6\,370\,000^m \quad (6)$$

Setzt man (5) und (6) in (4), so erhält man:

$$\theta = 0,001373 \frac{V \delta}{r^2} \text{ in Sekunden} \quad (7)$$

dabei ist V das Volumen des Gebirges in Kubikmetern und r die Entfernung in Metern zu nehmen.

Wenn man nicht die Abweichung in der Richtung von r selbst haben will, sondern die Komponente nach einer anderen Richtung, so ist der nach (4) oder (7) berechnete Wert θ auf die fragliche Richtung, z. B. den Meridian zu projizieren.

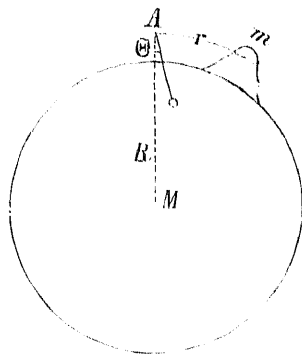
Als Beispiel nehmen wir die summarische Schätzung des Einflusses des nördlichen Schwarzwaldes mit dem Zentralpunkt Hornisgrunde auf die meridionale Lotrichtung in Durlach. Das Volumen dieses Gebirgsstocks stellt sich ungefähr dar als Produkt einer Fläche von 65 000^m Breite und 48 000^m Länge in einer Höhe von 800^m, die mittlere Entfernung von Durlach mag $r = 46\,000^m$ angenommen werden und die Dichte $\delta = 2,3$ (bunter Sandstein und Granit). Mit diesen Zahlen bekommt man aus (7):

$$v = 3,3'' \quad (8)$$

Durch eine ähnliche Überschlagsrechnung bekommt man für den südlichen Schwarzwald 1,0'' und für die schwäbische Alb 1,6'' zusammen 5,9''.

Dieses ist nur eine summarische Schätzung.

Fig. 1.
Lotabweichung θ .



Eine genauere Untersuchung dieser Art wurde von der bayerischen Landesvermessung gemacht (veröffentlicht auf S. 758–768 des amtlichen Werkes, das wir auf S. 12 genannt haben). Diese Untersuchung bezog sich auf die zwei Punkte Bogenhausen (bei München) und Benediktbeuren (süd-westlich von München, am Fusse der Bayerischen Alpen). Die Berechnung der Massen-Anziehungen wurde im wesentlichen nach dem einfachen Verfahren der Gleichung (4) mit Zerlegung der Gebirgsmassen in konzentrische Ringe um den zu untersuchenden Punkt ausgeführt. Für die *Differenz* der Ablenkungen zwischen Bogenhausen und Benediktbeuren wurde gefunden 8,6" nach Süden und 4,8" nach Osten.

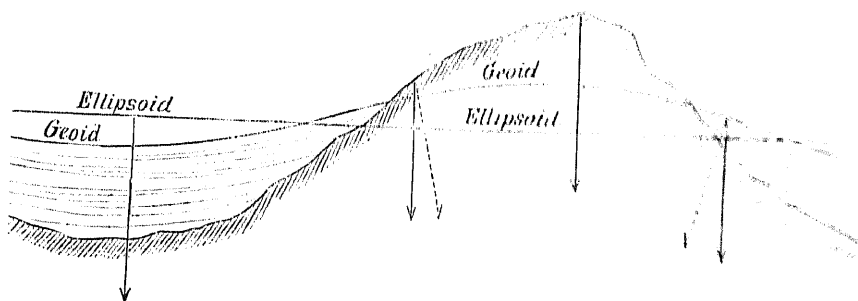
In dieser Weise kann man mit Sicherheit schliessen, dass die sichtbaren Ungleichheiten der Massenverteilung an der Erdoberfläche ganz erhebliche Lotablenkungen im Vergleiche mit den Lotrichtungen eines mittleren Ellipsoids erzeugen müssen, d. h. Lotablenkungen, welche bei den Mittelgebirgen 5"–10" betragen, und bei Hochgebirgen bis 1' steigen müssen.

Ausser den sichtbaren Ungleichheiten der Massenverteilung an der Oberfläche der Erde, giebt es aber auch Massen-Ungleichheiten *unterhalb* der Erdoberfläche, welche nicht durch geometrische Volumen-Berechnung, sondern nur astronomisch geodätisch bestimmt werden können, wie wir in § 110. – 112. zeigen werden.

Das Geoid.

Nachdem erkannt ist, dass die Schwerkraft-Richtungen im allgemeinen nicht mit den Ellipsoid-Normalen zusammenfallen, kommt man zu der Annahme einer anderen krummen Fläche, welche von allen Schwerkraft-Richtungen rechtwinklig geschnitten wird, und in Hinsicht der Höhenlage sich der physischen Erdoberfläche möglichst anpasst. Diese Fläche nennt man das *Geoid* (nach Listing, vgl. Einleitung S. 11).

Fig. 2.
Ellipsoid und Geoid.



In vorstehender Fig. 2. ist die gegenseitige Lage der physischen Erdoberfläche, eines mittleren Ellipsoids und des Geoids in grob schematischer Weise dargestellt. Die Linie für das Ellipsoid ist *gerade* gezogen, insofern es sich nur um einen kleinen Teil der Erdoberfläche handeln soll, und die Zeichnung nur dazu dient, die *relativen* Krümmungen zwischen dem mittleren Ellipsoid und dem Geoid zu veranschaulichen.

Die ausgezogenen Pfeillinien stellen die geometrischen Normalen des Ellipsoids, und die punktierten Pfeillinien stellen die physikalischen Lotlinien vor, welche recht-

winklig zur Geoidfläche sind. Der kleine Winkel zwischen einer Ellipsoid-Normalen und der Schwerkraft-Richtung ist die Lotablenkung; fällt die Schwerkraft-Richtung mit der Ellipsoid-Normalen zusammen, wie in Fig. 1. über der Wasseroberfläche und in der Höhe des Berges angenommen ist, so ist die Lotablenkung gleich Null.

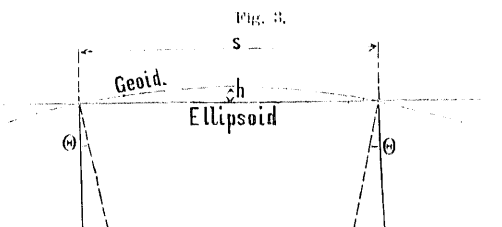
Die Geoid-Falten.

Wenn man die Massenverteilung an der Erdoberfläche, namentlich die Verteilung von Land und Wasser kennt, so kann man die Erhebungen und Vertiefungen des Geoids relativ gegen ein mittleres Ellipsoid, oder die Grösse der Geoid-Falten, schätzen.

Wenn nur die sichtbaren Massen-Ungleichheiten wirksam sind, so kann man z. B. in dem einfachen Falle von Fig. 2., wo ein Gebirge zwischen zwei Meeren angenommen ist, sofort sagen, dass unter dem Gebirge das Geoid über das mittlere Ellipsoid *emporgehoben*, und über den Meeren das Geoid unter das Ellipsoid *gesenkt* sein muss.

Wie hoch oder wie tief die Falten zwischen dem Geoid und einem mittleren Ellipsoid etwa sein werden, kann man aus dem Betrage der Lotablenkungen schätzen.

Denken wir z. B. nach Andeutung von Fig. 3. eine solche Falte von kreisförmigem Profil mit einer Lotablenkung Θ am Anfange und einer entgegengesetzten Ablenkung Θ am Ende, auf eine Erstreckung s , so wird die Höhe h der Falte zu schätzen sein als Pfeilhöhe eines flachen Kreisbogens vom Centriwinkel



2Θ mit der Sehne oder Bogenlänge s , d. h. der Halbmesser dieses Kreisbogens ist anzunehmen:

$$r = \frac{s}{2\Theta}, \text{ also } h = \frac{1}{2r} \left(\frac{s}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} s \Theta \text{ bzw. } = \frac{1}{4} s \frac{\Theta}{\rho}.$$

Nehmen wir z. B. $s = 100\,000^m$ und $\Theta = 10''$, so giebt dieses $h = 1,2^m$.

In ähnlicher Weise kann man auch noch andere Näherungsformeln bilden, wie in dem Werke „Die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, München 1873“, S. 755—758 von dem Verfasser dieses Werkes, *von Orff*, entwickelt wird.

Allgemeiner geometrisch betrachtet, stellt sich die Aufgabe der Geoid-Bestimmung aus Lotablenkungen ähnlich dar, wie die Bestimmung der physischen Erdoberfläche mit ihren Bergen und Thälern durch Messung von Böschungswinkeln, denn jede nach Grösse und Richtung bekannte Lotablenkung liefert die relative Neigung der Geoidfläche gegen das Ellipsoid an der betreffenden Stelle (oder das sogen Streichen und Fallen).

Im Mittel-Gebirge handelt es sich bei den Geoid-Falten (wie schon das oben genommene Zahlen-Beispiel mit $\Theta = 10''$ und $h = 1,2^m$ zeigt) immer nur um Höhen von 1^m — 2^m gegen das Ellipsoid (s. *Helmert*, „Höhere Geodäsie, I., 1880“ S. 570 und *Andrae*, „problèmes de haute géodésie, extraits de l'ouvrage danois 'Den Danske Gradmaaling'. 3^e Cahier, Copenhague 1888“. S. 53—56).

Viel grössere Erhebungen und Vertiefungen der Geoid-Falten ergeben sich bei der Massenwirkung ganzer Kontinente gegenüber weniger dichten Ozeanen. Im Durchschnitt für die sämtlichen Kontinente liegt innerhalb derselben die gestörte Meeresfläche (Geoid) nach der Berechnung um 700^m über der ursprünglichen Meeresfläche (Helmert, „Höhere Geodäsie, II., 1884“, S. 356).

Dieses ist aber ein rein theoretisches Ergebnis aus Massen-Wirkungsberechnungen, welches mit den Ergebnissen von Pendelbeobachtungen nicht zusammen stimmt. Helmert hat aus solchen Vergleichen geschlossen (Helmert, „Höhere Geodäsie, II.“, S. 364—365), „dass die Wirkung der Kontinentalmassen mehr oder weniger kompensiert wird durch eine Verminderung der Dichtigkeit der Erdkruste unterhalb der Kontinentalmassen“. „Die Kontinente erscheinen hiermit als Schollen der Erdkruste, welche etwas geringere Dichtigkeit haben als letztere im allgemeinen“, und Pendelbeobachtungen zeigen, „dass in der Regel Gebirge durch unterirdische Massendefekte mehr oder weniger kompensiert sind“.

Hieraus folgt, dass die Höhe der Geoid-Falten eine weit geringere ist, als die Verteilung zwischen Wasser und Land nach der schematischen Darstellung von Fig. 2. S. 526 vermuten lässt.

Lotablenkung und Lotabweichung.

Durch die astronomisch-geodätischen Hilfsmittel, welche wir in § 110. — 112. kennen lernen werden, kann man immer nur *Differenzen* von Lotablenkungen, oder *relative* Lotablenkungen bestimmen, aus zwei Gründen: Erstens braucht man zu der Berechnung die Annahme eines *Vergleichs-Ellipsoids* (z. B. des *Besselschen* Ellipsoids), und das ist eine innerhalb ziemlich weiter Grenzen willkürliche Annahme, und je nachdem man ein Ellipsoid zur Vergleichung annimmt, bekommt man verschiedene Lotablenkungen. Wüsste man, welches Ellipsoid sich als günstigstes, mittleres Ellipsoid der Erde am besten anpasst, so würde man die Lotablenkungen auf dieses beziehen; so lange dieses aber nicht der Fall ist, sind alle Lotablenkungs-Berechnungen nur vorläufig an irgend ein Vergleichs-Ellipsoid gebunden.

Ausserdem braucht man zu Lotablenkungs-Berechnungen irgend einen festen *Ausgangspunkt*, z. B. hat das geodätische Institut hierfür den Punkt Rauenberg bei Berlin (vgl. das Übersichtsnetz S. 193). Nun geben alle Berechnungen nur die *Vergleichung* der Lotablenkungen anderer Punkte mit der Lotablenkung des Ausgangspunktes, welche selbst unbekannt, zuweilen schlechthin gleich Null gesetzt, oder dem negativen Mittel aller anderen Ablenkungen entsprechend angenommen werden kann.

Wenn man dem Ausgangspunkte der Berechnungen eine Lotablenkung Θ_0 gleich Null oder irgend einen anderen Wert willkürlich zuteilt, die Dimensionen des Vergleichs-Ellipsoids aber in beiden Fällen *gleich* annimmt, so hat man in diesen beiden Fällen ($\Theta_0 = 0$ oder $\Theta_0 = \Theta_1$) dasselbe Vergleichs-Ellipsoid an und für sich, aber in verschiedenen Lagen.

Aus diesen Gründen empfiehlt es sich, verschiedene Benennungen einzuführen; und indem wir dem Vorgange von Helmert („Höhere Geodäsie, 1880“, I. Band, S. 514) folgen, unterscheiden wir erstens: *absolute* „Lotablenkungen“, d. h. solche, welche sich auf das günstigste mittlere Vergleichs-Ellipsoid beziehen, dessen Mittelpunkt mit dem Erdschwerpunkt, und dessen kleine Axe mit der Umdrehungsaxe der Erde zusammenfällt, und zweitens *relative* „Lotabweichungen“, welche sich auf ein vorläufig der Rechnung zu Grunde gelegtes Vergleichs-Ellipsoid und auf eine bestimmte Lage desselben beziehen.

§ 109. Bestimmung der Lotabweichung durch Vergleich astronomischer und geodätischer Messungen.

Die Lotabweichung ist der Winkel, welchen die physikalische Lotlinie eines Punktes mit der entsprechenden Ellipsoid-Normalen bildet.

Wir wollen zuerst den einfachen Fall der Lotabweichung im Meridian behandeln, d. h. wir wollen annehmen, dass die Lotlinie zwar von der Ellipsoid-Normalen abweicht, aber doch in der Ebene des Ellipsoid-Meridians sich befindet (oder wir betrachten nur die meridionale Komponente ξ der Lotabweichung).

Dieser Fall ist in Fig. 1. dargestellt. In einem Punkte J des Ellipsoids haben wir die Ellipsoid-Normale JZ mit der ellipsoidischen oder geodätischen Breite φ , und die Lotlinie JZ' mit der astronomischen Breite φ' . Die Lotlinie JZ' ist rechtwinklig auf der Geoidfläche, welche durch die punktierte Linie GG' angedeutet ist. Der Winkel ξ zwischen JZ und JZ' ist die Lotabweichung im Meridian, und wir wollen ξ positiv zählen, wenn, wie in Fig. 1. angenommen ist, die Lotlinie JZ' gegen den Nordpol hin von JZ abweicht. Man sagt in diesem Falle auch, die *Zenit-Abweichung* ξ ist nördlich oder die *Lot-Abweichung* ξ ist südlich, und wir haben hierfür nach Fig. 1.:

$$\xi = \varphi' - \varphi \quad (1)$$

Die Lotabweichung im allgemeinen, d. h. nicht im Meridian, kann in zweierlei Weise bestimmt werden: Erstens giebt man die absolute Lotabweichung θ und ihr Azimut ϵ an, oder zweitens bestimmt man die beiden Komponenten ξ und η der Lotabweichung nach Norden und Osten, dieselben sind:

$$\xi = \theta \cos \epsilon \quad \eta = \theta \sin \epsilon \quad (2)$$

Diese zwei Gleichungen, welche nach dem Vorhergehenden wohl unmittelbar zu verstehen sind, werden wir auch wieder bestätigt finden durch die nachfolgende Fig. 2. S. 530, zu welcher wir nun übergehen.

In Fig. 2. S. 530 sei Z das geodätische Zenit und Z' das astronomische Zenit. P ist der Pol, welcher zu beiden Zeniten in Beziehung steht. J ist ein Punkt der Erdoberfläche, auf welchem geodätische und astronomische Beobachtungen gemacht werden. Durch astronomische Beobachtungen soll die Polhöhe φ' , die geographische Länge λ' und ein Azimut α' bestimmt werden, und es handelt sich um die Auffindung von Beziehungen zwischen diesen Grössen φ' , λ' , α' und den entsprechenden geodätischen Werten φ , λ , α , welche man erhalten haben würde, wenn das Zenit nicht in Z' sondern in Z befindlich wäre.

Nachdem diese Verhältnisse erkannt sind, wird es nicht mehr schwer sein, die Wirkung der Lotabweichung in Breite, Länge und im Azimut anzugeben.

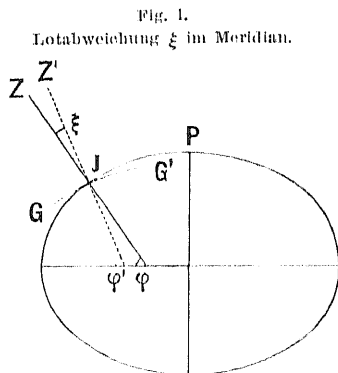
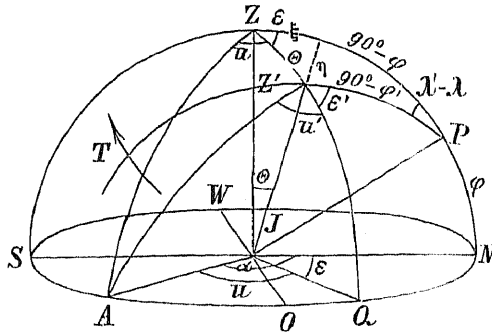


Fig. 2.

Z = Geodätisches Zenit, dem Ellipsoid entsprechend, φ = geodätische (ellipsoidische) Breite,
 Z' = Astronomisches Zenit, dem Geoid entsprechend, φ' = astronomische Breite (Polhöhe).



I. Lotabweichung in Breite.

Die Lotabweichung in Breite, oder die meridionale Komponente ξ der Lotabweichung, ist am leichtesten zu bestimmen.

Das Komplement der Polhöhe ist immer gleich dem Bogen zwischen dem Pol und dem Zenit, also in Fig. 2. $ZP = 90^\circ - \varphi$, $Z'P = 90^\circ - \varphi'$, wie auch bereits in die Figur eingeschrieben ist.

Da nun das Dreieck PZZ' bei Z' nur die kleine Ordinate η hat, kann man die Projektion ξ der Seite $ZZ' = v$ hinreichend genau als Differenz der beiden Seiten PZ und PZ' annehmen, also:

$$\xi = (90^\circ - \varphi) - (90^\circ - \varphi') \quad \text{oder} \quad \xi = \varphi' - \varphi \quad (3)$$

Dieses ist wieder dieselbe Gleichung, die wir schon bei (1) unmittelbar gefunden haben.

II. Lotabweichung in Länge.

Bei Vergleichung der geographischen Längen hat man zu beachten, dass alle astronomische Längen-Bestimmung auf Ortszeit-Bestimmung beruht. Wenn λ' die astronomisch bestimmte geographische Länge des Punktes J ist, bezogen auf einen westlich von J liegenden Anfangspunkt J_0 (z. B. Ferro, Paris, Greenwich), so heisst das so viel als: Ein Gestirn T , welches in J_0 zur Zeit t_0 kulminiert, kulminiert in J zur Zeit:

$$t' = t_0 - \lambda' \quad (4)$$

Diese Kulmination findet statt beim Durchgang des Gestirns durch den Deklinationskreis PZ' ; dagegen der Durchgang durch den Deklinationskreis PZ , welcher dem geodätischen Zenit angehört, erfolgt später, und zwar um den Winkelbetrag ZZP' ; oder die geodätische Kulmination erfolgt zur Zeit:

$$t = t_0 - \lambda' + ZZP' \quad (4a)$$

Wenn nun λ die geographische Länge des Beobachtungspunktes J ist, welche dem geodätischen Zenit Z entspricht, so hat man entsprechend (4):

$$t = t_0 - \lambda \quad (5)$$

Aus (4a) und (5) folgt:

$$ZPZ' = \lambda' - \lambda \quad (6)$$

wie auch bereits in Fig. 2. eingeschrieben ist.

Um $\lambda' - \lambda$ in η auszudrücken, braucht man nur wieder das schmale langgestreckte Dreieck $PZ'Z$ zu betrachten, oder das schmale rechtwinklige Dreieck, welches durch Projektion von Z' auf die Seite PZ entsteht. Dadurch erhält man:

$$\sin(\lambda' - \lambda) = \frac{\sin \eta}{\sin(90^\circ - \varphi')} = \frac{\sin \eta}{\cos \varphi'}$$

Da hier $\lambda' - \lambda$ und η beide klein sind, und auch φ' sich von φ nur wenig unterscheidet, kann man aus der vorstehenden Gleichung bilden:

$$\lambda' - \lambda = \eta \sec \varphi \quad (7)$$

III. Lotabweichung im Azimut.

Wenn es sich um astronomische Azimutmessung handelt, so hat man den Horizontalwinkel zu messen zwischen der Richtung nach dem Pol P und der Richtung nach einem geodätischen Zielpunkt, der in Fig. 2. im Horizonte liegend als Punkt A angenommen sei. Die astronomische Azimutmessung wird daher den Winkel am astronomischen Zenit Z' geben, welcher in Fig. 2. als eine Summe $\epsilon' + u'$ bezeichnet ist. Dabei war die vertikale Theodolit-Axe nach dem astronomischen Zenit Z' oder nach der physikalischen Lotlinie JZ' gerichtet, und das Messungs-Ergebnis $\epsilon' + u'$ ist von der Lotabweichung beeinflusst.

Wenn wir andererseits dasjenige Azimut kennen lernen wollen, welches man ohne Lotabweichung erhalten haben würde, d. h. das geodätische Azimut, so muss man die vertikale Theodolit-Axe nach dem geodätischen Zenit JZ gerichtet denken, und damit erhält man das Azimut, welches bei Z als eine Summe $\epsilon + u$, und in der Horizontal-Ebene bei J als ein Winkel $\alpha = \epsilon + u$ dargestellt ist. Zur Vergleichung haben wir also nun:

$$\text{Geodätisches Azimut} \quad \alpha = \epsilon + u \quad (8)$$

$$\text{Astronomisches Azimut} \quad \alpha' = \epsilon' + u' \quad (9)$$

$$\text{Differenz} \quad \alpha - \alpha' = (\epsilon - \epsilon') + (u - u') \quad (10)$$

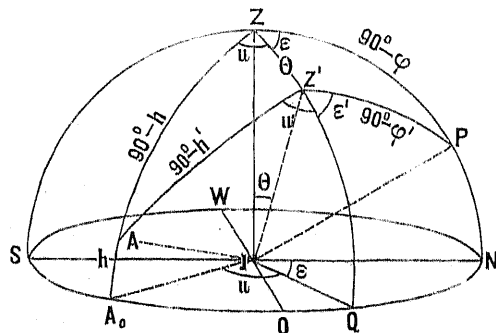
Von diesen beiden Teilen $\epsilon - \epsilon'$ und $u - u'$ ist der zweite Teil $u - u'$ immer sehr klein und meist zu vernachlässigen, wenn der geodätische Zielpunkt A im Horizonte selbst liegt, oder wenigstens nur einen kleinen Höhen- oder Tiefenwinkel hat.

Die Differenz $u - u'$ ist zu vergleichen dem Fehler einer Horizontal-Winkelmessung, der dadurch entsteht, dass die Theodolitaxe nicht genau vertikal, sondern etwas schief gestellt wird.

Die hierfür gültige Fehler-Formel haben wir schon früher (Band II. S. 164) entwickelt, im wesentlichen ebenso, wie wir nun die Entwicklung machen, im Anschluss an Fig. 3., welche sich von Fig. 2. nur dadurch unterscheidet, dass der geo-

Fig. 3.

$Z = \text{Geodätisches Zenit.}$
 $Z' = \text{Astronomisches Zenit.}$



dätische Zielpunkt A nicht mehr im Horizont, sondern mit einem Höhenwinkel h angenommen wird.

Indem wir nun eine Cotang-Gleichung der Gruppe (9) S. 195 auf das sphärische Dreieck $ZZ'A$ anwenden, erhalten wir:

$$\cotg(90^\circ - h) \sin \Theta = \cos \Theta \cos u + \sin u \cotg(180^\circ - u') \quad (11)$$

Indem man Θ als klein behandelt, erhält man:

$$\begin{aligned} \Theta \tan h &= \cos u - \sin u \cotg u' \\ &= \frac{\cos u \sin u' - \sin u \cos u'}{\sin u} = \frac{\sin(u' - u)}{\sin u} \\ u' - u &= \Theta \sin u \tan h \end{aligned} \quad (12)$$

Wenn der Höhenwinkel h klein ist, wie es bei geodätischen Zielpunkten gewöhnlich der Fall ist, so ist $\Theta \tan h$ eine kleine Grösse zweiter Ordnung, welche wir vernachlässigen, oder besonderer Berücksichtigung vorbehalten.

Es bleibt also noch der erste Teil der Formel (10), d. h. $\varepsilon - \varepsilon'$ zu untersuchen, und hiezu machen wir eine ganz ähnliche Entwicklung wie soeben (11) — (12), nochmals in Bezug auf das sphärische Dreieck $ZZ'P$.

Wir nehmen also wieder eine Cotang-Gleichung der Gruppe (9) S. 195, und finden durch deren Anwendung auf das Dreieck $ZZ'P$:

$$\begin{aligned} \cotg(90^\circ - \varphi) \sin \Theta &= \cos \Theta \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \cotg(180^\circ - \varepsilon') \\ \Theta \tan \varphi &= \cos \varepsilon - \sin \varepsilon \cotg \varepsilon' \\ &= \frac{\cos \varepsilon \sin \varepsilon' - \sin \varepsilon \cos \varepsilon'}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin(\varepsilon' - \varepsilon)}{\sin \varepsilon} \\ \varepsilon' - \varepsilon &= \Theta \sin \varepsilon \tan \varphi \end{aligned} \quad (13)$$

Statt der absoluten Lotabweichung Θ kann man hier auch die Quer-Komponente $\eta = \Theta \sin \varepsilon$ einführen, und indem wir mit der bei (12) besprochenen Vernachlässigung wieder die Azimut-Differenz $\alpha - \alpha'$ selbst betrachten, haben wir:

$$\alpha' - \alpha = \eta \tan \varphi \quad (14)$$

Zusammenfassung der Grundformeln für Lotabweichung.

Bezeichnungen.	Geodät.	Astron.
Geographische Breite oder Polhöhe	φ	φ'
Geographische Länge von Westen nach Osten positiv gezählt	λ	λ'
Azimut von Norden nach Osten positiv gezählt	α	α'
Absolute Lotablenkung oder Zenitablenkung	$= \Theta$	
Südliche Lotablenkung oder nördliche Zenitablenkung	$= \xi$	
Westliche Lotablenkung oder östliche Zenitablenkung	$= \eta$	

(15)

Formeln.

$$\xi = \varphi' - \varphi \quad (16)$$

$$\eta = (\lambda' - \lambda) \cos \varphi \quad (17)$$

$$\eta = (\alpha' - \alpha) \cotg \varphi \quad (18)$$

Die beiden Gleichungen (17) und (18) geben die Kontroll-Gleichung:

$$\alpha' - \alpha = (\lambda' - \lambda) \sin \varphi \quad (19)$$

Diese Gleichung wurde zuerst von *Laplace* gefunden und wird nach ihm „*Laplace'sche Gleichung*“ genannt.

Zur Bestimmung der Lotabweichung ξ im Meridian giebt es nur *ein* Mittel, nämlich nach (16) die Vergleichung astronomischer und geodätischer Breiten. Dagegen für die Querabweichung η kann man nach (17) und (18) die Längen-Vergleichung $\lambda' - \lambda$ oder die Azimut-Vergleichung $\alpha' - \alpha$ benutzen, hat man beides, so ergibt sich eine sehr erwünschte Probe, entsprechend der *Laplace'schen* Gleichung (19).

In Bezug auf die Genauigkeit, welche in geodätischer Beziehung zur Bestimmung der Lotabweichung erforderlich ist, sind die beiden Gleichungen (16) und (17) wesentlich verschieden von der dritten Gleichung (18), denn geodätische Breiten φ und Längen λ bekommt man aus einer gewöhnlichen Triangulierung bereits mit grosser Genauigkeit, insofern ein geodätischer Bogen von 30 Metern nur einen Breiten-Unterschied $\Delta\varphi = 1''$ bringt, und $\Delta\lambda$ etwa $= 1,5''$ in mittleren Breiten, dagegen die geodätische *Azimut-Übertragung* auf etwa $1''$ genau, ist viel schwieriger zu erlangen. Die geodätischen Winkel-Genauigkeiten zur Übertragung von Breiten und Längen einerseits und zur Übertragung von Azimuten andererseits, verhalten sich ungefähr ebenso, wie die Länge des Erdhalbmessers zur Länge einer Triangulierungskette.

Einfluss der Lotabweichung auf die Winkelmessung.

Im Anschluss an die Fig. 3. S. 531, welche uns die Grundformeln für die Lotabweichung in Breite, Länge und Azimut geliefert hat, können wir sogleich auch eine Betrachtung anstellen über die Änderungen, welche die Winkelmessung mit dem Theodolit durch die Lotabweichung erleidet.

Da die vertikale Theodolitaxe durch die Wasserwaage nach der physikalischen Lotlinie eingestellt wird, steht sie im Falle von Lotabweichung schief zur Ellipsoid-Normalen, und dadurch entstehen genau dieselben Änderungen, wie wenn die Vertikalaxe infolge falscher mechanischer Behandlung schief stünde (vgl. Vertikal-Axenfehler oder Aufstellungsfehler, Band II., S. 164).

Den Einfluss einer solchen Schiefstellung haben wir auch schon im vorstehenden bei (12) bestimmt, nämlich:

$$u' - u = \Theta \sin u \tan h \quad (20)$$

Wir haben auch bereits erkannt, dass dieser Einfluss meist wenig ausmachen wird, weil bei ausgedehnten Triangulierungen auch die Höhen- oder Tiefenwinkel h meist klein zu sein pflegen. Indessen im Gebirge, z. B. in den Alpenländern, kann der Einfluss doch merklich werden; nehmen wir z. B. $\Theta = 10''$ und $h = 1^\circ$, so wird $u' - u = 0,018''$, was bereits an die Grenze der Messungsfehler heraneicht. Da aber in der Nähe von Hochgebirgen die Lotabweichungen bis zu $60''$ anwachsen können, und auch die Höhen- oder Tiefenwinkel über 1° werden können, so giebt es Fälle, in welchen $u' - u$ wohl $1''$ und mehr werden kann, so dass Vernachlässigung nicht mehr am Platze wäre.

Was die Höhenwinkel betrifft, so ist sofort klar, dass ein Höhenwinkel im Azimut einer Lotabweichung, um den Betrag dieser Lotabweichung Θ selbst geändert wird, und dass in einem andern Azimut eine Komponente von Θ wirksam wird. Dieses lässt sich in einer Gleichung ausdrücken, denn das sphärische Dreieck AZZ' Fig. 3. S. 531 giebt:

$$\sin h = \sin h' \cos \Theta + \cos h' \sin \Theta \cos u$$

also für kleines Θ :

$$\begin{aligned}\sin h &= \sin h' + \Theta \cos u \cos h' \\ \sin h &= \sin (h' + (h - h')) = \sin h' + (h - h') \cos h' \\ h - h' &= \Theta \cos u\end{aligned}\quad (21)$$

Dieses ist die vorhin besprochene Komponente, nämlich $h - h' = \pm \Theta$ für $u = 0^\circ$ oder 180° und $h - h' = 0$ für $u = 90^\circ$ oder 270° u. s. w.

Wenn die Refraktions-Gesetze genauer bekannt wären, so könnte man nach dem Gesetze dieser Gleichung die Lotabweichungen durch Höhenwinkel bestimmen.

§ 110. Bestimmung der Lotabweichung aus rechtwinkligen geodätischen Coordinaten.

Als Beispiel für Lotabweichungs-Bestimmung nehmen wir einige astronomische Messungen, welche etwa in der Zeit von 1871—1877 in Baden gemacht wurden. Die Beobachtungspunkte dieser astronomischen Messungen haben wir an die badische Landes-Triangulierung angeschlossen (vgl. S. 13 und S. 26), und damit erhielten wir verschiedenes Material zur Berechnung von Lotabweichungen. Diesen Berechnungen sei jedoch hier keine andere Bedeutung als die formeller Rechen-Beispiele beigelegt, und deshalb unterlassen wir auch, die Zitate für die astronomischen Messungen beizugeben (welche in unserer vorigen Auflage, Karlsruhe 1878, S. 448—449 angegeben wurden).

Aus der badischen Triangulierung haben wir die nachstehenden rechtwinkligen (Soldnerschen) Coordinaten theils unmittelbar, theils durch Anschluss-Messungen erhalten, wozu nur noch zu bemerken ist, dass die amtlichen badischen Coordinaten von Mannheim nach Süden $+x$ und nach Westen $+y$ zählen, während wir hier dem allgemeineren Gebrauche entsprechend die Coordinaten mit *umgestellten Vorzeichen* geben, so dass $+x$ nach Norden und $+y$ nach Osten zählt.

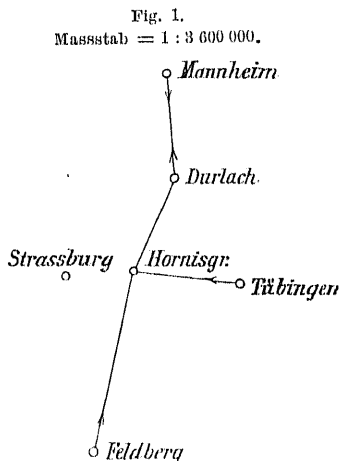
I. Rechtwinklige Soldnersche Coordinaten.

Punkt	Ordinate y	Abscisse x
Mannheim, Sternwarte, Coordinaten-Nullpunkt	0,00 ^m	0,00 ^m
Mannheim, Sternwarte, Pfeiler	— 3,42	+ 1,40
Karlsruhe, Polytechnikum, Pfeiler	— 3 508,39	— 53 046,43
Durlach, Warte, Turmmitte	+ 1 890,26	— 54 452,72
Durlach, Warte, Pfeiler	+ 1 889,32	— 54 450,66
Hornisgrinde (Turmmitte) Pfeiler	— 18 992,56	— 97 916,85
Strassburg, Münsterturm	— 52 332,24	— 100 372,70
Strassburg, Citadelle, Pfeiler	— 50 948,84	— 100 910,13
Tübingen, Sternwarte	+ 43 667,99	— 107,838,01
Feldberg, Turmmitte (bad. Triangulierungspunkt)	— 34 075,05	— 179 239,32
Feldberg, Pfeiler	— 34 068,35	— 179 263,21

Die gegenseitige Lage der wichtigsten dieser Punkte ist in nachstehender Fig. 1. dargestellt.

Die Art und Weise der Berechnung dieser Coordinaten ist durch unser Beispiel S. 268 genügend erklärt. Die Orientierung erfolgte durch das astronomisch gemessene Azimut Mannheim-Speyer ((1) S. 267), welches auch sehr nahe übereinstimmt mit dem Azimut Mannheim-Durlach, das wir nachher unter (3) angeben werden.

Indem wir weiter auch die astronomisch gemessene Breite $\varphi_0 = 49^\circ 29' 10,82''$ für den Coordinaten-Nullpunkt benützen, haben wir aus den soeben unter I. angegebenen rechtwinkligen Coordinaten die geographischen Coordinaten berechnet, nach den Formeln von § 64. (Rechen-schema S. 334), unter Zugrundlegung der Hilfstafeln unseres Anhangs, d. h. mit den *Besselschen* Erddimensionen. Folgendes sind die Ergebnisse:



II. Geodätisch-Geographische Coordinaten.

Punkt	Breite φ	Länge λ	Meridian- konvergenz γ
Mannheim, Coordinaten-Nullpunkt	$49^\circ 29' 10,82''$	$0^\circ 0' 0,00''$	$0^\circ 0' 0,00''$
Mannheim, Pfeiler	$49^\circ 29' 10,87''$	$-0^\circ 0' 0,17''$
Karlsruhe, Polytechnikum, Pfeiler	$49^\circ 0' 33,49''$	$-0^\circ 2' 52,66''$	$-0^\circ 2' 10,33''$
Durlach, Warte, Pfeiler	$48^\circ 59' 48,05''$	$+0^\circ 1' 32,96''$	$+0^\circ 1' 10,15''$
Hornisgrinde, Pfeiler	$48^\circ 36' 19,78''$	$-0^\circ 15' 27,24''$	$-0^\circ 11' 35,59''$
Strassburg, Münsterthurm	$48^\circ 34' 53,42''$	$-0^\circ 42' 33,73''$	$-0^\circ 31' 55,09''$
Strassburg, Citadelle, Pfeiler	$48^\circ 34' 36,43''$	$-0^\circ 41' 25,99''$	$-0^\circ 31' 4,14''$
Tübingen, Sternwarte	$48^\circ 31' 10,30''$	$+0^\circ 35' 28,32''$	$+0^\circ 26' 34,52''$
Feldberg, Pfeiler	$47^\circ 52' 23,62''$	$-0^\circ 27' 19,69''$	$-0^\circ 20' 16,11''$

Hiezu haben wir folgende Ergebnisse astronomischer Messungen:

III. Astronomische Messungen.

$$\text{Mannheim, Sternwarte, Pfeiler, Polhöhe} = 49^\circ 29' 10,87'' \quad (1)$$

Hieraus ist durch östliche Reduktion abgeleitet:

$$\text{Mannheim, Coordinaten-Nullpunkt} \varphi_0 = 49^\circ 29' 10,82'' \quad (2)$$

Dieses ist der schon oben erwähnte Wert, mit dem die geodätisch-geographischen Coordinaten II. berechnet sind. In Mannheim ist auch gemessen:

$$\text{Azimut Mannheim, Pfeiler—Durlach, Pfeiler} = 178^\circ 0' 33,31'' \quad (3)$$

Dieses Azimut betrachten wir als Orientierung für die *Soldnerschen* Coordinaten I. (In Wirklichkeit war die Orientierung um $0,22''$ anders.)

$$\text{Durlach, Pfeiler, Polhöhe} \dots\dots\dots = 48^\circ 59' 57,00'' \quad (4)$$

$$\text{Azimut Durlach, Pfeiler—Mannheim, Pfeiler} \dots\dots\dots = 358^\circ 1' 35,20'' \quad (5)$$

$$\text{Strassburg, Münsterturm, Polhöhe} \dots\dots\dots = 48^\circ 34' 55,94'' \quad (6)$$

Der Längenunterschied zwischen Mannheim, Pfeiler und Strassburg, Pfeiler ist astronomisch $= 0^h 2^m 45,792^s = 0^\circ 41' 26,88''$ bestimmt; indem wir die kleine Reduktion $0,011^s = 0,17''$ von Mannheim, Pfeiler auf Mannheim, Coordinaten-Nullpunkt anbringen, haben wir, da Strassburg westlich von Mannheim liegt:

$$\text{Mannheim, Nullpunkt—Strassburg, Pfeiler} \dots\dots\dots \lambda' = -0^\circ 41' 27,05'' \quad (7)$$

$$\text{Tübingen, Sternwarte, Polhöhe} \dots\dots\dots = 48^\circ 31' 12,40'' \quad (8)$$

$$\text{Azimut Tübingen, Hornisgrinde} \dots\dots\dots = 278^\circ 59' 40,68'' \quad (9)$$

(Dieses ist derselbe Wert wie α' in (3) S. 387.)

$$\text{Feldberg, Pfeiler, Polhöhe} \dots\dots\dots = 47^\circ 52' 24,43'' \quad (10)$$

$$\text{Azimut Feldberg, Pfeiler—Hornisgrinde, Pfeiler} \dots\dots\dots = 10^\circ 9' 46,02'' \quad (11)$$

Nun wollen wir diese Angaben zur Berechnung von Lotabweichungen benutzen. Wir nehmen zuerst die Breiten geodätisch aus II. und astronomisch aus (2), (4), (6), (8), (10) und haben damit folgende Vergleichung:

Punkt	Geodätisch φ	Astronomisch φ'	Lotabweichung $\xi = \varphi' - \varphi$	(12)
Mannheim, Nullpunkt ..	$49^\circ 29' 10,82''$	$49^\circ 29' 10,82''$	$(\pm 0,00'')$	
Durlach, Pfeiler	$48^\circ 59' 48,05''$	$48^\circ 59' 57,00''$	$+ 8,95''$	
Strassburg, Münsterturm	$48^\circ 34' 53,42''$	$48^\circ 34' 55,94''$	$+ 2,52''$	
Tübingen, Sternwarte ..	$48^\circ 31' 10,30''$	$48^\circ 31' 12,40''$	$+ 2,10''$	
Feldberg, Pfeiler	$47^\circ 52' 23,62''$	$47^\circ 52' 24,43''$	$+ 0,79''$	

Diese meridionalen Lotabweichungen, relativ gegen Mannheim, scheinen sich durch die Massenwirkung des Schwarzwaldes erklären zu lassen.

Zur Bestimmung der *Quer*-Abweichung durch astronomisch-telegraphische Längen-Bestimmung haben wir unter dem oben mitgetheilten Material nur *einen* Fall, nämlich Mannheim-Strassburg, Citadelle, Pfeiler. Dieser Längenunterschied ist nach Tabelle II.:

$$\text{Mannheim—Strassburg, geodätisch} \quad \lambda = -0^\circ 41' 25,99''$$

$$\text{desgl. nach (7) astronomisch} \quad \lambda' = -0^\circ 41' 27,05''$$

$$\text{Differenz} \quad \lambda' - \lambda = -1,06''$$

Hiefür hat man nach der Grundformel (17) § 109. S. 532 die Querabweichung:

$$\eta = (\lambda' - \lambda) \cos \varphi = -1,06'' \cos 48^\circ 35' = -0,70'' \quad (13)$$

Nach der Vorzeichen-Bestimmung von (15) § 109. S. 532 ist dieses eine westliche Zenitabweichung oder östliche Lotabweichung.

Übergehend zu der Bestimmung der Querabweichung durch Azimute, haben wir in unserem Falle drei Werte, welche zu dem angegebenen Zwecke benützt werden können.

Wir wollen die Einzelheiten an dem Beispiele von Durlach zeigen. Wir nehmen aus der Tabelle I.:

Mannheim, Pfeiler	$y' = - 3,42^m$	$x' = + 1,40^m$
Durlach, Pfeiler	$y = + 1889,32^m$	$x = - 54450,66^m$
	$y' - y = - 1892,74$	$x' - x = + 54452,06$

Damit rechnet man weiter nach § 48. (15) — (20) S. 273—274:

$$\begin{aligned} \text{Ebener Richtungswinkel} \quad \alpha_0 &= 358^\circ 0' 33,172'' \\ d\alpha &= + 0,174'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sphärischer Richtungswinkel} \quad (\alpha) &= 358^\circ 0' 33,346'' \\ \text{Hiezu Meridian-Konvergenz aus d. Tabelle II.} \quad \gamma &= + 0^\circ 1' 10,15'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Also Azimut Durlach-Mannheim geodätisch} \quad \alpha &= 358^\circ 1' 43,50'' \\ \text{Zur Vergleichung von (5) astronomisch} \quad \alpha' &= 358^\circ 1' 35,20'' \end{aligned}$$

$$\text{Differenz} \quad \alpha' - \alpha = - 8,30'' \quad (14)$$

Daraus findet man nach der Grundformel (18) § 109. S. 532 die Querabweichung:

$$\text{Durlach} \quad \eta = (\alpha' - \alpha) \cotg \varphi = - 8,30'' \cotg 49^\circ 0' = - 7,22'' \quad (15)$$

Nach der Bestimmung über die Vorzeichen, bei (15) § 109. S. 532, ist dieses $- 7,22''$ eine östliche Lotabweichung oder westliche Zenitabweichung.

In gleicher Weise können wir auch die Querabweichungen für Feldberg und Tübingen berechnen, wofür hier nur die Haupt-Berechnungswerte hergesetzt werden sollen.

Aus den Coordinaten der Tabelle I. berechnet man:

$$\begin{aligned} \text{Feldberg, Pfeiler — Hornisgrinde, Pfeiler} \quad \alpha_0 &= 10^\circ 29' 57,876'' \\ d\alpha &= 5,657'' \\ (\alpha) &= 10^\circ 29' 52,219'' \end{aligned}$$

$$\text{Meridian-Konvergenz (Tabelle II.)} \quad - 0^\circ 20' 16,11''$$

$$\begin{aligned} \text{Feldberg-Hornisgrinde, Geodätisches Azimut} \quad \alpha &= 10^\circ 9' 36,11'' \\ \text{" " Astr. Azimut (11)} \quad \alpha' &= 10^\circ 9' 46,02'' \end{aligned}$$

$$\text{Differenz} \quad \alpha' - \alpha = + 9,91''$$

$$\text{Feldberg} \quad \eta = + 9,91'' \cotg 47^\circ 52' = + 8,96'' \quad (16)$$

Ebenso haben wir auch noch für Tübingen:

$$\begin{aligned} \text{Tübingen-Hornisgrinde} \quad \alpha_0 &= 278^\circ 33' 1,828'' \\ d\alpha &= + 0,365'' \\ (\alpha) &= 278^\circ 33' 2,193'' \end{aligned}$$

$$\text{Meridian-Konvergenz (Tabelle II.)} \quad + 0^\circ 26' 34,52''$$

$$\begin{aligned} \text{Tübingen-Hornisgrinde, Geodätisches Azimut} \quad \alpha &= 278^\circ 59' 36,71'' \\ \text{" " Astr. Azimut (9)} \quad \alpha' &= 278^\circ 59' 40,68'' \end{aligned}$$

$$\text{Differenz} \quad \alpha' - \alpha = + 3,97''$$

$$\text{Tübingen} \quad \eta = + 3,97'' \cotg 48^\circ 31' = + 3,51'' \quad (17)$$

Wenn wir nun alles, was wir gefunden haben, zusammenstellen, so haben wir:

Punkt	Lotabweichung		
	im Meridian	in der Quere	
	ξ	η	
Mannheim	($\pm 0,00''$)	($\pm 0,00''$)	Ausgangspunkt
Durlach	+ 8,95"	— 7,22" (östlich)	} (18)
Strassburg	+ 2,52"	— 1,06" (östlich)	
Tübingen	+ 2,10"	+ 3,51" (westlich)	
Feldberg	+ 0,79"	[+ 8,96"] (westlich)	
	(städtlich)		

Leider haben wir unter diesen Punkten keinen, in welchem die Querabweichung η durch eine geographische Länge *und* durch ein Azimut, also mit Probe, bestimmt wäre.

Die vorstehenden Lotabweichungs-Berechnungen bilden ein formelles, in sich selbst konsequentes Rechen-Beispiel, auf dessen sachliche Richtigkeit jedoch hier kein Gewicht gelegt wird. Trotzdem mag so viel bemerkt werden, dass die Abweichungen ξ *im Meridian* wohl als richtig anzunehmen sind, und auch die Querabweichung η in Strassburg, soweit es sich um den geodätischen Teil handelt. Von den aus *Azimut-Übertragung* berechneten Querabweichungen in Durlach, Tübingen und Feldberg mag die erste, Durlach, auch noch richtig sein, die letzte, Feldberg, aber jedenfalls *nicht*, weshalb sie in (18) in Klammer gestellt wurde, und zwar aus dem Grunde, weil die Triangulierung im Süden an ein *zweites*, von Mannheim unabhängiges Azimut, orientiert ist, während unsere Rechnung nur *ein* orientierendes Azimut (3) in Mannheim voraussetzt.

Aus diesem Grunde hatten wir in der vorigen Auflage dieses Buches, Karlsruhe 1878, S. 452, eine besondere geodätische Übertragung zwischen Mannheim und Feldberg eingeschaltet, welche dann in der That auch $\eta = -2''$ (östlich) für Feldberg gab. Wir haben dieses aber nun fortgelassen, weil alle vorstehenden Berechnungen keinen anderen Zweck haben sollen, als ein formelles Rechen-Beispiel zu bieten.

Lotabweichung des Nullpunkts.

Wir haben in dem vorstehenden Beispiele die Lotabweichung in dem Coordinaten-Nullpunkte Mannheim, selbst gleich Null angenommen, weil wir überhaupt nur *relative* Lotabweichungen berechnen konnten, und, wenn einmal eine Annahme für ξ_0 und η_0 in Mannheim zu machen war, es am einfachsten war, $\xi_0 = 0$ und $\eta_0 = 0$ zu setzen.

Hat man nachträglich Veranlassung, die Annahmen für ξ_0 und η_0 zu ändern, oder will man (z. B. zum Zwecke einer Ausgleichung) diese Annahmen von vornherein unbestimmt lassen, so muss man andererseits wissen, in welcher Weise sich eine Änderung von ξ_0 und η_0 auf die ξ und η der anderen Punkte überträgt.

In unserem Falle eines mässig ausgedehnten rechtwinkligen Coordinaten-Systems kann man leicht überblicken, dass Änderungen $d\xi_0$ und $d\eta_0$ sich *sehr nahe in gleicher* Grösse auf die anderen Punkte übertragen, so dass z. B. eine Änderung $d\xi_0 = +1''$ auch alle anderen Werte ξ um *nahezu* $1''$ vergrössert, u. s. w.

Die strengere Berechnung giebt nicht genau $d\xi = d\xi_0$ u. s. w.; indessen werden sich $d\xi$ und $d\xi_0$ nur um kleine Glieder höherer Ordnung unterscheiden, welche man durch Differentiieren der Formeln von § 64. finden kann.

In solcher Weise hat zuerst *von Orff* die rechtwinkligen Coordinaten der bayrischen Landesvermessung behandelt, in dem Werke: „Die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, München 1873“, S. 556—560 (vgl. auch unseren Bericht in *Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen, 1882“, S. 209—210).

Indem wir für die Behandlung rechtwinkliger Coordinaten hierauf verweisen, wollen wir in dem folgenden § 111. die allgemeinere Aufgabe, nämlich geodätische

Übertragung von Breite, Länge und Azimut durch eine geodätische Linie unter beliebigem Azimut in dem Sinne behandeln, dass die Änderungen $d\varphi$, $d\lambda$, $d\alpha$ des Anfangspunktes einer geodätischen Linie auf den Endpunkt übertragen werden, woran sich weitere Aufgaben anschliessen werden.

§. 111. Differential-Formeln zur astronomisch-geodätischen Netz-Ausgleichung. *)

Wir betrachten zunächst die *sphärisch*-geodätische Hauptaufgabe, indem wir uns vorbehalten, von sphärischen Formeln auf sphäroidische Formeln überzugehen.

In der sphärischen Fig. 2. haben wir zwei Punkte mit den Breiten ψ_1 und ψ_2 und dem Längenunterschied λ .

Diese beiden Punkte erfahren kleine Verschiebungen, so dass die Breiten ψ_1 und ψ_2 in ψ'_1 und ψ'_2 übergehen und auch der Längenunterschied λ ein anderer λ' wird. Dadurch wird auch die sphärische Entfernung σ eine andere σ' und die beiden Azimute α_1 und α_2 gehen über in α'_1 und α'_2 .

Die sämtlichen so bestimmten Änderungen sind:

$$\left. \begin{aligned} \psi'_1 - \psi_1 &= d\psi_1 & \psi'_2 - \psi_2 &= d\psi_2 \\ \lambda' - \lambda &= d\lambda \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_1 - \alpha_1 &= d\alpha_1 & \alpha'_2 - \alpha_2 &= d\alpha_2 \\ \sigma' - \sigma &= d\sigma \end{aligned} \right\} (2)$$

Wir haben die Aufgabe, die Beziehungen aufzusuchen, welche zwischen diesen Änderungen bestehen, und zuerst sollen $d\sigma$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2$ als Funktion von $d\psi_1$, $d\psi_2$, $d\lambda$ bestimmt werden.

Die Entfernung σ wird in ψ_1 , ψ_2 und λ ausgedrückt durch:

$$\cos \sigma = \sin \psi_1 \sin \psi_2 + \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \lambda \quad (3)$$

Diese Gleichung wird differenziert:

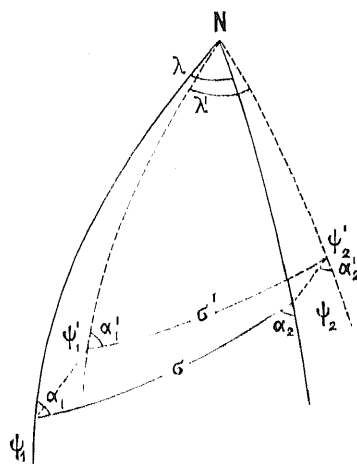
$$\begin{aligned} -\sin \sigma d\sigma &= (\cos \psi_1 \sin \psi_2 - \sin \psi_1 \cos \psi_2 \cos \lambda) d\psi_1 \\ &+ (\cos \psi_2 \sin \psi_1 - \cos \psi_1 \sin \psi_2 \cos \lambda) d\psi_2 - \cos \psi_1 \cos \psi_2 \sin \lambda d\lambda \end{aligned} \quad (3a)$$

Die Coefficienten von $d\psi_1$ und $d\psi_2$ in dieser Gleichung lassen sich durch die sphärisch-trigonometrischen Beziehungen von (11) S. 195 sehr kurz darstellen:

$$\begin{aligned} \cos \psi_1 \sin \psi_2 - \sin \psi_1 \cos \psi_2 \cos \lambda &= \sin \sigma \cos \alpha_1 \\ \cos \psi_2 \sin \psi_1 - \cos \psi_1 \sin \psi_2 \cos \lambda &= \sin \sigma \cos (180^\circ - \alpha_2) \end{aligned}$$

*) Die beiden letzten Paragraphen 111. und 112. sind bearbeitet im Anschluss an *Helmert* „Höhere Geodäsie, I., 1880“, S. 281—283 und S. 534—536, sowie Veröffentlichung des geodätischen Instituts, Lotabweichungen, Berlin 1886. Jedoch der Übergang von den sphärischen zu den sphäroidischen Differential-Formeln (Gleichungen (14)—(17) S. 542) ist von uns nicht nach *Helmert* (reduzierte Distanz), sondern nach unserer „neuen Methode“ § 83. gemacht.

Fig. 1.
(Sphärisch, entsprechend Fig. 2. S. 406.)



Ausserdem hat man für das letzte Glied in (3a) die Sinusgleichung $\frac{\sin \lambda}{\sin s} = \frac{\sin \alpha_2}{\cos \varphi_1}$.
Dadurch geht die Gleichung (3a) über in die einfachere Form:

$$d\sigma = -\cos \alpha_1 d\psi_1 + \cos \alpha_2 d\psi_2 + \cos \psi_2 \sin \alpha_2 d\lambda \quad (4)$$

Übergehend zu den Azimuten erhalten wir durch Anwendung einer Cotangenten-Gleichung (9) S. 195 auf unsere Fig. 1. die Gleichung:

$$\tan \psi_2 \cos \psi_1 = \sin \psi_1 \cos \lambda + \sin \lambda \cot \alpha_1 \quad (5)$$

Wenn man dieses differentiirt, und die dadurch entstehende Gleichung nach den Differentialen ordnet, so erhält man:

$$\begin{aligned} d\alpha_1 \frac{\sin \lambda}{\sin^2 \alpha_1} &= d\psi_1 (\cos \psi_1 \cos \lambda + \sin \psi_1 \tan \psi_2) - d\psi_2 \frac{\cos \psi_1}{\cos^2 \psi_2} \\ &\quad + d\lambda (\cos \lambda \cot \alpha_1 - \sin \lambda \sin \psi_1) \\ d\alpha_1 &= d\psi_1 \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin \lambda} (\cos \psi_1 \cos \lambda + \sin \psi_1 \tan \psi_2) \\ &\quad - d\psi_2 \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin \lambda} \frac{\cos \psi_1}{\cos^2 \psi_2} \\ &\quad + d\lambda \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin \lambda} (\cos \lambda \cot \alpha_1 - \sin \lambda \sin \psi_1) \end{aligned} \quad (6)$$

Um diesen Ausdruck umzuformen, brauchen wir verschiedene sphärisch-trigonometrische Formeln:

- 1) für $d\psi_1$: $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \lambda} = \frac{\cos \psi_2}{\sin \sigma}$
 $\cos \sigma = \sin \psi_1 \sin \psi_2 + \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \lambda$
- 2) für $d\psi_2$: $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \lambda} = \frac{\cos \psi_2}{\sin \sigma}$, $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\cos \psi_2}{\cos \psi_1}$
- 3) für $d\lambda$: $\cos (180^\circ - \alpha_2) = -\cos \alpha_1 \cos \lambda + \sin \alpha_1 \sin \lambda \sin \psi_2$.

Damit lässt sich die Gleichung (6) auf folgende Form bringen:

$$d\alpha_1 = \sin \alpha_1 \frac{\cos \sigma}{\sin \sigma} d\psi_1 - \frac{\sin \alpha_2}{\sin \sigma} d\psi_2 + \frac{\cos \psi_2 \cos \alpha_2}{\sin \sigma} d\lambda \quad (7)$$

Um die entsprechende Formel für $d\alpha_2$ zu finden, braucht man keine neue Entwicklung zu machen, sondern in der Gleichung (7) nur ψ_1 und ψ_2 , sowie α_1 und $180^\circ - \alpha_2$, also auch $d\alpha_1$ und $-d\alpha_2$ gegenseitig zu vertauschen. Dadurch findet man die Formel für $d\alpha_2$, welche in der nachfolgenden Zusammenstellung aller drei Auflösungs-Formeln angegeben ist:

$$d\sigma = -\cos \alpha_1 d\psi_1 + \cos \alpha_2 d\psi_2 + \sin \alpha_2 \cos \psi_2 d\lambda \quad (8)$$

$$d\alpha_1 = \sin \alpha_1 \frac{\cos \sigma}{\sin \sigma} d\psi_1 - \frac{\sin \alpha_2}{\sin \sigma} d\psi_2 + \frac{\cos \psi_2 \cos \alpha_2}{\sin \sigma} d\lambda \quad (9)$$

$$d\alpha_2 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \sigma} d\psi_1 - \sin \alpha_2 \frac{\cos \sigma}{\sin \sigma} d\psi_2 + \frac{\cos \psi_1}{\sin \sigma} \cos \alpha_1 d\lambda \quad (10)$$

Diese drei Gleichungen (8), (9), (10) enthalten die Auflösung der zuerst gestellten Aufgabe, nämlich bei gegebenen $d\psi_1$, $d\psi_2$, $d\lambda$ die zugehörigen $d\sigma$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2$ zu bestimmen. Wenn man umgekehrt $d\psi_1$, $d\sigma$ und $d\alpha_1$ als gegeben annimmt, und $d\psi_2$, $d\lambda$ und $d\alpha_2$ daraus bestimmen will, so kann man dieses dadurch erreichen, dass man die drei Gleichungen (8), (9), (10) nach $d\psi_2$, $d\lambda$, $d\alpha_2$ auflöst.

Zu diesem Zwecke haben wir zuerst $d\lambda$ aus (8) und (9) eliminiert und $d\psi_2$ bestimmt, dann $d\psi_2$ aus (8) und (9) eliminiert und $d\lambda$ bestimmt, endlich die dadurch erhaltenen Formeln für $d\psi_2$ und $d\lambda$ in (10) eingesetzt, wodurch eine Formel für $d\alpha_2$ entsteht.

Hiebei hat man die verschiedenen trigonometrischen und goniometrischen Beziehungen zu beachten, welche zwischen den 6 Werten $\psi_1, \psi_2, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, \sigma$ stattfinden (man braucht namentlich die Gleichungen (8) und (9) S. 195), insbesondere die letztgenannte Einsetzung von $d\psi_2$ und $d\lambda$ in (10) ist zunächst etwas umständlich, reduziert sich aber sehr bedeutend. Wir geben von all diesem sofort die End-Ergebnisse:

$$d\psi_2 = \cos \lambda d\psi_1 + \cos \alpha_2 d\sigma - \sin \alpha_2 \sin \sigma d\alpha_1 \quad (11)$$

$$d\lambda = \sin \lambda \tan \psi_2 d\psi_1 + \frac{\sin \alpha_2}{\cos \psi_2} d\sigma + \frac{\cos \alpha_2 \sin \sigma}{\cos \psi_2} d\alpha_1 \quad (12)$$

$$d\alpha_2 = \sin \lambda \sec \psi_2 d\psi_1 + \sin \alpha_2 \tan \psi_2 d\sigma + \cos \lambda \cos \psi_1 \sec \psi_2 d\alpha_1 \quad (13)$$

Diese Gleichungen (11), (12), (13), welche wir hier auf dem Umwege über (8), (9), (10) gefunden haben, kann man auch unmittelbar aus den Formeln (16), (17), (18) S. 298 herleiten, z. B. nach (16) S. 298:

$$\begin{aligned} \sin \psi_2 &= \sin \psi_1 \cos \sigma + \cos \psi_1 \sin \sigma \cos \alpha_1 \\ \cos \psi_2 d\psi_2 &= \cos \psi_1 d\psi_1 \cos \sigma - \sin \psi_1 \sin \sigma d\sigma \\ &\quad - \sin \psi_1 d\psi_1 \sin \sigma \cos \alpha_1 + \cos \psi_1 \cos \sigma d\sigma \cos \alpha_1 - \cos \psi_1 \sin \sigma \sin \alpha_1 d\alpha_1 \\ d\psi_2 &= \left. \begin{aligned} &\frac{\cos \psi_1 \cos \sigma - \sin \psi_1 \sin \sigma \cos \alpha_1}{\cos \psi_2} d\psi_1 \\ &+ \frac{-\sin \psi_1 \sin \sigma + \cos \psi_1 \cos \sigma \cos \alpha_1}{\cos \psi_2} d\sigma \\ &- \frac{\cos \psi_1 \sin \sigma \sin \alpha_1}{\cos \psi_2} d\alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad (11a) \end{aligned}$$

Das Glied mit $d\alpha_1$ lässt sich durch eine Sinusformel auf das entsprechende Glied mit $d\alpha_1$ in (11) bringen, und die anderen Glieder mit $d\psi_1$ und $d\sigma$ werden beide durch Anwendung je einer Gleichung der Gruppe (11) S. 195 mit den entsprechenden Gliedern von (11) in Übereinstimmung gebracht. In ähnlicher Weise lassen sich auch (12) aus (17) S. 298, und (13) aus (18) S. 298 herleiten.

Endlich kann man auch die Reihen-Entwicklungen von § 59. zur Ableitung, bzw. zur Kontrollierung der Formeln (11), (12), (13) benützen; z. B. giebt (8) S. 313 mit den Bezeichnungen dieses Paragraphen:

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \psi_1 + \sigma \cos \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \sin^2 \alpha_1 \tan \psi_1 \\ d\psi_2 &= d\psi_1 - \frac{\sigma^2}{2} \sin^2 \alpha_1 (1 + \tan^2 \psi_1) d\psi_1 \end{aligned}$$

andererseits hat man nach (10) S. 314:

$$\lambda = \frac{\sigma \sin \alpha_1}{\cos \psi_1} \quad \text{also} \quad \cos \lambda = 1 - \frac{\sigma^2 \sin^2 \alpha_1}{2 \cos^2 \psi_1}$$

also zusammen:

$$d\psi_2 = \left(1 - \frac{\sigma^2}{2} \sin^2 \alpha_1 (1 + \tan^2 \psi_1)\right) d\psi_1 = \cos \lambda d\psi_1$$

Dieses stimmt mit dem ersten Gliede von (11), und in gleicher Weise kann man auch alle 9 Glieder der Formeln (11), (12), (13) begründen.*)

Nachdem wir somit die Formeln (8), (9), (10) und (11), (12), (13) auf verschiedenen Wegen abgeleitet, und gegenseitig versichert haben, wollen wir diese *sphärischen* Differential-Formeln auf das *Ellipsoid* übertragen, was durch die Hilfsmittel von § 80. und § 83. geschieht.

Wir haben:

$$\text{von (14) S. 403:} \quad d\psi = \frac{d\varphi}{V^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \quad (14)$$

$$\text{von (12) und (13) S. 403:} \quad \cos \psi = \frac{\cos \varphi}{V\sqrt{1-e^2}}, \quad \text{tang } \psi = \text{tang } \varphi \sqrt{1-e^2} \quad (15)$$

$$\text{von (19) S. 417:} \quad \sigma = \frac{S}{\sqrt{1-e^2}} (1 + \eta^2 \dots) \text{ wo } S = \frac{sV}{c} \quad (16)$$

$$\text{von (20) S. 417:} \quad \lambda = Vl (1 + \eta^2 \dots) \quad (17)$$

Wenn es bei sehr langen Linien nötig scheint, können die Korrektionsglieder, welche mit $1 + \eta^2 \dots$ bei (16) und (17) angedeutet sind, nach (19) und (20) S. 417 zugesetzt werden; im folgenden wollen wir das nicht thun, und entsprechend auch die Näherungen gelten lassen:

$$\sin \sigma = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \sin S \quad \cos \sigma = \cos S \quad (18)$$

$$\sin \lambda = V \sin l \quad \cos \lambda = \cos l \quad (19)$$

Aus (16) und (17) bilden wir auch noch:

$$d\sigma = \frac{V}{c\sqrt{1-e^2}} ds \quad d\lambda = V dl \quad (20)$$

Die hier mehrfach vorkommende Funktion V , welche wie immer die Bedeutung $= \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$ hat, soll sich auf die *Mittelbreite* φ beziehen, und entsprechend sollen V_1 und V_2 zu den Breiten φ_1 und φ_2 gehören.

Indem wir betreffs der zwei Gleichungen (20) noch eine Bemerkung vorbehalten (bei (29)–(31)), führen wir nun alle Änderungen (14)–(20) in (8)–(13) ein, und erhalten dadurch:

$$ds = -\frac{c \cos \alpha_1}{V} \frac{d\varphi_1}{V_1^2} + \frac{c \cos \alpha_2}{V} \frac{d\varphi_2}{V_2^2} + \frac{c}{V_2} \sin \alpha_2 \cos \varphi_2 dl \quad (21)$$

$$d\alpha_1 = \sin \alpha_1 \frac{\cos S}{\sin S} \frac{d\varphi_1}{V_1^2} - \frac{\sin \alpha_2}{\sin S} \frac{d\varphi_2}{V_2^2} + \frac{\cos \varphi_2 \cos \alpha_2}{\sin S} \frac{V}{V_2} dl \quad (22)$$

$$d\alpha_2 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin S} \frac{d\varphi_1}{V_1^2} - \sin \alpha_2 \frac{\cos S}{\sin S} \frac{d\varphi_2}{V_2^2} + \frac{\cos \varphi_1 \cos \alpha_1}{\sin S} \frac{V}{V_1} dl \quad (23)$$

*) Wenn man die Formeln (11), (12), (13), welche wir nachher brauchen, auf dem kürzesten Wege finden will, so wird wohl die bei (11a) angedeutete Herleitung am meisten zu empfehlen sein. Indessen schien es nicht unpassend, diese sphärischen Differential-Formeln (welche ähnlich teilweise auch bei der Theorie der Mond-Distanzen auftreten) von verschiedenen Seiten zu betrachten, bzw. die auf einem Wege erhaltene Ableitung auf anderem Wege zu kontrollieren. Der Umweg über (8), (9), (10) entspricht *Helmert*, „Höhere Geodäsie, I.“, S. 282.

$$d\varphi_2 = V_2^2 \cos l \frac{d\varphi_1}{V_1^2} + V_2^2 V \cos \alpha_2 \frac{ds}{c} - V_2^2 \sin \alpha_2 \sin S d\alpha_1 \quad (24)$$

$$dl = \sin l \tan \varphi_2 \frac{d\varphi_1}{V_1^2} + V_2 \frac{\sin \alpha_2}{\cos \varphi_2} \frac{ds}{c} + V_2 \frac{\cos \alpha_2}{\cos \varphi_2} \sin S d\alpha_1 \quad (25)$$

$$d\alpha_2 = V V_2 \sin l \sec \varphi_2 \frac{d\varphi_1}{V_1^2} + V \sin \alpha_2 \tan \varphi_2 \frac{ds}{c} + \cos l \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} d\alpha_1 \quad (26)$$

Ehe wir weiter gehen, wollen wir diese Gleichungen kontrollieren durch unmittelbares Ableiten der Reihen-Entwicklungen (25*), (26*), (27*) S. 390. Z. B. die erste Reihe (25*) ausführlich geschrieben, giebt in den ersten Gliedern:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = V_1^3 \frac{s}{c} \cos \alpha_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{s}{c} \right)^2 V_1^4 \sin^2 \alpha_1 \tan \varphi_1 + \dots$$

Wenn man dieses nach φ_1 ableitet, so findet man nach (13) S. 388, und im zweiten Gliede genähert mit S :

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = 1 - 3\eta_1^2 \frac{s}{c} V_1 \cos \alpha_1 - \frac{1}{2} S^2 \sin^2 \alpha_1 (1 + t_1^2) \quad (27)$$

Nun ist:

$$V_1^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi_1 \quad V_2^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi_2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = 1 - \eta^2 (\varphi_2 - \varphi_1) \quad t = 1 - \eta^2 S \cos \alpha \quad (28)$$

Auch kann man $S^2 \sin^2 \alpha (1 + t^2) = t^2$ setzen, wodurch man (27) so umformen kann:

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \left(1 - \frac{t^2}{2} \right) (1 - 3\eta^2 S \cos \alpha t) = \cos t \frac{V_2^3}{V_1^3} \quad (29)$$

Dieses stimmt in Bezug auf V_2 und V_1 nicht genau mit dem ersten Gliede von (24), indem die V_2 und V_1 in anderen Potenzen auftreten. Der Grund dieser Abweichung liegt in den Gleichungen (20), welche insofern nicht richtig sind, als dabei der Faktor V als konstant behandelt wird, während doch $V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$ eine Funktion von φ ist.

Wir wollen deshalb nun genauer so rechnen:

$$\sigma = \frac{s}{c} \frac{V}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$d\sigma = \frac{ds}{c} \frac{V}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{s}{c} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{dV}{d\varphi} d\varphi, \text{ also genähert:}$$

$$d\sigma = \frac{ds}{c} \frac{V}{\sqrt{1-e^2}} - \eta^2 t S d\varphi \quad (30)$$

Setzen wir dieses in (11) ein, so erhalten wir:

$$d\psi_2 = \cos \lambda d\psi_1 - \eta^2 t S \cos \alpha_2 d\varphi + ds \cos \alpha_2 \dots$$

Das Glied mit ds interessiert uns hier nicht, wir lassen es beim Übergang zum Ellipsoid fort und erhalten (immer nur auf η^2 einschliesslich genau):

$$\frac{d\varphi_2}{V_2^2} = \cos l \frac{d\varphi_1}{V_1^2} - \eta^2 t S \cos \alpha \frac{d\varphi_1}{2} + \frac{d\varphi_2}{2} \quad (31)$$

Dabei ist im letzten Glied schlechthin α statt α_2 als Näherung geschrieben und für $d\varphi$ das Mittel aus $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ eingesetzt. Dieses (31) kann man wegen (28) auf die Form (29) bringen.

Der zweite Ausdruck in (29) mit dem Quotienten $V_2^3:V_1^3$ ist also nun auf zweifachem Wege bestätigt, an Stelle des weniger genauen Quotienten $V_2^2:V_1^2$ im ersten Gliede von (24).

Wir wollen in gleichem Sinne auch die Gleichung (8) genauer behandeln. Aus (8), (14) und (30) haben wir:

$$\frac{ds}{c} \frac{V}{\sqrt{1-e^2}} - \eta^2 t S d\varphi = - \frac{d\varphi_1}{V_1^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cos \alpha_1$$

Der hier zunächst unbestimmt eingesetzte Wert $d\varphi$ in dem Gliede mit η^2 muss nun gesetzt werden:

$$d\varphi = - \frac{ds \cos \alpha_1}{c} \frac{1}{2}$$

und zwar deswegen, weil $d\varphi$ als Änderung der *Mittelbreite* die Hälfte derjenigen Breitenänderung sein muss, welche der Änderung ds entspricht. Damit giebt (28):

$$\frac{ds}{c} V \left(1 + \frac{\eta^2}{2} \frac{s}{c} \cos \alpha_1 t \right) = - \frac{d\varphi_1}{V_1^2} \cos \alpha_1 + \dots$$

Nun ist aber:

$$1 + \frac{\eta^2}{2} \frac{s}{c} \cos \alpha_1 t = \frac{V_1}{V}$$

und damit wird:

$$ds = -c \frac{d\varphi_1}{V_1^3} \cos \alpha_1 + \dots$$

Dieses ist der Anfang der verbesserten Gleichung (21) und die ganze Gleichung giebt in gleicher Weise verbessert:

$$ds = -c \cos \alpha_1 \frac{d\varphi_1}{V_1^3} + c \cos \alpha_2 \frac{d\varphi_2}{V_2^3} + \frac{c}{V_2} \sin \alpha_2 \cos \varphi_2 l \quad (32)$$

Nachdem wir an diesen beiden Beispielen (31) und (32) gezeigt haben, dass man die Gleichungen (21)–(26), welche in Bezug auf die Glieder von der Ordnung $\eta^2 S$ noch nicht streng richtig sind, durch Berücksichtigung der von der Breite abhängigen Änderungen von σ und λ schärfer machen kann, und da man ausserdem das einfache Hilfsmittel hat, die Glieder von der Ordnung $\eta^2 S$ durch Differenzieren der Reihen (25*), (26*), (27*) S. 390 nötigenfalls zu entwickeln, bzw. zu kontrollieren, wollen wir jetzt umgekehrt die Gleichungen (21)–(26) *vereinfachen*.

Diese Gleichungen sind in der Form (21)–(26) nicht konsequent, wegen der Vernachlässigung des Einflusses von $d\varphi$ auf den Reduktionsfaktor V ; indessen bei Lotabweichungs-Berechnungen ist es überhaupt auch sachlich zweifelhaft, welche Breitenwerte φ zur Berechnung der Coefficienten angewendet werden sollen, die *astronomisch* gemessenen Polhöhen φ' oder die *geodätisch* übertragenen, zu einem rein hypothetischen Ellipsoid gehörigen Breiten φ .

Mit Rücksicht hierauf, und überhaupt für solche Fälle, in welchen die Glieder von der Ordnung $\eta^2 S$ schon aus anderen Gründen vernachlässigt werden können, schreiben wir nun die hauptsächlich gebrauchten Gleichungen (24)–(26) von nun an ohne Unterscheidung der verschiedenen V_1 , V , V_2 , indem dann V schlechthin als zur Mittelbreite φ gehörig genommen wird. (Man beachte, dass das Korrektionsglied in (30), welches von der Ordnung $\eta^2 S d\varphi$ ist, in den Coefficienten von (24)–(26) Änderungen von der Ordnung $\eta^2 S$ erzeugt, welche einer Verwechslung zwischen V_1 , V und V_2 entsprechen.)

Zugleich wollen wir den Längenunterschied l als Differenz $L_2 - L_1$ zweier absoluter Längen L_1 und L_2 darstellen, wie in Fig. 2. unten angedeutet ist, welche zugleich auch die übrigen Zeichen φ_1 , φ_2 , α_1 , α_2 , s , für das Ellipsoid gültig, darstellt, im Gegensatz zu der früheren sphärischen Fig. 1. S. 539.

Damit erhalten wir aus (24) — (26), in Bezug auf V vereinfacht:

$$d\varphi_2 = \cos l \, d\varphi_1 + V^3 \cos \alpha_2 \frac{ds}{c} - V^2 \sin \alpha_2 \sin S \, d\alpha_1 \quad (33)$$

$$dL_2 = dL_1 + \frac{\sin l \sin \varphi_2}{V^2 \cos \varphi_2} d\varphi_1 + V \frac{\sin \alpha_2}{\cos \varphi_2} \frac{ds}{c} + V \frac{\cos \alpha_2}{\cos \varphi_2} \sin S \, d\alpha_1 \quad (34)$$

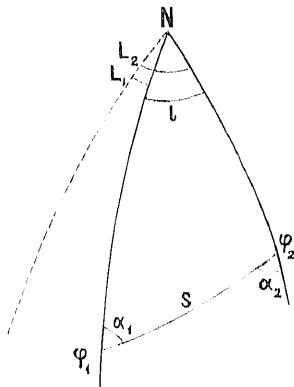
$$d\alpha_2 = \frac{\sin l}{\cos \varphi_2} d\varphi_1 + V \frac{\sin \alpha_2 \sin \varphi_2}{\cos \varphi_2} \frac{ds}{c} + \cos \varphi_1 \cos l \, d\alpha_1 \quad (35)$$

Wenn man hier $ds = 0$ setzt, d. h. wenn man die lineare Grösse der geodätischen Linie als fehlerfrei annimmt; wenn man ferner S und l beide als *klein* annimmt, so dass $\sin S = 0$, $\sin l = 0$, $\cos l = 1$ wird, so bleibt von den drei Gleichungen (33), (34), (35) nichts mehr übrig als:

$$d\varphi_2 = d\varphi_1, \quad dL_2 = dL_1, \quad d\alpha_2 = d\alpha_1$$

d. h. auf sehr *kurze* Entfernung tragen sich $d\varphi_1$, dL_1 und $d\alpha_1$ in ihrer eigenen Grösse über, und die anderen Einflüsse verschwinden; oder allgemeiner: die Übertragungen von $d\varphi_1$, dL_1 , $d\alpha_1$ auf die ungleichnamigen Elemente (z. B. $d\varphi_1$ auf dL_2 u. s. w.) sind nur Grössen zweiter Ordnung im Vergleich mit den Übertragungen auf die gleichnamigen Grössen (z. B. $d\varphi_1$ auf $d\varphi_2$ u. s. w.).

Fig. 2.
Ellipsoid.



§ 112. Ausgleichung eines astronomisch-geodätischen Netzes und Bestimmung der Lotabweichungen.*)

Die im vorigen § 111. entwickelten Differential-Formeln wollen wir nun weiter benutzen, und hiezu die Formeln (33), (34), (35) (s. oben) in allgemeiner Form so schreiben:

$$d\varphi_2 = p_1 d\varphi_1 + p_2 ds + p_3 d\alpha_1 \quad (1)$$

$$\cos \varphi_2 dL_2 = \cos \varphi_2 dL_1 + q_1 d\varphi_1 + q_2 ds + q_3 d\alpha_1 \quad (2)$$

$$\cotg \varphi_2 d\alpha_2 = r_1 d\varphi_1 + r_2 ds + r_3 d\alpha_1 \quad (3)$$

*) In diesem Schluss-Paragraphen bringen wir die Grundgedanken der *Helmert'schen* Theorien zur Darstellung, welche enthalten sind in der „Veröffentlichung des königl. Preussischen Geodätischen Instituts, Lotabweichungen. Heft I. Berlin 1886“.

Zur Vergleichung der Bezeichnungen sei bemerkt, dass wir, wie gewöhnlich, die Breiten mit φ und die Azimute mit α bezeichnen, während die Veröffentlichung des geodätischen Instituts für die Breiten B und für die Azimute T genommen hat.

Unsere Gleichungen (1), (2), (3) mit den Coefficienten (4), (5), (6) entsprechen den Gleichungen von *Helmert*, „Höhere Geodäsie, I.“ (7), (8), (9), S. 282 — 283 oder der „Veröffentl. d. Geod. Inst., Lotabweichungen, 1886“, (8) S. 5., mit dem Coefficienten (1) S. 8.

Die Bedeutung der Coëfficienten p, q, r ist bestimmt durch die Vergleichung dieser Gleichungen (1), (2), (3) mit den früheren Gleichungen (33), (34), (35) § 111. S. 545, nämlich:

$$p_1 = \cos l \qquad p_2 = \frac{V^3}{c} \cos \alpha_2 \qquad p_3 = -V^2 \sin \alpha_2 \sin S \qquad (4)$$

$$q_1 = \frac{\sin l}{V^2} \sin \varphi_2 \qquad q_2 = \frac{V}{c} \sin \alpha_2 \qquad q_3 = V \cos \alpha_2 \sin S \qquad (5)$$

$$r_1 = \frac{\sin l}{\sin \varphi_2} \qquad r_2 = \frac{V}{c} \sin \alpha_2 \qquad r_3 = \frac{\cos \varphi_1}{\sin \varphi_2} \cos l \qquad (6)$$

Dabei ist $V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$ die Funktion, welche in unserem Anhang durch die Tabellen Seite [2]—[23] und Seite [46]—[47] gegeben wird, und S ist nach (10) S. 415 und (22) S. 389 die Reduktion der geodätischen Linie s auf den Quer-Krümmungshalbmesser N der Mittelbreite φ , d. h. $S = \frac{s}{N} = \frac{s}{c} V$.

Nun wollen wir dazu übergehen, den Differentialen $d\varphi_1, d\varphi_2, dL_1$ u. s. w. die Bedeutung theils von Lotabweichungen, theils von Beobachtungs-Fehlern unterzulegen, und dazu sollen für alle geodätisch oder astronomisch gemessenen Grössen solche Näherungswerte eingeführt werden, welche innerhalb der Beobachtungs-Fehler oder Lotabweichungs Beträge willkürlich, im übrigen aber so gewählt sind, dass sie unter sich und mit den Dimensionen des benützten Vergleichs-Ellipsoids in aller Rechenschärfe übereinstimmen. Ein solches System von Näherungswerten wird z. B. erhalten, wenn man die Breiten und Längen der Endpunkte einer geodätischen Linie willkürlich annimmt und dann die Entfernung, die Azimute und den Längenunterschied nach § 79. oder § 83. berechnet. Oder kurz, man verfährt in ähnlicher Weise, wie bei der Coordinaten-Ausgleichung von Dreiecksnetzen (vgl. z. B. Band I. § 65.). Das erwähnte System von Näherungswerten werde mit φ_1, φ_2 u. s. w. bezeichnet, während die Beobachtungswerte mit φ'_1, φ'_2 u. s. w. bezeichnet seien, d. h. im ganzen:

$$\text{Beobachtungen: } \varphi'_1 \quad \varphi'_2 \quad L'_1 \quad L'_2 \quad \alpha'_1 \quad \alpha'_2 \quad s' \qquad (7)$$

$$\text{Näherungswerte: } \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad L_1 \quad L_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad s \qquad (8)$$

Wegen der Beobachtungs-Fehler, d. h. infolge der Ausgleichung, werden an den Beobachtungen angebracht die

$$\text{Verbesserungen: } \delta\varphi'_1 \quad \delta\varphi'_2 \quad \delta L'_1 \quad \delta L'_2 \quad \delta\alpha'_1 \quad \delta\alpha'_2 \quad \delta s' \qquad (9)$$

Hiezu werden nachher noch die Verbesserungen v_1 und v_2 für geodätische Azimut-Übertragung kommen.

Die beiden Endpunkte der betrachteten geodätischen Linie haben:

$$\text{Lotabweichungen: } \xi_1 \quad \eta_1 \quad \xi_2 \quad \eta_2 \qquad (10)$$

Wenn wir noch festsetzen, dass allgemein mit $d\varphi_1, d\varphi_2, dL_1$ u. s. w. diejenigen Änderungen bezeichnet sein sollen, welche man an den Näherungswerten φ_1, φ_2 u. s. w. anbringen muss, um sie mit der Ausgleichung in Übereinstimmung zu bringen, so können wir zur Aufstellung der Bedingungs-Gleichungen übergehen. Zuerst haben wir für die Breiten:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 + d\varphi_1 &= \varphi'_1 + \delta\varphi'_1 - \xi_1 \\ \varphi_2 + d\varphi_2 &= \varphi'_2 + \delta\varphi'_2 - \xi_1 \end{aligned} \right\} \qquad (11)$$

Auch die Bedingungs-Gleichungen für die Längen erhält man leicht, wenn man nur bedenkt, dass die Quer-Lotabweichungen η_1 und η_2 nach (17) § 109. S. 532, auf die Längen die Einflüsse $\eta_1 \sec \varphi_1$ und $\eta_2 \sec \varphi_2$ geben. Man hat also:

$$\left. \begin{aligned} L_1 + dL_1 &= L'_1 + \delta L'_1 - \eta_1 \sec \varphi_1 \\ L_2 + dL_2 &= L'_1 + \delta L'_2 - \eta_2 \sec \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Bei den Azimuten ist ausser den Verbesserungen $\delta \alpha_1$ und $\delta \alpha_2$ die schon bei (9) angegeben wurden, noch eine weitere Verbesserung zuzufügen. Die $\delta \alpha_1$ und $\delta \alpha_2$ beziehen sich nämlich lediglich auf die *astronomische* Azimutmessung, und wenn etwa diese astronomischen Messungen geradezu *gegenseitig* wären, d. h. wenn die geodätische Linie s , die wir betrachten, einfach *eine* Dreiecksseite wäre, die als Sicht hin und her bei den astronomischen Azimutmessungen diene, dann wäre ausser den $\delta \alpha_1$ und $\delta \alpha_2$ nichts weiter nötig.

Wenn aber, wie gewöhnlich, die geodätische Linie s , an deren Endpunkten die beiden Azimute α_1 und α_2 gemessen sind, selbst aus einer langen Dreieckskette geodätisch abgeleitet ist (vgl. Fig. 2. S. 383), so ist für die Ungenauigkeiten der dabei vorkommenden geodätischen Azimut-Übertragung in der Ausgleichung ein Spielraum zu lassen, welcher durch zwei Verbesserungen v_1 und v_2 ausgedrückt werden soll. Es würde zwar genügen, die Verbesserung der Azimut-Übertragung längs der ganzen Linie durch *eine* Unbekannte v auszudrücken, allein es hindert nichts, dieselbe in der Form einer *Differenz* $v_2 - v_1$ einzuführen, was aus formellen Gründen vorzuziehen ist.

Legen wir also der Azimut-Verbesserung im ersten Punkte noch die geodätische Verbesserung v_1 , und im zweiten Punkte entsprechend v_2 zu, und bedenken, dass die Lotabweichungen η_1 und η_2 mit den Beträgen $\eta_1 \tan \varphi_1$ und $\eta_2 \tan \varphi_2$ auf die Azimute einwirken, so erhalten wir die beiden Bedingungs-Gleichungen für die Azimute:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha}_1 + d\alpha_1 &= \alpha'_1 + \delta \alpha'_1 + v_1 - \eta_1 \tan \varphi_1 \\ \bar{\alpha}_2 + d\alpha_2 &= \alpha'_2 + \delta \alpha'_2 + v_2 - \eta_2 \tan \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Endlich haben wir noch eine Bedingungs-Gleichung für die geodätische Linie selbst, nämlich:

$$\bar{s} + ds = s' + \delta s' \quad (14)$$

Nun sollen die Gleichungen (11) — (14) in die Differential-Formeln (1), (2), (3) eingesetzt werden, und dabei kann man auch statt der Quer-Lotabweichungen η_1 und η_2 deren Werte in Länge setzen, d. h. man kann neue Unbekannte einführen:

$$\eta_1 \sec \varphi_1 = \lambda_1 \quad \eta_2 \sec \varphi_2 = \lambda_2 \quad (15)$$

Alle diese Substitutionen gehen ohne Schwierigkeit vor sich, da man es nur mit *linearen* Gleichungen zu thun hat.

Da wir von der weiteren Behandlung der Aufgabe nur noch den Grundgedanken angeben wollen, mag es genügen, einzusehen, dass die beschriebenen Substitutionen zu drei neuen linearen Gleichungen führen von folgender Form:

$$\xi_2 = f_1(\xi_1, \lambda_1, \delta \varphi_1, \delta \varphi_2, \delta \alpha_1, v_1, \delta s) \quad (16)$$

$$\lambda_2 = f_2(\xi_1, \lambda_1, \delta \varphi_1, \delta L_1, \delta L_2, \delta \alpha_1, v_1, \delta s) \quad (17)$$

$$\lambda_2 = f_3(\xi_1, \lambda_1, \delta \varphi_1, \delta \alpha_1, \delta \alpha_2, v_1, v_2, \delta s) \quad (18)$$

Wenn man die beiden letzten Gleichungen subtrahiert, so fallen die δs fort (weil in den Gleichungen (2) und (3) die Coefficienten q_2 und r_2 einander gleich sind), und dadurch erhält man eine neue Gleichung, in welcher λ_2 eliminiert ist, nämlich:

$$0 = f_4(\xi_1, \lambda_1, \delta \varphi_1, \delta L_1, \delta L_2, \delta \alpha_1, \delta \alpha_2, v_1, v_2) \quad (19)$$

Dieses ist die von *Helmert* „erweiterte Laplace'sche Gleichung“.

Diese Gleichung hat die wertvolle Eigenschaft, dass die beiden Lotabweichungs-Komponenten ξ_2 und η_2 (bzw. ξ_2 und λ_2) *eliminiert* sind.

Allerdings ξ_1 und λ_1 sind noch in der Gleichung vorhanden, allein diese Lotabweichungs-Komponenten sind insofern unschädlich, als Lotabweichungen nur *relativ* aufzufassen sind; d. h. bezogen auf einen Ausgangspunkt, dessen Lotabweichung ξ_1 , λ_1 man häufig schlechthin gleich Null setzt, oder die man einem grösseren System entsprechend als Mittelwert annehmen kann. Diese Lotabweichung ξ_1 , λ_1 des Ausgangspunktes spielt dieselbe Rolle, wie die bekannten Nullpunkts-Korrekturen bei Richtungs-Ausgleichungen.

Die hohe geodätische Bedeutung der *Laplace*schen Gleichung (19) besteht nun darin, dass dadurch für eine geodätische Linie, welche geodätisch und astronomisch vollständig nach Breiten, Längen und Azimuten gemessen ist, bei der heutigen Feinheit, namentlich der telegraphischen Zeitübertragung für astronomische Längen, eine Bedingungs-Gleichung geliefert wird, *welche von den Lotabweichungen unabhängig ist*, und den übrigen rein geodätischen Bedingungs-Gleichungen (Geodätischer Excess, Seiten-Gleichungen) *gleichberechtigt* ist.

Damit ist auch der Grundgedanke zur Ausgleichung eines astronomisch-geodätischen Netzes Fig. 1. S. 193 klar gemacht.

Für jede geodätische Verbindung zwischen zwei astronomischen Knotenpunkten wird eine *Laplace*sche Gleichung gebildet; die ξ_1 , λ_1 von (19) werden dabei successive eliminiert und alle auf *einen* Zentralpunkt (Rauenberg bei Berlin) bezogen.

Wenn ein *geschlossenes* Polygon vorhanden ist, so giebt dieses noch 3 rein geodätische Gleichungen hinzu, und alle diese Bedingungs-Gleichungen werden zusammen nach Correlaten ausgeglichen, wie ein rein trigonometrisches Netz.

Z. B. das astronomisch-geodätische Netz Fig. 1. S. 193 hat 39 geodätische Linien und 13 Polygonschlüsse; es würde also zu einer Ausgleichung in der beschriebenen Weise $39 + 3 \times 13 = 78$ Bedingungs-Gleichungen geben.

Um den ganzen Gang einer solchen Ausgleichung zu verstehen, muss man noch wissen, wie die *Gewichtsverhältnisse* der auszugleichenden Elemente zu bemessen sind.

Die mittleren Fehler, bzw. Gewichte der astronomischen Messungen, Breiten, Azimute und Längen, müssen aus dem Messungsverfahren selbst a priori ermittelt werden.

Ähnlich verhält es sich auch mit den geodätischen Messungen, nämlich mit den geodätischen Linien s und ihren Azimut-Übertragungen, doch ist hier die Genauigkeits- bzw. Gewichtsschätzung nicht so einfach wie bei den astronomischen Messungen.

Es kommen hier Gewichts-Bestimmungen in Betracht wie diejenigen, welche wir auf S. 191 in der Tabelle der „mittleren Fehler von Polar-Coordinationen“ von den Triangulierungen der Landes-Aufnahme zusammengestellt haben. Wenn hier im Durchschnitt für eine Diagonale $D = 133\,000^m$ der mittlere Fehler von D im Logarithmus $= \pm 9.5$ und der mittlere Fehler der Azimut-Übertragung $= \pm 0.57''$ angegeben ist, so heisst das für die Ausgleichung nach *Laplace*schen Gleichungen (19), dass für die Differenz $v_1 - v_2$ der mittlere Fehler $= \pm 0.57''$ sei, dass also v_1 und v_2 etwa beide mit Gewichten einzuführen sind, welche proportional $\frac{2}{0.57^2}$ sind.

Die Gewichte für die linearen Entfernungen s (entsprechend dem obigen $d \log D = \pm 9.5$) braucht man zu den *Laplace*schen Gleichungen nicht, sondern nur zu den Polygon-Gleichungen.

Das Sicherste für solche Gewichts-Bestimmungen wird sein, wenn man für jede Triangulierungskette, im Anschluss an ihre eigene Ausgleichung, die Gewichte formell streng berechnet, so wie für 5 Ketten der Landes-Aufnahme auf S. 191 angegeben ist (mit Rücksicht auf das Verhältnis $\mu_2 : \mu_1$ nach S. 182—183). Wenn solche Gewichts-Berechnungen nicht vorliegen, und auch nicht nachgeholt werden können, so müssen allgemeine Schätzungen nach schematischen Netzen eintreten, nach unserem § 20. oder nach der Abhandlung von *Simon*, welche wir auf S. 191 unten zitiert haben.

Nach der Ausgleichung bestimmt man die Lotabweichungs-Komponenten ξ_2, λ_2 aus den Gleichungen (16), (17) und (18), und zwar λ_2 doppelt.

Mit einer solchen Ausgleichung kann man auch noch eine Bestimmung der Erddimensionen bzw. eine Verbesserung der Annahmen c und e'^2 (oder a und e^2) verbinden, indem man in die Bedingungs-Gleichungen noch je zwei Glieder von der Form dc und de'^2 aufnimmt, die man durch Differenzieren nach § 107. findet.

Anhang.

Hilfstafeln.

	Seite
1. Die Hauptkrümmungs-Halbmesser M und N des Umdrehungs-Ellipsoids, und Funktionen derselben	[2]—[23]
2. Längengrade, Breitengrade und Gradabteilungsflächen	[24]—[25]
3. Meridianbogen vom Äquator bis zur Breite φ	[26]
4. Breitenunterschied und Meridianbogen (Näherungswerte)	[27]
5. Parallelkreisbögen (Näherungswerte)	[28]
6. Breiten-, Längen- u. Flächen-Masse der Messtisch-Trapeze der Preussischen Landes-Aufnahme	[29]
7. Additamente für $\log \sin \frac{s}{r}$	[30]
8. Verwandlung des Bogens in Zeit und umgekehrt	[31]
9. Näherungswerte für Berechnungen mit <i>Soldnerschen</i> Coordinaten	[32]
10. Näherungswerte für Berechnungen mit <i>Gauss'schen</i> konformen Coordinaten	[33]
11. Coëfficienten verschiedener geodätischer Formeln	[34]—[37]
12. Coëfficienten der sphäroidischen Mittelbreiten-Formeln	[38]—[39]
13. Reduzierte Breite ψ	[40]
14. Reduzierte Längen der <i>Gauss'schen</i> konformen Kugel-Abbildung	[41]
15. <i>Gauss'sche</i> konforme Kugel-Abbildung, u , $\log m$, k	[42]—[43]
16. Coëfficienten der neuen Auflösung der geodätischen Hauptaufgabe	[44]—[45]
17. 10stellige Werte der Funktion $\log V = \log \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$	[46]—[47]

φ	$\log M$	A	$\log N$	A	$\log r$	A	$\log \frac{1}{r^2}$	A
	6.801	+	6.804	+	6.803	+	— 20	—
0° 0'	7351·0	0·4	6434·6	0·2	1892·8	0·3	6.393 621	0
10	7351·4	1·1	6434·8	0·3	1893·1	0·7	621	0
20	7352·5	1·9	6435·1	0·6	1893·8	1·2	621	0
30	7354·4	2·5	6435·7	0·9	1895·0	1·8	621	0
40	7356·9	3·3	6436·6	1·1	1896·8	2·2	621	1
50	7360·2	4·1	6437·7	1·4	1899·0	2·7	620	0
1° 0'	7364·3	4·8	6439·1	1·5	1901·7	3·2	6.393 620	1
10	7369·1	5·5	6440·6	1·9	1904·9	3·6	619	1
20	7374·6	6·2	6442·5	2·1	1908·5	4·2	618	1
30	7380·8	7·0	6444·6	2·3	1912·7	4·7	617	0
40	7387·8	7·7	6446·9	2·6	1917·4	5·1	617	0
50	7395·5	8·5	6449·5	2·8	1922·5	5·6	617	2
2° 0'	7404·0	9·2	6452·3	3·1	1928·1	6·2	6.393 615	2
10	7413·2	9·9	6455·4	3·3	1934·3	6·6	613	1
20	7423·1	10·7	6458·7	3·5	1940·9	7·1	612	2
30	7433·8	11·4	6462·2	3·8	1948·0	7·6	610	1
40	7445·2	12·1	6466·0	4·1	1955·6	8·1	609	2
50	7457·3	12·8	6470·1	4·2	1963·7	8·5	607	1
3° 0'	7470·1	13·6	6474·3	4·6	1972·2	9·1	6.393 606	2
10	7483·7	14·3	6478·9	4·7	1981·3	9·5	604	2
20	7498·0	15·1	6483·6	5·1	1990·8	10·1	602	2
30	7513·1	15·8	6488·7	5·2	2000·9	10·5	600	2
40	7528·9	16·5	6493·9	5·5	2011·4	11·0	598	2
50	7545·4	17·2	6499·4	5·8	2022·4	11·5	596	3
4° 0'	7562·6	18·0	6505·2	6·0	2033·9	12·0	6.393 593	2
10	7580·6	18·7	6511·2	6·2	2045·0	12·4	591	3
20	7599·3	19·4	6517·4	6·5	2058·3	13·0	588	2
30	7618·7	20·1	6523·9	6·7	2071·3	13·4	586	3
40	7638·8	20·9	6530·6	6·9	2084·7	13·9	583	3
50	7659·7	21·6	6537·5	7·2	2098·6	14·4	580	3
5° 0'	7681·3	22·4	6544·7	7·5	2113·0	14·9	6.393 577	3
10	7703·7	23·0	6552·2	7·7	2127·9	15·4	574	3
20	7726·7	23·8	6559·9	7·9	2143·3	15·8	571	3
30	7750·5	24·5	6567·8	8·1	2159·1	16·4	568	3
40	7775·0	25·2	6575·9	8·5	2175·5	16·8	565	3
50	7800·2	25·9	6584·4	8·6	2192·3	17·3	562	4
6° 0'	7826·1	26·7	6593·0	8·9	2209·6	17·7	6.393 558	3
10	7852·8	27·4	6601·9	9·1	2227·3	18·3	555	4
20	7880·2	28·1	6611·0	9·4	2245·6	18·7	551	4
30	7908·3	28·8	6620·4	9·6	2264·3	19·2	547	4
40	7937·1	29·5	6630·0	9·8	2283·5	19·7	543	4
50	7966·6	30·2	6639·8	10·1	2303·2	20·2	539	4
7° 0'	7996·8	31·0	6649·9	10·3	2323·4	20·6	6.393 535	4
10	8027·8	31·7	6660·2	10·6	2344·0	21·1	531	4
20	8059·5	32·3	6670·8	10·8	2365·1	21·6	527	4
30	8091·8	33·1	6681·6	11·0	2386·7	22·1	523	5
40	8124·9	33·8	6692·6	11·3	2408·8	22·5	518	4
50	8158·7	34·5	6703·9	11·5	2431·3	23·0	514	5
8° 0'	8193·2		6715·4		2454·3		509	

φ	$\log W$	Δ	$\log [1]$	Δ	$\log [2]$	Δ	$\log V^2$	Δ
	9.999 — 10	—	8.512 — 10	—	8.509 — 10	—	0.002	—
0° 0'	*0000.0	—	6900.3	—	7816.7	—	9083.6	—
10	9999.9	0.1	6899.9	0.4	7816.6	0.1	9083.4	0.2
20	9999.5	0.4	6898.8	1.1	7816.2	0.4	9082.6	0.8
30	9998.9	0.6	6897.0	1.8	7815.6	0.6	9081.4	1.2
40	9998.0	0.9	6894.4	2.6	7814.7	0.9	9079.7	1.7
50	9996.9	1.1	6891.7	3.3	7813.6	1.1	9077.5	2.2
		1.3		4.0		1.3		2.7
1° 0'	9995.6	1.6	6887.1	4.8	7812.3	1.6	9074.8	3.2
10	9994.0	1.8	6882.3	5.6	7810.7	1.9	9071.6	3.7
20	9992.2	2.1	6876.7	6.2	7808.8	2.0	9067.9	4.2
30	9990.1	2.4	6870.5	7.0	7806.8	2.4	9063.7	4.6
40	9987.7	2.5	6863.5	7.7	7804.4	2.5	9059.1	5.2
50	9985.2	2.9	6855.8	8.5	7801.9	2.9	9053.9	5.6
2° 0'	9982.3	3.0	6847.3	9.2	7799.0	3.0	9048.3	6.1
10	9979.3	3.3	6838.1	9.9	7796.0	3.3	9042.2	6.7
20	9976.0	3.6	6828.2	10.6	7792.7	3.6	9035.5	7.1
30	9972.4	3.8	6817.6	11.4	7789.1	3.8	9028.4	7.5
40	9968.6	4.0	6806.2	12.1	7785.3	4.0	9020.9	8.1
50	9964.6	4.3	6794.1	12.9	7781.3	4.3	9012.8	8.6
3° 0'	9960.3	4.5	6781.2	13.6	7777.0	4.5	9004.2	9.1
10	9955.8	4.8	6767.6	14.3	7772.5	4.8	8995.1	9.5
20	9951.0	5.0	6753.3	15.1	7767.7	5.0	8985.6	10.0
30	9946.0	5.3	6738.2	15.7	7762.7	5.3	8975.6	10.5
40	9940.7	5.5	6722.5	16.5	7757.4	5.5	8965.1	11.0
50	9935.2	5.7	6706.0	17.3	7751.9	5.7	8954.1	11.5
4° 0'	9929.5	6.0	6688.7	18.0	7746.2	6.0	8942.6	11.9
10	9923.5	6.2	6670.7	18.6	7740.2	6.3	8930.7	12.5
20	9917.3	6.5	6652.1	19.5	7733.9	6.4	8918.2	12.9
30	9910.8	6.7	6632.6	20.1	7727.5	6.7	8905.3	13.5
40	9904.1	7.0	6612.5	20.9	7720.8	7.0	8891.8	13.9
50	9897.1	7.2	6591.6	21.6	7713.8	7.2	8877.9	14.4
5° 0'	9889.9	7.4	6570.0	22.3	7706.6	7.4	8863.5	14.9
10	9882.5	7.7	6547.7	23.1	7699.2	7.7	8848.6	15.3
20	9874.8	7.9	6524.6	23.7	7691.5	7.9	8833.3	15.9
30	9866.9	8.2	6500.9	24.5	7683.6	8.2	8817.4	16.3
40	9858.7	8.4	6476.4	25.3	7675.4	8.4	8801.1	16.8
50	9850.3	8.7	6451.1	25.9	7667.0	8.7	8784.3	17.3
6° 0'	9841.6	8.8	6425.2	26.7	7658.3	8.9	8766.9	17.8
10	9832.8	9.2	6398.5	27.3	7649.4	9.1	8749.1	18.3
20	9823.6	9.3	6371.2	28.1	7640.3	9.3	8730.8	18.7
30	9814.3	9.6	6343.1	28.8	7631.0	9.6	8712.1	19.2
40	9804.7	9.9	6314.3	29.6	7621.4	9.9	8692.9	19.7
50	9794.8	10.1	6284.7	30.2	7611.5	10.1	8673.2	20.1
7° 0'	9784.7	10.3	6254.5	31.0	7601.4	10.3	8653.1	20.7
10	9774.4	10.5	6223.5	31.6	7591.1	10.5	8632.4	21.1
20	9763.9	10.8	6191.9	32.4	7580.6	10.8	8611.3	21.6
30	9753.1	11.1	6159.5	33.1	7569.8	11.1	8589.2	22.0
40	9742.0	11.2	6126.4	33.8	7558.7	11.2	8567.7	22.6
50	9730.8	11.5	6092.6	34.5	7547.5	11.5	8545.1	23.0
8° 0'	9719.3		6058.1		7536.0		8522.1	

φ	$\log M$	Δ	$\log N$	Δ	$\log r$	Δ	$\log \frac{1}{r^2}$	Δ
	6.801	+	6.804	+	6.803	+	— 20	—
8° 0'	8193.2	35.3	6715.4	11.7	2454.3	23.5	6.393 509	5
10	8228.5	35.9	6727.1	12.0	2477.8	23.9	504	4
20	8264.4	36.6	6739.1	12.2	2501.7	24.4	500	5
30	8301.0	37.4	6751.3	12.4	2526.1	25.0	495	5
40	8338.4	38.0	6763.7	12.7	2551.1	25.3	490	5
50	8376.4	38.7	6776.4	12.9	2576.4	25.8	485	5
9° 0'	8415.1	39.5	6789.3	13.2	2602.2	26.3	6.393 480	6
10	8454.6	40.1	6802.5	13.4	2628.5	26.8	474	5
20	8494.7	40.9	6815.9	13.6	2655.3	27.2	469	6
30	8535.6	41.5	6829.5	13.8	2682.5	27.7	463	5
40	8577.1	42.2	6843.3	14.1	2710.2	28.2	458	6
50	8619.3	42.9	6857.4	14.3	2738.4	28.6	452	5
10° 0'	8662.2	43.7	6871.7	14.5	2767.0	29.0	6.393 447	6
10	8705.9	44.3	6886.2	14.8	2796.0	29.6	441	6
20	8750.2	45.0	6901.0	15.0	2825.6	30.0	435	6
30	8795.2	45.6	6916.0	15.2	2855.6	30.4	429	6
40	8840.8	46.4	6931.2	15.5	2886.0	30.9	423	6
50	8887.2	47.0	6946.7	15.7	2916.9	31.4	417	7
11° 0'	8934.2	47.8	6962.4	15.9	2948.3	31.8	6.393 410	6
10	8982.0	48.4	6978.3	16.1	2980.1	32.3	404	6
20	9030.4	49.1	6994.4	16.4	3012.4	32.7	398	7
30	9079.5	49.7	7010.8	16.6	3045.1	33.2	391	7
40	9129.2	50.5	7027.4	16.8	3078.3	33.6	384	6
50	9179.7	51.1	7044.2	17.0	3111.9	34.1	378	7
12° 0'	9230.8	51.8	7061.2	17.3	3146.0	34.6	6.393 371	7
10	9282.6	52.5	7078.5	17.5	3180.6	34.9	364	7
20	9335.1	53.1	7096.0	17.7	3215.5	35.5	357	7
30	9388.2	53.8	7113.7	17.9	3251.0	35.8	350	7
40	9442.0	54.5	7131.6	18.2	3286.8	36.3	343	8
50	9496.5	55.1	7149.8	18.4	3323.1	36.8	335	7
13° 0'	9551.6	55.8	7168.2	18.6	3359.9	37.2	6.393 328	7
10	9607.4	56.5	7186.8	18.8	3397.1	37.6	321	8
20	9663.9	57.1	7205.6	19.0	3434.7	38.1	313	8
30	9721.0	57.7	7224.6	19.3	3472.8	38.5	305	7
40	9778.7	58.5	7243.9	19.4	3511.3	39.0	298	8
50	9837.2	59.0	7263.3	19.7	3550.3	39.3	290	8
14° 0'	9896.2	59.8	7283.0	19.9	3589.6	39.9	6.393 282	8
10	9956.0	60.3	7302.9	20.2	3629.5	40.2	274	8
20	*0016.3	61.1	7323.1	20.3	3669.7	40.7	266	8
30	0077.4	61.6	7343.4	20.6	3710.4	41.1	258	8
40	0139.0	62.3	7364.0	20.7	3751.5	41.5	250	9
50	0201.3	63.0	7384.7	21.0	3793.0	42.0	241	8
15° 0'	0264.3	63.6	7405.7	21.2	3835.0	42.4	6.393 233	8
10	0327.9	64.2	7426.9	21.4	3877.4	42.8	225	9
20	0392.1	64.8	7448.3	21.6	3920.2	43.1	216	9
30	0456.9	65.5	7469.9	21.9	3963.4	43.7	207	8
40	0522.4	66.1	7491.8	22.0	4007.1	44.1	199	9
50	0588.5	66.8	7513.8	22.3	4051.2	44.5	190	9
16° 0'	0655.3		7536.1		4095.7		181	

φ	$\log W$	Δ	$\log [1]$	Δ	$\log [2]$	Δ	$\log V^2$	Δ
	9.999 —10	—	8.512 —10	—	8.509 —10	—	0.002	—
8° 0'	9719.3	11.8	6058.1	35.2	7536.0	11.8	8522.1	23.5
10	9707.5	12.0	6022.9	36.0	7524.2	12.0	8498.6	23.9
20	9695.5	12.2	5986.9	36.6	7512.2	12.2	8474.7	24.4
30	9683.3	12.4	5950.3	37.3	7500.0	12.4	8450.3	24.9
0	9670.9	12.7	5913.0	38.1	7487.6	12.7	8425.4	25.4
50	9658.2	12.9	5874.9	38.7	7474.9	12.9	8400.0	25.8
9° 0'	9645.3	13.2	5836.2	39.5	7462.0	13.2	8374.2	26.3
10	9632.1	13.3	5796.7	40.1	7448.8	13.3	8347.9	26.8
20	9618.8	13.6	5756.6	40.8	7435.5	13.6	8321.1	27.2
30	9605.2	13.9	5715.8	41.6	7421.9	13.9	8293.9	27.7
40	9591.3	14.1	5674.2	42.2	7408.0	14.1	8266.2	28.1
50	9577.2	14.3	5632.0	42.9	7393.9	14.3	8238.1	28.6
10° 0'	9562.9	14.5	5589.1	43.6	7379.6	14.5	8209.5	29.1
10	9548.4	14.6	5545.5	44.3	7365.1	14.8	8180.4	29.6
20	9533.6	15.0	5501.2	45.0	7350.3	15.0	8150.8	29.9
30	9518.6	15.2	5456.2	45.7	7335.3	15.2	8120.9	30.5
40	9503.4	15.5	5410.5	46.4	7320.1	15.5	8090.4	30.9
50	9487.9	15.6	5364.1	47.0	7304.6	15.6	8059.5	31.4
11° 0'	9472.3	15.9	5317.1	47.7	7289.0	15.9	8028.1	31.8
10	9456.4	16.2	5269.4	48.5	7273.1	16.2	7996.3	32.3
20	9440.2	16.3	5220.9	49.0	7256.9	16.4	7964.0	32.7
30	9423.9	16.6	5171.9	49.8	7240.5	16.5	7931.3	33.2
40	9407.3	16.8	5122.1	50.5	7224.0	16.9	7898.1	33.6
50	9390.4	17.1	5071.6	51.1	7207.1	17.0	7864.5	34.1
12° 0'	9373.4	17.3	5020.5	51.8	7190.1	17.3	7830.4	34.5
10	9356.1	17.4	4968.7	52.4	7172.8	17.5	7795.9	35.0
20	9338.7	17.8	4916.3	53.2	7155.3	17.7	7760.9	35.4
30	9320.9	17.9	4863.1	53.8	7137.6	17.9	7725.5	35.9
40	9303.0	18.1	4809.3	54.5	7119.7	18.2	7689.6	36.3
50	9284.9	18.4	4754.8	55.1	7101.5	18.3	7653.3	36.7
13° 0'	9266.5	18.6	4699.7	55.8	7083.2	18.6	7616.6	37.2
10	9247.9	18.8	4643.9	56.4	7064.6	18.8	7579.4	37.7
20	9229.1	19.1	4587.5	57.1	7045.8	19.1	7541.7	38.1
30	9210.0	19.2	4530.4	57.8	7026.7	19.2	7503.6	38.5
40	9190.8	19.5	4472.6	58.4	7007.5	19.5	7465.1	38.9
50	9171.3	19.7	4414.2	59.1	6988.0	19.7	7426.2	39.4
14° 0'	9151.6	19.9	4355.1	59.7	6968.3	19.9	7386.8	39.8
10	9131.7	20.1	4295.4	60.4	6948.4	20.1	7347.0	40.3
20	9111.6	20.4	4235.0	61.0	6928.3	20.4	7306.7	40.6
30	9091.2	20.5	4174.0	61.7	6907.9	20.5	7266.1	41.2
40	9070.7	20.8	4112.3	62.3	6887.4	20.8	7224.9	41.5
50	9049.9	21.0	4050.0	62.9	6866.6	21.0	7183.4	42.0
15° 0'	9028.9	21.2	3987.1	63.6	6845.6	21.2	7141.4	42.4
10	9007.7	21.4	3923.5	64.3	6824.4	21.4	7099.0	42.8
20	8986.3	21.6	3859.2	64.8	6803.0	21.6	7056.2	43.2
30	8964.7	21.8	3794.4	65.5	6781.4	21.8	7013.0	43.7
40	8942.9	22.1	3728.9	66.1	6759.6	22.1	6969.3	44.0
50	8920.8	22.2	3662.8	66.8	6737.5	22.2	6925.3	44.5
16° 0'	8898.6		3596.0		6715.3		6880.8	

φ	$\log M$	A	$\log N$	A	$\log r$	A	$\log \frac{1}{r^2}$	A
	6.802		6.804		6.803		— 20	—
16° 0'	0655.3	67.4	7536.1	22.4	4095.7	44.9	6.393 181	9
10	0722.7	67.9	7558.5	22.7	4140.6	45.3	172	9
20	0790.6	68.7	7581.2	22.8	4185.9	45.7	163	9
30	0859.3	69.2	7604.0	23.1	4231.6	46.2	154	10
40	0928.5	69.8	7627.1	23.3	4277.8	46.6	144	9
50	0998.3	70.5	7650.4	23.5	4324.4	46.9	135	9
17° 0'	1068.8	71.1	7673.9	23.7	4371.3	47.4	6.393 126	10
10	1139.9	71.6	7697.6	23.9	4418.7	47.8	116	9
20	1211.5	72.3	7721.5	24.1	4466.5	48.2	107	10
30	1283.8	72.9	7745.6	24.3	4514.7	48.6	097	10
40	1356.7	73.5	7769.9	24.5	4563.3	49.0	087	9
50	1430.2	74.1	7794.4	24.7	4612.3	49.4	078	10
18° 0'	1504.3	74.7	7819.1	24.9	4661.7	49.8	6.393 068	10
10	1579.0	75.3	7844.0	25.0	4711.5	50.2	058	10
20	1654.3	75.8	7869.0	25.3	4761.7	50.5	048	10
30	1730.1	76.5	7894.3	25.5	4812.2	51.0	038	11
40	1806.6	77.1	7919.8	25.7	4863.2	51.4	027	10
50	1883.7	77.6	7945.5	25.9	4914.6	51.7	017	10
19° 0'	1961.3	78.2	7971.4	26.1	4966.3	52.2	6.393 007	11
10	2039.5	78.8	7997.5	26.2	5018.5	52.5	6.392 996	10
20	2118.3	79.4	8023.7	26.5	5071.0	52.9	986	11
30	2197.7	79.9	8050.2	26.6	5123.9	53.3	975	10
40	2277.6	80.5	8076.8	26.9	5177.2	53.7	965	11
50	2358.1	81.1	8103.7	27.0	5230.9	54.0	954	11
20° 0'	2439.2	81.6	8130.7	27.2	5284.9	54.5	6.392 943	11
10	2520.8	82.2	8157.9	27.4	5339.4	54.8	932	11
20	2603.0	82.8	8185.3	27.6	5394.2	55.2	921	11
30	2685.8	83.3	8212.9	27.8	5449.4	55.5	910	11
40	2769.1	83.9	8240.7	27.9	5504.9	55.9	899	11
50	2853.0	84.4	8268.6	28.2	5560.8	56.3	888	11
21° 0'	2937.4	85.0	8296.8	28.3	5617.1	56.6	6.392 877	12
10	3022.4	85.5	8325.1	28.5	5673.7	57.1	865	11
20	3107.9	86.1	8353.6	28.7	5730.8	57.3	854	12
30	3194.0	86.6	8382.3	28.9	5788.1	57.8	842	11
40	3280.6	87.1	8411.2	29.0	5845.9	58.1	831	12
50	3367.7	87.7	8440.2	29.2	5904.0	58.4	819	11
22° 0'	3455.4	88.2	8469.4	29.4	5962.4	58.8	6.392 808	12
10	3543.6	88.8	8498.8	29.6	6021.2	59.2	796	12
20	3632.4	89.2	8528.4	29.8	6080.4	59.5	784	12
30	3721.6	89.8	8558.2	29.9	6139.9	59.8	772	12
40	3811.4	90.3	8588.1	30.1	6199.7	60.2	760	12
50	3901.7	90.8	8618.2	30.3	6259.9	60.6	748	12
23° 0'	3992.5	91.3	8648.5	30.4	6320.5	60.9	6.392 736	12
10	4083.8	91.9	8678.9	30.6	6381.4	61.2	724	13
20	4175.7	92.3	8709.5	30.8	6442.6	61.6	711	12
30	4268.0	92.9	8740.3	30.9	6504.2	61.9	699	12
40	4360.9	93.3	8771.2	31.2	6566.1	62.2	687	13
50	4454.2	93.9	8802.4	31.2	6628.3	62.5	674	12
24° 0'	4548.1		8833.6		6690.8		6.392 662	

φ	$\log W$	A	$\log [1]$	A	$\log [2]$	A	$\log V^2$	A
	9.999 — 10	—	8.512 — 10	—	8.509 — 10	—	0.002	—
16° 0'	8898.6	22.5	3596.0	67.3	6715.3	22.5	6880.8	44.9
10	8876.1	22.6	3528.7	68.0	6692.8	22.6	6835.9	45.4
20	8853.5	22.9	3460.7	68.6	6670.2	22.9	6790.5	45.7
30	8830.6	23.1	3392.1	69.2	6647.3	23.1	6744.8	46.2
40	8807.5	23.3	3322.9	69.9	6624.2	23.3	6698.6	46.5
50	8784.2	23.5	3253.0	70.5	6600.9	23.5	6652.1	47.0
17° 0'	8760.7	23.6	3182.5	71.0	6577.4	23.6	6605.1	47.4
10	8737.1	23.9	3111.5	71.6	6553.8	23.9	6557.7	47.8
20	8713.2	24.1	3039.9	72.4	6529.9	24.1	6519.9	48.2
30	8689.1	24.3	2967.5	72.9	6505.8	24.3	6461.7	48.5
40	8664.8	24.5	2894.6	73.5	6481.5	24.5	6413.2	49.0
50	8640.3	24.7	2821.1	74.1	6457.0	24.7	6364.2	49.4
18° 0'	8615.6	24.9	2747.0	74.7	6432.3	24.9	6314.8	49.8
10	8590.7	25.1	2672.3	75.2	6407.4	25.1	6265.0	50.2
20	8565.6	25.3	2597.1	75.9	6382.3	25.3	6214.8	50.6
30	8540.3	25.5	2521.2	76.5	6357.0	25.5	6164.2	51.0
40	8514.8	25.7	2444.7	77.0	6331.5	25.7	6113.2	51.3
50	8489.1	25.8	2367.7	77.6	6305.8	25.9	6061.9	51.8
19° 0'	8463.3	26.1	2290.1	78.3	6279.9	26.0	6010.1	52.1
10	8437.2	26.3	2211.8	78.7	6253.9	26.3	5958.0	52.6
20	8410.9	26.4	2133.1	79.4	6227.6	26.4	5905.4	52.9
30	8384.5	26.7	2053.7	80.0	6201.2	26.7	5852.5	53.3
40	8357.8	26.8	1973.7	80.5	6174.5	26.8	5799.2	53.6
50	8331.0	27.0	1893.2	81.0	6147.7	27.1	5745.6	54.1
20° 0'	8304.0	27.3	1812.2	81.7	6120.6	27.1	5691.5	54.4
10	8276.7	27.4	1730.5	82.2	6093.4	27.4	5637.1	54.8
20	8249.3	27.6	1648.3	82.8	6066.0	27.6	5582.3	55.2
30	8221.7	27.7	1565.5	83.3	6038.4	27.7	5527.1	55.6
40	8194.0	28.0	1482.2	83.9	6010.7	28.0	5471.5	55.9
50	8166.0	28.1	1398.3	84.4	5982.7	28.1	5415.6	56.3
21° 0'	8137.9	28.4	1313.9	85.0	5954.6	28.4	5359.3	56.6
10	8109.5	28.5	1228.9	85.5	5926.2	28.5	5302.7	57.0
20	8081.0	28.6	1143.4	86.1	5897.7	28.7	5245.7	57.4
30	8052.4	28.9	1057.3	86.6	5869.0	28.8	5188.3	57.7
40	8023.5	29.1	0970.7	87.1	5840.2	29.1	5130.6	58.1
50	7994.4	29.2	0883.6	87.7	5811.1	29.2	5072.5	58.5
22° 0'	7965.2	29.4	0795.9	88.2	5781.9	29.4	5014.0	58.8
10	7935.8	29.6	0707.7	88.7	5752.5	29.6	4955.2	59.1
20	7906.2	29.7	0619.0	89.3	5722.9	29.7	4896.1	59.5
30	7876.5	29.9	0529.7	89.8	5693.2	30.0	4836.6	59.9
40	7846.6	30.1	0439.9	90.3	5663.2	30.1	4776.7	60.2
50	7816.5	30.3	0349.6	90.8	5633.1	30.2	4716.5	60.5
23° 0'	7786.2	30.5	0258.8	91.3	5602.9	30.5	4656.0	60.9
10	7755.7	30.6	0167.5	91.8	5572.4	30.6	4595.1	61.3
20	7725.1	30.8	0075.7	92.4	5541.8	30.8	4533.8	61.5
30	7694.3	30.9	*9983.3	92.8	5511.0	30.9	4472.3	61.9
40	7663.4	31.1	9890.5	93.4	5480.1	31.1	4410.4	62.3
50	7632.3	31.3	9797.1	93.8	5449.0	31.3	4348.1	62.5
24° 0'	7601.0		9703.3		5417.7		4285.6	

φ	$\log M$	Δ	$\log N$	Δ	$\log r$	Δ	$\log \frac{1}{r^2}$	Δ
	6.802	+	6.804	+	6.803	+	— 20	—
24° 0'	4548.1	94.3	8833.6	31.5	6690.8	62.9	6.392 662	13
10	4642.4	94.8	8865.1	31.6	6753.7	63.3	649	12
20	4737.2	95.4	8896.7	31.8	6817.0	63.5	637	13
30	4832.6	95.8	8928.5	31.9	6880.5	63.9	624	13
40	4928.4	96.3	8960.4	32.1	6944.4	64.2	611	13
50	5024.7	96.7	8992.5	32.3	7008.6	64.5	598	13
25° 0'	5121.4	97.2	9024.8	32.4	7073.1	64.8	6.392 585	13
10	5218.6	97.8	9057.2	32.5	7137.9	65.2	572	13
20	5316.4	98.1	9089.7	32.8	7203.1	65.4	559	13
30	5414.5	98.7	9122.5	32.9	7268.5	65.8	546	13
40	5513.2	99.1	9155.4	33.0	7334.3	66.0	533	13
50	5612.3	99.6	9188.4	33.2	7400.3	66.4	520	13
26° 0'	5711.9	100.0	9221.6	33.3	7466.7	66.7	6.392 507	14
10	5811.9	100.4	9254.9	33.5	7533.4	67.0	493	13
20	5912.3	101.0	9288.4	33.6	7600.4	67.3	480	14
30	6013.3	101.3	9322.0	33.8	7667.7	67.5	466	13
40	6114.6	101.8	9355.8	34.0	7735.2	67.9	453	14
50	6216.4	102.3	9389.8	34.1	7803.1	68.2	439	13
27° 0'	6318.7	102.7	9423.9	34.2	7871.3	68.4	6.392 426	14
10	6421.4	103.1	9458.1	34.3	7939.7	68.8	412	14
20	6524.5	103.5	9492.4	34.6	8008.5	69.0	398	13
30	6628.0	104.0	9527.0	34.6	8077.5	69.3	385	14
40	6732.0	104.4	9561.6	34.8	8146.8	69.6	371	14
50	6836.4	104.8	9596.4	34.9	8216.4	69.8	357	14
28° 0'	6941.2	105.2	9631.3	35.1	8286.2	70.2	6.392 343	14
10	7046.4	105.6	9666.4	35.2	8356.4	70.4	329	14
20	7152.0	106.0	9701.6	35.4	8426.8	70.7	315	15
30	7258.0	106.5	9737.0	35.4	8497.5	71.0	300	14
40	7364.5	106.8	9772.4	35.7	8568.5	71.2	286	14
50	7471.3	107.2	9808.1	35.7	8639.7	71.5	272	14
29° 0'	7578.5	107.7	9843.8	35.9	8711.2	71.7	6.392 258	15
10	7686.2	108.0	9879.7	36.0	8782.9	72.0	243	14
20	7794.2	108.4	9915.7	36.1	8854.9	72.3	229	14
30	7902.6	108.7	9951.8	36.3	8927.2	72.5	215	15
40	8011.3	109.2	9988.1	36.4	8999.7	72.8	200	14
50	8120.5	109.5	* 0024.5	36.5	9072.5	73.0	186	15
30° 0'	8230.0	109.9	0061.0	36.6	9145.5	73.3	6.392 171	15
10	8339.9	110.3	0097.6	36.8	9218.8	73.5	156	14
20	8450.2	110.6	0134.4	36.8	9292.3	73.7	142	15
30	8560.8	111.0	0171.2	37.0	9366.0	74.0	127	15
40	8671.8	111.4	0208.2	37.1	9440.0	74.2	112	15
50	8783.2	111.7	0245.3	37.3	9514.2	74.5	097	15
31° 0'	8894.9	112.0	0282.6	37.3	9588.7	74.7	6.392 082	15
10	9006.9	112.4	0319.9	37.5	9663.4	74.9	067	15
20	9119.3	112.7	0357.4	37.6	9738.3	75.2	052	15
30	9232.0	113.1	0395.0	37.6	9813.5	75.4	037	15
40	9345.1	113.4	0432.6	37.8	9888.9	75.6	022	15
50	9458.5	113.7	0470.4	38.0	9964.5	75.8	007	15
32° 0'	9572.2		0508.4		* 0040.3		6.391 992	

φ	$\log W$	Δ	$\log [1]$	Δ	$\log [2]$	Δ	$\log V^2$	Δ
	9.999 — 10	—	8.511 — 10	—	8.509 — 10	—	0.002	—
24° 0'	7601.0	31.5	9703.3	94.4	5417.7	31.5	4285.6	62.9
10	7569.5	31.6	9608.9	94.8	5386.2	31.6	4222.7	63.2
20	7537.9	31.7	9514.1	95.3	5354.6	31.7	4159.5	63.6
30	7506.2	32.0	9418.8	95.8	5322.9	32.0	4095.9	63.9
40	7474.2	32.1	9323.0	96.3	5290.9	32.1	4032.0	64.1
50	7442.1	32.2	9226.7	96.8	5258.8	32.2	3967.9	64.5
25° 0'	7409.9	32.4	9129.9	97.2	5226.6	32.4	3903.4	64.9
10	7377.5	32.6	9032.7	97.7	5194.2	32.6	3838.5	65.1
20	7344.9	32.7	8935.0	98.2	5161.6	32.7	3773.4	65.5
30	7312.2	32.9	8836.8	98.7	5128.9	32.9	3707.9	65.7
40	7279.3	33.0	8738.1	99.1	5096.0	33.1	3642.2	66.1
50	7246.3	33.2	8639.0	99.5	5062.9	33.1	3576.1	66.4
26° 0'	7213.1	33.4	8539.5	100.0	5029.8	33.4	3509.7	66.7
10	7179.7	33.5	8439.5	100.5	4996.4	33.5	3443.0	66.9
20	7146.2	33.6	8339.0	100.9	4962.9	33.6	3376.1	67.3
30	7112.6	33.8	8238.1	101.4	4929.3	33.8	3308.8	67.6
40	7078.8	33.9	8136.7	101.8	4895.5	33.9	3241.2	67.9
50	7044.9	34.1	8034.9	102.3	4861.6	34.1	3173.3	68.1
27° 0'	7010.8	34.2	7932.6	102.6	4827.5	34.2	3105.2	68.5
10	6976.6	34.4	7830.0	103.1	4793.3	34.4	3036.7	68.7
20	6942.2	34.5	7726.9	103.6	4758.9	34.5	2968.0	69.0
30	6907.7	34.7	7623.3	103.9	4724.4	34.7	2899.0	69.4
40	6873.0	34.8	7519.4	104.4	4689.7	34.8	2829.6	69.5
50	6838.2	34.9	7415.0	104.8	4654.9	34.9	2760.1	69.9
28° 0'	6803.3	35.1	7310.2	105.2	4620.0	35.1	2690.2	70.2
10	6768.2	35.2	7205.0	105.7	4584.9	35.2	2620.0	70.4
20	6733.0	35.3	7099.3	106.0	4549.7	35.3	2549.6	70.7
30	6697.7	35.5	6993.3	106.4	4514.4	35.5	2478.9	70.9
40	6662.2	35.6	6886.9	106.9	4478.9	35.6	2408.0	71.2
50	6626.6	35.8	6780.0	107.2	4443.3	35.8	2336.8	71.5
29° 0'	6590.8	35.8	6672.8	107.6	4407.5	35.8	2265.3	71.8
10	6555.0	36.0	6565.2	108.0	4371.7	36.0	2193.5	72.0
20	6519.0	36.2	6457.2	108.4	4335.7	36.2	2121.5	72.3
30	6482.8	36.2	6348.8	108.8	4299.5	36.2	2049.2	72.5
40	6446.6	36.4	6240.0	109.2	4263.3	36.4	1976.7	72.7
50	6410.2	36.5	6130.8	109.5	4226.9	36.5	1904.0	73.1
30° 0'	6373.7	36.7	6021.3	109.9	4190.4	36.7	1830.9	73.2
10	6337.0	36.7	5911.4	110.3	4153.7	36.7	1757.7	73.5
20	6300.3	36.9	5801.1	110.6	4117.0	36.9	1684.2	73.8
30	6263.4	37.0	5690.5	111.0	4080.1	37.0	1610.4	74.0
40	6226.4	37.1	5579.5	111.3	4043.1	37.1	1536.4	74.2
50	6189.3	37.2	5468.2	111.7	4006.0	37.2	1462.2	74.5
31° 0'	6152.1	37.4	5356.5	112.1	3968.8	37.4	1387.7	74.7
10	6114.7	37.4	5244.4	112.4	3931.4	37.5	1313.0	74.9
20	6077.3	37.6	5132.0	112.7	3893.9	37.5	1238.1	75.2
30	6039.7	37.7	5019.3	113.0	3856.4	37.7	1162.9	75.3
40	6002.0	37.8	4906.3	113.4	3818.7	37.8	1087.6	75.6
50	5964.2	37.9	4792.9	113.8	3780.9	37.9	1012.0	75.8
32° 0'	5926.3		4679.1		3743.0		936.2	

φ	$\log M$	A	$\log N$	A	$\log r$	A	$\log \frac{1}{r^2}$	A
	6.802	+	6.805	+	6.804	+	— 20	—
32° 0'	9572.2	114.1	0508.4	38.0	0040.3	76.0	6.391 992	15
10	9686.3	114.3	0546.4	38.1	0116.3	76.3	977	16
20	9800.6	114.7	0584.5	38.2	0192.6	76.4	961	15
30	9915.3	115.0	0622.7	38.4	0269.0	76.7	946	15
40	*0030.3	115.3	0661.1	38.4	0345.7	76.9	931	16
50	0145.6	115.7	0699.5	38.5	0422.6	77.1	915	15
33° 0'	0261.3	115.9	0738.0	38.7	0499.7	77.2	6.391 900	15
10	0377.2	116.2	0776.7	38.7	0576.9	77.5	885	16
20	0493.4	116.5	0815.4	38.9	0654.4	77.7	869	15
30	0609.9	116.8	0854.3	38.9	0732.1	77.9	854	16
40	0726.7	117.1	0893.2	39.0	0810.0	78.0	838	16
50	0843.8	117.4	0932.2	39.2	0888.0	78.3	822	15
34° 0'	0961.2	117.6	0971.4	39.2	0966.3	78.4	6.391 807	16
10	1078.8	118.0	1010.6	39.3	1044.7	78.6	791	16
20	1196.8	118.2	1049.9	39.4	1123.3	78.8	775	15
30	1315.0	118.4	1089.3	39.5	1202.1	79.0	760	16
40	1433.4	118.8	1128.8	39.5	1281.1	79.1	744	16
50	1552.2	118.9	1168.3	39.7	1360.2	79.4	728	16
35° 0'	1671.1	119.3	1208.0	39.7	1439.6	79.5	6.391 712	16
10	1790.4	119.5	1247.7	39.9	1519.1	79.6	696	16
20	1909.9	119.7	1287.6	39.9	1598.7	79.8	680	16
30	2029.6	120.0	1327.5	40.0	1678.5	80.0	664	16
40	2149.6	120.2	1367.5	40.1	1758.5	80.2	648	16
50	2269.8	120.4	1407.6	40.1	1838.7	80.3	632	16
36° 0'	2390.2	120.7	1447.7	40.2	1919.0	80.4	6.391 616	16
10	2510.9	120.9	1487.9	40.3	1999.4	80.6	600	16
20	2631.8	121.2	1528.2	40.4	2080.0	80.8	584	16
30	2753.0	121.3	1568.6	40.5	2160.8	80.9	568	16
40	2874.3	121.6	1609.1	40.5	2241.7	81.0	552	17
50	2995.9	121.7	1649.6	40.6	2322.7	81.2	535	16
37° 0'	3117.6	122.0	1690.2	40.6	2403.9	81.3	6.391 519	16
10	3239.6	122.2	1730.8	40.7	2485.2	81.5	503	16
20	3361.8	122.4	1771.5	40.8	2566.7	81.5	487	17
30	3484.2	122.5	1812.3	40.9	2648.2	81.8	470	16
40	3606.7	122.8	1853.2	40.9	2730.0	81.8	454	16
50	3729.5	122.9	1894.1	41.0	2811.8	82.0	438	17
38° 0'	3852.4	123.1	1935.1	41.0	2893.8	82.0	6.391 421	16
10	3975.5	123.3	1976.1	41.1	2975.8	82.2	405	17
20	4098.8	123.5	2017.2	41.2	3058.0	82.3	388	16
30	4222.3	123.6	2058.4	41.2	3140.3	82.5	372	17
40	4345.9	123.8	2099.6	41.3	3222.8	82.5	355	16
50	4469.7	124.0	2140.9	41.3	3305.3	82.6	339	17
39° 0'	4593.7	124.1	2182.2	41.4	3387.9	82.8	6.391 322	16
10	4717.8	124.3	2223.6	41.4	3470.7	82.8	306	17
20	4842.1	124.4	2265.0	41.5	3553.5	83.0	289	16
30	4966.5	124.6	2306.5	41.5	3636.5	83.0	273	17
40	5091.1	124.7	2348.0	41.5	3719.5	83.2	256	17
50	5215.8	124.8	2389.5	41.7	3802.7	83.2	239	16
40° 0'	5340.6		2431.2		3885.9		6.391 223	

φ	$\log W$	Δ	$\log [1]$	Δ	$\log [2]$	Δ	$\log V^2$	Δ
	9.999 — 10	—	8.511 — 10	—	8.509 — 10	—	0.002	—
32° 0'	5926.3	38.0	4679.1	114.0	3743.0	38.0	0936.2	76.1
10	5888.3	38.2	4565.1	114.4	3705.0	38.2	0860.1	76.2
20	5850.1	38.2	4450.7	114.7	3666.8	38.2	0783.2	76.5
30	5811.9	38.3	4336.0	115.0	3628.6	38.3	0707.4	76.7
40	5773.6	38.5	4221.0	115.3	3590.3	38.5	0630.7	76.8
50	5735.1	38.5	4105.7	115.6	3551.8	38.5	0553.9	77.1
33° 0'	5696.6	38.6	3990.1	116.0	3513.3	38.7	0476.8	77.3
10	5658.0	38.8	3874.1	116.2	3474.6	38.7	0399.5	77.5
20	5619.2	38.8	3757.9	116.5	3435.9	38.8	0322.0	77.7
30	5580.4	39.0	3641.4	116.8	3397.1	38.9	0244.3	77.8
40	5541.4	39.0	3524.6	117.1	3358.1	39.1	0166.5	78.1
50	5502.4	39.1	3407.5	117.4	3319.1	39.1	0088.4	78.2
34° 0'	5463.3	39.2	3290.1	117.6	3280.0	39.2	0010.2	78.5
10	5424.1	39.3	3172.5	117.9	3240.8	39.3	*9931.7	78.6
20	5384.8	39.4	3054.6	118.2	3201.5	39.4	9853.1	78.8
30	5345.4	39.5	2936.4	118.5	3162.1	39.5	9774.3	79.0
40	5305.9	39.6	2817.9	118.7	3122.6	39.6	9695.3	79.1
50	5266.3	39.7	2699.2	119.0	3083.0	39.7	9616.2	79.3
35° 0'	5226.6	39.7	2580.2	119.2	3043.3	39.6	9536.9	79.5
10	5186.9	39.8	2461.0	119.5	3003.7	39.9	9457.4	79.7
20	5147.1	39.9	2341.5	119.8	2963.8	40.0	9377.7	79.8
30	5107.2	40.0	2221.7	119.9	2923.8	40.0	9297.9	80.0
40	5067.2	40.1	2101.8	120.3	2883.8	40.0	9217.9	80.1
50	5027.1	40.2	1981.5	120.4	2843.8	40.2	9137.8	80.3
36° 0'	4986.9	40.2	1861.1	120.7	2803.6	40.2	9057.5	80.5
10	4946.7	40.3	1740.4	120.9	2763.4	40.3	8977.0	80.6
20	4906.4	40.4	1619.5	121.1	2723.1	40.4	8896.4	80.7
30	4866.0	40.4	1498.4	121.4	2682.7	40.4	8815.7	80.9
40	4825.6	40.5	1377.0	121.5	2642.3	40.5	8734.8	81.1
50	4785.1	40.6	1255.5	121.8	2601.8	40.6	8653.7	81.2
37° 0'	4744.5	40.7	1133.7	122.0	2561.2	40.7	8572.5	81.3
10	4703.8	40.7	1011.7	122.1	2520.5	40.7	8591.2	81.4
20	4663.1	40.8	0889.6	122.4	2479.8	40.8	8409.8	81.6
30	4622.3	40.9	0767.2	122.6	2439.0	40.9	8328.2	81.7
40	4581.4	40.9	0644.6	122.7	2398.1	40.9	8246.5	81.9
50	4540.5	41.0	0521.9	123.0	2357.2	41.0	8164.6	81.9
38° 0'	4499.5	41.0	0398.9	123.1	2316.2	41.0	8082.7	82.1
10	4458.5	41.1	0275.8	123.3	2275.2	41.1	8000.6	82.2
20	4417.4	41.2	0152.5	123.5	2234.1	41.2	7918.4	82.3
30	4376.2	41.2	0029.0	123.6	2192.9	41.2	7836.1	82.4
40	4335.0	41.2	*9905.4	123.8	2151.7	41.2	7753.7	82.6
50	4293.8	41.4	9781.6	124.0	2110.5	41.4	7671.1	82.6
39° 0'	4252.4	41.3	9657.6	124.1	2069.1	41.3	7588.5	82.8
10	4211.1	41.5	9533.5	124.3	2027.8	41.5	7505.7	82.8
20	4169.6	41.4	9409.2	124.4	1986.3	41.4	7422.9	82.9
30	4128.2	41.5	9284.8	124.5	1944.9	41.5	7340.0	83.1
40	4086.7	41.6	9160.0	124.7	1903.4	41.6	7256.9	83.1
50	4045.1	41.6	9035.6	124.9	1861.8	41.6	7173.8	83.2
40° 0'	4003.5		8910.7		1820.2		7090.6	

φ	$\log M$	Δ	$\log N$	Δ	$\log r$	Δ	$\log \frac{1}{r^2}$	Δ
	6.803	+	6.805	+	6.804	+	— 20	—
40° 0'	5340.6	125.0	2431.1	41.7	3885.9	83.3	6.391 223	17
10	5465.6	125.1	2472.8	41.7	3969.2	83.4	206	17
20	5590.7	125.2	2514.5	41.7	4052.6	83.5	189	16
30	5715.9	125.3	2556.2	41.8	4136.1	83.5	173	17
40	5841.2	125.4	2598.0	41.8	4219.6	83.6	156	17
50	5966.6	125.6	2639.8	41.9	4303.2	83.7	139	16
41° 0'	6092.2	125.7	2681.7	41.9	4386.9	83.8	6.391 123	17
10	6217.9	125.7	2723.6	41.9	4470.7	83.9	106	17
20	6343.6	125.9	2765.5	41.9	4554.6	83.9	089	17
30	6469.5	125.9	2807.4	42.0	4638.5	83.9	072	16
40	6595.4	126.1	2849.4	42.0	4722.4	84.1	056	17
50	6721.5	126.1	2891.4	42.1	4806.5	84.0	039	17
42° 0'	6847.6	126.2	2933.5	42.1	4890.5	84.2	6.391 022	17
10	6973.8	126.3	2975.6	42.0	4974.7	84.1	391 005	17
20	7100.1	126.3	3017.6	42.1	5058.8	84.3	*390 988	17
30	7226.4	126.4	3059.7	42.2	5143.1	84.3	971	16
40	7352.8	126.5	3101.9	42.2	5227.4	84.3	955	17
50	7479.3	126.5	3144.1	42.1	5311.7	84.3	938	17
43° 0'	7605.8	126.6	3186.2	42.2	5396.0	84.4	6.390 921	17
10	7732.4	126.7	3228.4	42.2	5480.4	84.4	904	17
20	7859.1	126.6	3270.6	42.3	5564.8	84.5	887	17
30	7985.7	126.8	3312.9	42.2	5649.3	84.5	870	17
40	8112.5	126.7	3355.1	42.3	5733.8	84.5	853	17
50	8239.2	126.8	3397.4	42.2	5818.3	84.5	836	17
44° 0'	8366.0	126.8	3439.6	42.3	5902.8	84.6	6.390 819	16
10	8492.8	126.9	3481.9	42.3	5987.4	84.5	803	17
20	8619.7	126.8	3524.2	42.3	6071.9	84.6	786	17
30	8746.5	126.9	3566.5	42.3	6156.5	84.6	769	17
40	8873.4	126.9	3608.8	42.3	6241.1	84.6	752	17
50	9000.3	126.9	3651.1	42.3	6325.7	84.6	735	17
45° 0'	9127.2	126.9	3693.4	42.3	6410.3	84.6	6.390 718	17
10	9254.1	126.9	3735.7	42.3	6494.9	84.6	701	17
20	9381.0	126.9	3778.0	42.3	6579.5	84.6	684	17
30	9507.9	126.9	3820.3	42.3	6664.1	84.6	667	17
40	9634.8	126.9	3862.6	42.2	6748.7	84.6	650	17
50	9761.7	126.8	3904.8	42.3	6833.3	84.5	633	17
46° 0'	9888.5	126.8	3947.1	42.3	6917.8	84.6	6.390 616	16
10	*0015.3	126.8	3989.4	42.3	7002.4	84.5	600	17
20	0142.1	126.8	4031.7	42.2	7086.9	84.5	583	17
30	0268.9	126.7	4073.9	42.3	7171.4	84.5	566	17
40	0395.6	126.7	4116.2	42.2	7255.9	84.5	549	17
50	0522.3	126.7	4158.4	42.2	7340.4	84.4	532	17
47° 0'	0649.0	126.6	4200.6	42.2	7424.8	84.4	6.390 515	17
10	0775.6	126.5	4242.8	42.2	7509.2	84.3	498	17
20	0902.1	126.5	4285.0	42.2	7593.5	84.4	481	16
30	0928.6	126.4	4327.2	42.1	7677.9	84.3	474	17
40	1155.0	126.4	4369.3	42.1	7762.2	84.2	448	17
50	1281.4	126.3	4411.4	42.1	7846.4	84.2	431	17
48° 0'	1407.7		4453.5		7930.6		6.390 414	

φ	$\log W$	Δ	$\log [1]$	Δ	$\log [2]$	Δ	$\log V^2$	Δ
	9.999 — 10	—	8.511 — 10	—	8.509 — 10	—	0.001	—
40° 0'	4003.5	41.7	8910.6	34.8	1820.2	41.7	7090.6	83.4
10	3961.8	41.7	8785.8	35.1	1778.5	41.7	7007.2	83.3
20	3920.1	41.7	8660.7	35.2	1736.8	41.7	6923.9	83.5
30	3878.4	41.8	8535.5	35.4	1695.1	41.8	6840.4	83.6
40	3836.6	41.8	8410.1	35.4	1653.3	41.8	6756.8	83.6
50	3794.8	41.9	8284.7	35.6	1611.5	41.9	6673.2	83.7
41° 0'	3752.9	41.8	8159.1	35.6	1569.6	41.8	6589.5	83.8
10	3711.1	42.0	8033.5	35.8	1527.8	42.0	6505.7	83.9
20	3669.1	41.9	7907.7	35.8	1485.8	41.9	6421.9	83.9
30	3627.2	42.0	7781.9	36.0	1443.9	42.0	6338.0	84.0
40	3585.2	42.0	7655.9	36.0	1401.9	42.0	6254.0	84.0
50	3543.2	42.0	7529.9	36.1	1359.9	42.1	6170.0	84.1
42° 0'	3501.2	42.1	7403.8	36.2	1317.8	42.0	6085.9	84.1
10	3459.1	42.1	7277.6	36.3	1275.8	42.1	6001.8	84.2
20	3417.0	42.1	7151.3	36.4	1233.7	42.1	5917.6	84.2
30	3374.9	42.2	7024.9	36.4	1191.6	42.2	5833.4	84.3
40	3332.7	42.1	6898.5	36.5	1149.4	42.1	5749.1	84.3
50	3290.6	42.2	6772.0	36.5	1107.3	42.2	5664.8	84.4
43° 0'	3248.4	42.2	6645.5	36.6	1065.1	42.2	5580.4	84.4
10	3206.2	42.2	6518.9	36.6	1022.9	42.2	5496.0	84.4
20	3164.0	42.2	6392.3	36.7	980.7	42.2	5411.6	84.5
30	3121.8	42.3	6265.6	36.7	938.5	42.3	5327.1	84.5
40	3079.5	42.2	6138.9	36.8	896.2	42.2	5242.6	84.5
50	3037.3	42.3	6012.1	36.8	854.0	42.3	5158.1	84.5
44° 0'	2995.0	42.3	5885.3	36.8	811.7	42.3	5073.6	84.5
10	2952.7	42.2	5758.5	36.9	769.4	42.3	4989.1	84.6
20	2910.5	42.3	5631.6	36.8	727.1	42.2	4904.5	84.6
30	2868.2	42.3	5504.8	36.9	684.9	42.3	4819.9	84.6
40	2825.9	42.3	5377.9	36.9	642.6	42.3	4735.3	84.6
50	2783.6	42.3	5251.0	36.9	600.3	42.3	4650.7	84.6
45° 0'	2741.3	42.3	5124.1	36.9	558.0	42.3	4566.1	84.6
10	2699.0	42.3	4997.2	36.9	515.7	42.3	4481.5	84.6
20	2656.7	42.3	4870.3	36.9	473.4	42.3	4396.9	84.6
30	2614.4	42.3	4743.4	36.9	431.1	42.3	4312.3	84.5
40	2572.1	42.3	4616.5	36.8	388.8	42.3	4227.8	84.6
50	2529.8	42.3	4489.7	36.9	346.5	42.3	4143.2	84.6
46° 0'	2487.5	42.3	4362.8	36.8	304.2	42.3	4058.6	84.5
10	2445.2	42.2	4236.0	36.8	261.9	42.2	3974.1	84.6
20	2403.0	42.3	4109.2	36.8	219.7	42.3	3889.5	84.5
30	2360.7	42.2	3982.4	36.7	177.4	42.2	3805.0	84.5
40	2318.5	42.3	3855.7	36.7	135.2	42.3	3720.5	84.4
50	2276.2	42.2	3729.0	36.6	99.2	42.2	3636.1	84.5
47° 0'	2234.0	42.2	3602.4	36.6	0050.7	42.2	3551.6	84.4
10	2191.8	42.2	3475.8	36.6	0008.5	42.2	3467.2	84.3
20	2149.6	42.1	3349.2	36.5	*9966.3	42.1	3382.9	84.3
30	2107.5	42.2	3222.7	36.4	9924.2	42.2	3298.6	84.3
40	2065.3	42.1	3096.3	36.3	9882.0	42.1	3214.3	84.3
50	2023.2	42.1	2970.0	36.3	9839.9	42.1	3130.0	84.1
48° 0'	1981.1		2843.7		9797.8		3045.9	

φ	$\log M$	A	$\log N$	A	$\log r$	A	$\log \frac{1}{r^2}$	A
	6.804	+	6.805	+	6.804	+	- 20	-
48° 0'	1407.7	126.2	4453.5	42.1	7930.6	84.1	6.390 414	17
10	1533.9	126.1	4495.6	42.0	8014.7	84.1	397	17
20	1660.0	126.1	4537.6	42.0	8098.8	84.0	380	17
30	1786.1	125.9	4579.6	42.0	8182.8	84.0	363	17
40	1912.0	125.9	4621.6	42.0	8266.8	83.9	347	16
50	2037.9	125.8	4663.6	41.9	8350.7	83.9	330	17
49° 0'	2163.7	125.6	4705.5	41.9	8434.6	83.8	6.390 313	17
10	2289.3	125.6	4747.4	41.9	8518.4	83.7	296	16
20	2414.9	125.5	4789.3	41.8	8602.1	83.6	280	17
30	2540.4	125.3	4831.1	41.8	8685.7	83.6	263	17
40	2665.7	125.2	4872.9	41.7	8769.3	83.5	246	17
50	2790.9	125.1	4914.6	41.7	8852.8	83.4	229	16
50° 0'	2916.0	125.0	4956.3	41.7	8936.2	83.3	6.390 213	17
10	3041.0	124.9	4998.0	41.6	9019.5	83.2	196	17
20	3165.9	124.7	5039.6	41.6	9102.7	83.2	179	16
30	3290.6	124.6	5081.2	41.5	9185.9	83.0	163	16
40	3415.2	124.4	5122.7	41.5	9268.9	83.0	146	16
50	3539.6	124.3	5164.2	41.4	9351.9	82.8	130	17
51° 0'	3663.9	124.1	5205.6	41.4	9434.7	82.8	6.390 113	17
10	3788.0	124.0	5247.0	41.3	9517.5	82.7	096	16
20	3912.0	123.8	5288.3	41.3	9600.2	82.5	080	17
30	4035.8	123.7	5329.6	41.2	9682.7	82.4	063	16
40	4159.5	123.5	5370.8	41.2	9765.1	82.4	047	16
50	4283.0	123.3	5412.0	41.1	9847.5	82.2	031	17
52° 0'	4406.3	123.1	5453.1	41.0	9929.7	82.1	6.390 014	16
10	4529.4	123.0	5494.1	41.0	*0011.8	82.0	389 998	17
20	4652.4	122.8	5535.1	40.9	0093.8	81.8	981	16
30	4775.2	122.6	5576.0	40.9	0175.6	81.7	965	16
40	4897.8	122.4	5616.9	40.8	0257.3	81.6	949	17
50	5020.2	122.2	5657.7	40.7	0338.9	81.5	932	16
53° 0'	5142.4	122.0	5698.4	40.7	0420.4	81.3	6.389 916	16
10	5264.4	121.8	5739.1	40.6	0501.7	81.2	900	17
20	5386.2	121.5	5779.7	40.5	0582.9	81.1	883	16
30	5507.7	121.4	5820.2	40.5	0664.0	80.9	867	16
40	5629.1	121.2	5860.7	40.3	0774.9	80.7	851	16
50	5750.3	120.9	5901.0	40.4	0825.6	80.7	835	16
54° 0'	5871.2	120.7	5941.3	40.3	0906.3	80.4	6.389 819	16
10	5991.9	120.4	5981.6	40.1	0986.7	80.3	803	16
20	6112.3	120.3	6021.7	40.1	1067.0	80.2	787	16
30	6232.6	120.0	6061.8	40.0	1147.2	80.0	771	16
40	6352.6	119.7	6101.8	39.9	1227.2	79.8	755	16
50	6472.3	119.6	6141.7	39.9	1307.0	79.7	739	16
55° 0'	6591.8	119.3	6181.6	39.7	1386.7	79.5	6.389 723	15
10	6711.1	119.0	6221.3	39.7	1466.2	79.4	707	16
20	6830.1	118.8	6261.0	39.6	1545.6	79.1	691	16
30	6948.9	118.4	6300.6	39.5	1624.7	79.0	675	16
40	7067.3	118.3	6340.1	39.4	1703.7	78.8	659	16
50	7185.6	117.9	6379.5	39.3	1782.5	78.6	643	15
56° 0'	7303.5		6418.8		1861.1		6.389 628	

φ	$\log W$	A	$\log [1]$	A	$\log [2]$	A	$\log V^2$	I
	9.999 —10	—	8.510 —10	—	8.508 —10	—	0.001	—
48° 0'	1981.1	42.0	2843.7	126.2	9797.8	42.0	3045.9	84.2
10	1939.1	42.1	2717.5	126.2	9755.8	42.1	2961.7	84.1
20	1897.0	42.0	2591.3	126.0	9713.7	42.0	2877.6	84.0
30	1855.0	42.0	2465.3	126.0	9671.7	42.0	2793.6	84.0
40	1813.0	41.9	2339.3	125.9	9629.7	42.0	2709.6	83.9
50	1771.1	42.0	2213.4	125.7	9587.7	41.9	2625.7	83.8
49° 0'	1729.1	41.9	2087.7	125.7	9545.8	41.9	2541.9	83.8
10	1687.2	41.8	1962.0	125.6	9503.9	41.8	2458.1	83.7
20	1645.4	41.8	1836.4	125.4	9462.1	41.8	2374.4	83.7
30	1603.6	41.8	1711.0	125.4	9420.3	41.8	2290.7	83.5
40	1561.8	41.8	1585.6	125.2	9378.5	41.8	2207.2	83.5
50	1520.0	41.7	1460.4	125.1	9336.7	41.7	2123.7	83.4
50° 0'	1478.3	41.6	1335.3	125.0	9295.0	41.6	2040.3	83.4
10	1436.7	41.6	1210.3	124.8	9253.4	41.6	1956.9	83.2
20	1395.1	41.6	1085.5	124.8	9211.8	41.6	1873.7	83.1
30	1353.5	41.5	0960.7	124.5	9170.2	41.5	1790.6	83.1
40	1312.0	41.5	0836.2	124.5	9128.7	41.5	1707.5	82.9
50	1270.5	41.5	0711.7	124.3	9087.2	41.5	1624.6	82.9
51° 0'	1229.0	41.3	0587.4	124.1	9045.7	41.3	1541.7	82.8
10	1187.7	41.4	0463.3	124.0	9004.4	41.4	1458.9	82.6
20	1146.3	41.2	0339.3	123.8	8963.0	41.2	1376.3	82.6
30	1105.1	41.3	0215.5	123.7	8921.8	41.3	1293.7	82.4
40	1063.8	41.1	0091.8	123.5	8880.5	41.1	1211.3	82.3
50	1022.7	41.1	*9968.3	123.3	8839.4	41.1	1129.0	82.2
52° 0'	0981.6	41.1	9845.0	123.1	8798.3	41.1	1046.8	82.1
10	0940.5	41.0	9721.9	123.0	8757.2	41.0	0964.7	82.0
20	0899.5	40.9	9598.9	122.8	8716.2	40.9	0882.7	81.9
30	0858.6	40.8	9476.1	122.5	8675.3	40.8	0800.8	81.7
40	0817.8	40.8	9353.6	122.4	8634.5	40.8	0719.1	81.6
50	0777.0	40.8	9231.2	122.2	8593.7	40.8	0637.5	81.5
53° 0'	0736.2	40.6	9109.0	122.0	8552.9	40.6	0556.0	81.3
10	0695.6	40.6	8987.0	121.8	8512.3	40.6	0474.7	81.2
20	0655.0	40.6	8865.2	121.6	8471.7	40.6	0393.5	81.0
30	0614.4	40.4	8743.6	121.4	8431.3	40.4	0312.5	80.9
40	0574.0	40.4	8622.2	121.1	8390.7	40.4	0231.6	80.8
50	0533.6	40.3	8501.1	120.9	8350.3	40.3	0150.8	80.6
54° 0'	0493.3	40.2	8380.2	120.7	8310.0	40.3	0070.2	80.5
10	0453.1	40.2	8259.5	120.5	8269.7	40.1	*9989.7	80.3
20	0412.9	40.1	8139.0	120.3	8229.6	40.1	9909.4	80.2
30	0372.8	40.0	8018.7	120.0	8189.5	40.0	9829.2	80.0
40	0332.8	39.9	7898.7	119.7	8149.5	39.9	9749.2	79.8
50	0292.9	39.8	7779.0	119.5	8109.6	39.8	9669.4	79.7
55° 0'	0253.1	39.8	7659.5	119.3	8069.8	39.8	9589.7	79.5
10	0213.3	39.7	7540.2	119.0	8030.0	39.7	9510.2	79.3
20	0173.6	39.5	7421.2	118.7	7990.3	39.5	9430.9	79.2
30	0134.1	39.5	7302.5	118.5	7950.8	39.5	9351.7	79.0
40	0094.6	39.4	7184.0	118.2	7911.3	39.4	9272.7	78.8
50	0055.2	39.4	7065.8	118.0	7871.9	39.4	9193.9	78.6
56° 0'	0015.8		6947.8		7832.5		9115.3	

φ	$\log M$	Δ	$\log N$	Δ	$\log r$	Δ	$\log \frac{1}{r^2}$	Δ
	6.804	+	6.805	+	6.805	+	— 20	—
56° 0'	7303·5	117·7	6418·8	39·2	1861·1	78·5	6.389 628	16
10	7421·2	117·4	6458·0	39·1	1939·6	78·3	612	15
20	7538·6	117·1	6497·1	39·1	2017·9	78·0	597	16
30	7655·7	116·8	6536·2	38·9	2095·9	77·9	581	16
40	7772·5	116·5	6575·1	38·9	2173·8	77·7	565	15
50	7889·0	116·3	6614·0	38·7	2251·5	77·5	550	16
57° 0'	8005·3	115·9	6652·7	38·7	2329·0	77·3	6.389 534	15
10	8121·2	115·6	6691·4	38·5	2406·3	77·1	519	16
20	8236·8	115·4	6729·9	38·4	2483·4	76·8	503	15
30	8352·2	115·0	6768·3	38·4	2560·2	76·7	488	15
40	8467·2	114·7	6806·7	38·2	2636·9	76·5	473	16
50	8581·9	114·4	6844·9	38·1	2713·4	76·3	457	15
58° 0'	8696·3	114·0	6883·0	38·1	2789·7	76·0	6.389 442	15
10	8810·3	113·8	6921·1	37·9	2865·7	75·8	427	15
20	8924·1	113·4	6859·0	37·8	2941·5	75·6	412	15
30	9037·5	113·0	6996·8	37·7	3017·1	75·4	397	16
40	9150·5	112·8	7034·5	37·6	3092·5	75·2	381	15
50	9263·3	112·4	7072·1	37·4	3167·7	74·9	366	15
59° 0'	9375·7	112·0	7109·5	37·4	3242·6	74·7	6.389 351	14
10	9487·7	111·7	7146·9	37·2	3317·3	74·5	337	15
20	9599·4	111·4	7184·1	37·1	3391·8	74·2	322	15
30	9710·8	111·0	7221·2	37·0	3466·0	74·0	307	15
40	9821·8	110·6	7258·2	36·9	3540·0	73·7	292	15
50	9932·4	110·3	7295·1	36·7	3613·7	73·6	277	14
60° 0'	*0042·7	109·9	7331·8	36·7	3687·3	73·2	6.389 263	15
10	0152·6	109·5	7368·5	36·5	3760·5	73·0	248	15
20	0262·1	109·1	7405·0	36·4	3833·5	72·8	233	14
30	0371·2	108·8	7441·4	36·2	3906·3	72·5	219	15
40	0480·0	108·4	7447·6	36·2	3978·8	72·3	204	14
50	0588·4	108·0	7513·8	36·0	4051·1	72·0	190	15
61° 0'	0696·4	107·6	7549·8	35·8	4123·1	71·7	6.389 175	14
10	0804·0	107·2	7585·6	35·8	4194·8	71·5	161	14
20	0911·2	106·9	7621·4	35·6	4266·3	71·2	147	15
30	1018·1	106·4	7657·0	35·5	4337·5	71·0	132	14
40	1124·5	106·0	7692·5	35·3	4408·5	70·6	118	14
50	1230·5	105·6	7727·8	35·2	4479·1	70·5	104	14
62° 0'	1336·1	105·2	7763·0	35·1	4549·6	70·1	6.389 090	14
10	1441·3	104·8	7798·1	34·9	4619·7	69·8	076	14
20	1546·1	104·3	7833·0	34·8	4689·5	69·6	062	14
30	1650·4	104·0	7867·8	34·6	4759·1	69·3	048	14
40	1754·4	103·5	7902·4	34·5	4828·4	69·0	034	13
50	1857·9	103·1	7936·9	34·4	4897·4	68·7	021	14
63° 0'	1961·0	102·6	7971·3	34·2	4966·1	68·5	6.389 007	14
10	2063·6	102·3	8005·5	34·2	5034·6	68·1	388 993	14
20	2165·9	101·7	8039·6	33·9	5102·7	67·9	979	13
30	2267·6	101·4	8073·5	33·8	5170·6	67·5	966	14
40	2369·0	100·8	8107·3	33·6	5238·1	67·3	952	13
50	2469·8	100·5	8140·9	33·5	5305·4	66·9	939	13
64° 0'	2570·3		8174·4		5372·3		6.388 926	

φ	$\log W$	Δ	$\log [1]$	Δ	$\log [2]$	Δ	$\log V^2$	Δ
	9.999 —10	—	8.509 —10	—	8.508 —10	—	0.000	—
56° 0'	0015.8	39.2	6947.8	117.6	7832.5	39.2	9115.3	78.5
10	*9976.6	39.1	6880.2	117.4	7793.3	39.1	9036.8	78.2
20	9937.5	39.0	6712.8	117.1	7754.2	39.0	8958.6	78.1
30	9898.5	39.0	6595.7	116.9	7715.2	39.0	8880.5	77.9
40	9859.5	38.8	6478.8	116.5	7676.2	38.8	8802.6	77.7
50	9820.7	38.8	6362.3	116.2	7637.4	38.8	8724.9	77.4
57° 0'	9781.9	38.6	6246.1	116.0	7598.6	38.6	8647.5	77.3
10	9743.3	38.6	6130.1	115.6	7560.0	38.6	8570.2	77.1
20	9704.7	38.4	6014.5	115.3	7521.4	38.4	8493.1	76.9
30	9666.3	38.3	5899.2	115.0	7483.0	38.3	8416.2	76.7
40	9628.0	38.3	5784.2	114.7	7444.7	38.3	8339.5	76.5
50	9589.7	38.1	5669.5	114.4	7406.4	38.1	8263.0	76.2
58° 0'	9551.6	38.0	5555.1	114.1	7368.3	38.0	8186.8	76.1
10	9513.6	37.9	5441.0	113.7	7330.3	37.9	8110.7	75.8
20	9475.7	37.8	5327.3	113.4	7292.4	37.8	8034.9	75.6
30	9437.9	37.7	5213.9	113.1	7254.6	37.7	7959.3	75.4
40	9400.2	37.6	5100.8	112.8	7216.9	37.6	7883.9	75.1
50	9362.6	37.5	4988.0	112.3	7179.3	37.5	7808.8	75.0
59° 0'	9325.1	37.3	4875.7	112.1	7141.8	37.3	7733.8	74.7
10	9287.8	37.3	4763.6	111.7	7104.5	37.3	7659.1	74.4
20	9250.5	37.1	4651.9	111.4	7067.2	37.1	7584.7	74.3
30	9213.4	37.0	4540.5	110.9	7030.1	37.0	7510.4	74.0
40	9176.4	36.9	4429.6	110.7	6993.1	36.9	7436.4	73.7
50	9139.5	36.7	4318.9	110.1	6956.2	36.7	7362.7	73.5
60° 0'	9102.8	36.6	4208.7	109.9	6919.5	36.6	7289.2	73.3
10	9066.2	36.6	4098.8	109.6	6882.9	36.6	7215.9	73.0
20	9029.6	36.3	3989.2	109.1	6846.3	36.3	7142.9	72.8
30	8993.3	36.3	3880.1	108.8	6810.0	36.3	7070.1	72.5
40	8957.0	36.1	3771.3	108.4	6773.7	36.1	6997.6	72.3
50	8920.9	36.0	3662.9	108.0	6737.6	36.0	6925.3	72.0
61° 0'	8884.9	35.9	3554.9	107.6	6701.6	35.9	6853.3	71.7
10	8849.0	35.7	3447.3	107.2	6665.7	35.7	6781.6	71.5
20	8813.3	35.6	3440.1	106.8	6630.0	35.6	6710.1	71.2
30	8777.7	35.5	3233.3	106.5	6594.4	35.5	6638.9	70.9
40	8742.2	35.4	3126.8	106.0	6558.9	35.4	6568.0	70.7
50	8706.8	35.2	3020.8	105.6	6523.5	35.2	6497.3	70.4
62° 0'	8671.6	35.0	2915.2	105.2	6488.3	35.0	6426.9	70.2
10	8636.6	34.9	2810.0	104.8	6453.3	35.0	6356.7	69.8
20	8601.7	34.8	2705.2	104.3	6418.3	34.7	6286.9	69.6
30	8566.9	34.7	2600.9	104.0	6383.6	34.7	6217.3	69.3
40	8532.2	34.5	2496.9	103.5	6348.9	34.5	6148.0	69.0
50	8497.7	34.3	2393.4	103.1	6314.4	34.4	6079.0	68.7
63° 0'	8463.4	34.3	2290.3	102.6	6280.0	34.2	6010.3	68.4
10	8429.1	34.0	2187.7	102.2	6245.8	34.0	5941.9	68.2
20	8395.1	34.0	2085.5	101.8	6211.8	34.0	5873.7	67.8
30	8361.1	33.7	1983.7	101.3	6177.8	33.7	5805.9	67.6
40	8327.4	33.7	1882.4	100.9	6144.1	33.7	5738.3	67.2
50	8293.7	33.4	1781.5	100.4	6110.4	33.4	5671.1	67.0
64° 0'	8260.3		1681.1		6077.0		5604.1	

φ	$\log M$	A	$\log N$	A	$\log r$	A	$\log \frac{1}{r^2}$	A
	6.805	+	6.805	+	6.805	+	— 20	—
64° 0'	2570.3	99.9	8174.4	33.3	5372.3	68.7	6.388 926	14
10	2670.2	99.6	8207.7	33.2	5439.0	66.3	912	13
20	2769.8	99.0	8240.9	33.0	5505.3	66.1	899	13
30	2868.8	98.6	8273.9	32.9	5571.4	65.7	886	13
40	2967.4	98.1	8306.8	32.7	5637.1	65.4	873	14
50	3065.5	97.7	8339.5	32.5	5702.5	65.1	859	13
65° 0'	3163.2	97.2	8372.0	32.4	5767.6	64.8	6.388 846	12
10	3260.4	96.7	8404.4	32.3	5832.4	64.5	834	13
20	3357.1	96.2	8436.7	32.0	5896.9	64.1	821	13
30	3453.3	95.8	8468.7	31.9	5961.0	63.9	808	13
40	3549.1	95.2	8500.6	31.8	6024.9	63.5	795	13
50	3644.3	94.8	8532.4	31.6	6088.4	63.1	782	12
66° 0'	3739.1	94.3	8564.0	31.4	6151.5	62.9	6.388 770	13
10	3833.4	93.7	8595.4	31.3	6214.4	62.5	757	12
20	3927.1	93.3	8626.7	31.1	6276.1	62.2	745	13
30	4020.4	92.8	8657.8	30.9	6339.1	61.8	732	12
40	4113.2	92.2	8688.7	30.7	6400.9	61.5	720	12
50	4005.4	91.8	8719.4	30.6	6462.4	61.2	708	13
67° 0'	4297.2	91.2	8750.0	30.4	6523.6	60.8	6.388 695	12
10	4388.4	90.8	8780.4	30.3	6584.4	60.5	683	12
20	4479.2	90.2	8810.7	30.0	6644.9	60.2	671	12
30	4569.4	89.6	8840.7	29.9	6705.1	59.7	659	12
40	4659.0	89.2	8870.6	29.8	6764.8	59.5	647	12
50	4748.2	88.6	8900.4	29.4	6824.3	59.1	635	12
68° 0'	4836.8	88.1	8929.9	29.4	6883.4	58.7	6.388 623	11
10	4924.9	87.6	8959.3	29.2	6942.1	58.4	612	12
20	5012.5	87.0	8988.5	29.0	7000.5	58.0	600	12
30	5099.5	86.5	9017.5	28.8	7058.5	57.7	588	11
40	5186.0	86.0	9046.3	28.6	7116.2	57.2	577	12
50	5272.0	85.4	9074.9	28.5	7173.4	57.0	565	11
69° 0'	5357.4	84.8	9103.4	28.3	7230.4	56.5	6.388 554	11
10	5442.2	84.3	9131.7	28.1	7286.9	56.2	543	12
20	5526.5	83.7	9159.8	27.9	7343.1	55.9	531	11
30	5610.2	83.2	9187.7	27.7	7399.0	55.4	520	11
40	5693.4	82.7	9215.4	27.6	7454.4	55.1	509	11
50	5776.1	82.0	9243.0	27.3	7509.5	54.7	498	11
70° 0'	5858.1	81.5	9270.3	27.2	7564.2	54.4	6.388 487	11
10	5939.6	80.9	9297.5	27.0	7618.6	53.9	476	11
20	6020.5	80.4	9324.5	26.7	7672.5	53.6	465	10
30	6100.9	79.8	9351.2	26.6	7726.1	53.2	455	11
40	6180.7	79.2	9377.8	26.5	7779.3	52.8	444	11
50	6259.9	78.6	9404.3	26.2	7832.1	52.4	434	10
71° 0'	6338.5	78.1	9430.5	26.0	7884.5	52.0	6.388 423	
10	6416.6	77.4	9456.5	25.8	7936.5	51.7	413	
20	6494.0	76.5	9482.3	25.6	7988.2	51.2	402	
30	6570.9	76.3	9507.9	25.4	8039.4	50.9	392	
40	6647.2	75.6	9533.3	25.3	8090.3	50.4	382	
50	6722.8	75.1	9558.6	25.0	8140.7	50.1	372	
72° 0'	6797.9		9583.6		8190.8		6.388 362	

φ	$\log W$	Δ	$\log [1]$	Δ	$\log [2]$	Δ	$\log V^2$	Δ
	9.998 — 10	—	8.509 — 10	—	8.508 — 10	—	0.000	—
64° 0'	8260.3	33.4	1681.1	100.0	6077.0	33.4	5604.1	66.6
10	8226.9	33.1	1581.1	99.5	6043.6	33.1	5537.5	66.4
20	8193.8	33.1	1481.6	99.1	6010.5	33.1	5471.1	66.0
30	8160.7	32.8	1382.5	98.6	5977.4	32.8	5405.1	65.8
40	8127.9	32.7	1283.9	98.1	5944.6	32.7	5339.3	65.4
50	8095.2	32.6	1185.8	97.7	5911.9	32.6	5273.9	65.1
65° 0'	8062.6	32.4	1088.1	97.2	5879.3	32.4	5208.8	64.8
10	8030.2	32.2	0990.9	96.7	5846.9	32.2	5144.0	64.4
20	7998.0	32.1	0894.2	96.2	5814.7	32.1	5079.6	64.2
30	7965.9	31.9	0798.0	95.7	5782.6	31.9	5015.4	64.0
40	7934.0	31.8	0702.3	95.3	5750.7	31.8	4951.4	64.3
50	7902.2	31.5	0607.0	94.8	5718.9	31.6	4888.1	63.2
66° 0'	7870.7	31.5	0512.2	94.2	5687.3	31.4	4824.9	62.8
10	7839.2	31.2	0418.0	93.8	5655.9	31.2	4762.1	62.6
20	7808.0	31.1	0324.2	93.3	5624.7	31.1	4699.5	62.1
30	7776.9	30.9	0230.9	92.7	5593.6	30.9	4637.4	61.9
40	7746.0	30.8	0138.2	92.3	5562.7	30.8	4575.5	61.5
50	7715.2	30.6	0045.9	91.8	5531.9	30.6	4514.0	61.2
67° 0'	7684.6	30.4	*9954.1	91.2	5501.3	30.4	4452.8	60.8
10	7654.2	30.2	9862.9	90.7	5470.9	30.2	4392.0	60.5
20	7624.0	30.1	9772.2	90.2	5440.7	30.1	4331.5	60.1
30	7593.9	29.9	9682.0	89.7	5410.6	29.9	4271.4	59.8
40	7564.0	29.7	9592.3	89.2	5380.7	29.7	4211.6	59.6
50	7534.3	29.6	9503.1	88.6	5351.0	29.6	4152.2	58.9
68° 0'	7504.7	29.3	9414.5	88.1	5321.4	29.3	4093.1	58.8
10	7475.4	29.2	9326.4	87.6	5292.1	29.2	4034.3	58.3
20	7446.2	29.0	9238.8	87.0	5262.9	29.0	3976.0	58.0
30	7417.2	28.9	9151.8	86.5	5233.9	28.9	3918.0	57.7
40	7388.3	28.6	9065.3	85.9	5205.0	28.6	3860.3	57.3
50	7359.7	28.5	8979.4	85.4	5176.4	28.5	3803.0	56.9
69° 0'	7331.2	28.3	8894.0	84.9	5147.9	28.3	3746.1	56.6
10	7302.9	28.1	8809.1	84.3	5119.6	28.1	3689.5	56.2
20	7274.8	27.9	8724.8	83.7	5091.5	27.9	3633.3	55.8
30	7246.9	27.7	8641.1	83.2	5063.6	27.7	3577.5	55.5
40	7219.2	27.5	8557.9	82.6	5035.9	27.5	3522.0	55.1
50	7191.7	27.4	8475.3	82.1	5008.4	27.4	3466.9	54.7
70° 0'	7164.3	27.2	8393.2	81.5	4981.0	27.2	3412.2	54.3
10	7137.1	26.9	8311.7	80.9	4953.8	26.9	3357.9	54.0
20	7110.2	26.8	8230.8	80.4	4926.9	26.8	3303.9	53.5
30	7083.4	26.6	8150.4	79.7	4900.1	26.6	3250.4	53.2
40	7056.8	26.4	8070.7	79.3	4873.5	26.4	3197.2	52.8
50	7030.4	26.2	7991.4	78.6	4847.1	26.2	3144.4	52.5
71° 0'	7004.2	26.0	7912.8	78.0	4820.9	26.0	3091.9	52.0
10	6978.2	25.9	7834.8	77.5	4794.9	25.9	3039.9	51.6
20	6952.3	25.6	7757.3	76.8	4769.0	25.6	2988.3	51.3
30	6926.7	25.4	7680.5	76.3	4743.4	25.4	2937.0	50.8
40	6901.3	25.2	7604.2	75.7	4718.0	25.2	2886.2	50.5
50	6876.1	25.1	7528.5	75.1	4692.8	25.1	2835.7	50.0
72° 0'	6851.0		7453.4		4667.7		2785.7	

φ	$\log M$	A	$\log N$	A	$\log r$	A	$\log \frac{1}{r^2}$	A
	6.805	+	6.805	+	6.805	+	— 20	—
72° 0'	6798	74	9584	24	8191	49	6.388 362	10
10	6872	74	9608	25	8240	50	352	10
20	6946	74	9633	25	8290	49	342	10
30	7020	72	9658	24	8339	48	332	9
40	7092	72	9682	24	8387	48	323	10
50	7164	72	9706	24	8435	48	313	10
73° 0'	7236	71	9730	23	8483	47	6.388 303	9
10	7307	70	9753	24	8530	47	294	9
20	7377	70	9777	23	8577	46	285	10
30	7447	69	9800	23	8623	46	275	9
40	7516	68	9823	23	8669	46	266	9
50	7584	68	9846	22	8715	45	257	9
74° 0'	7652	67	9868	23	8760	45	6.388 248	9
10	7719	66	9891	22	8805	44	239	9
20	7785	66	9913	22	8849	44	230	9
30	7851	65	9935	21	8893	43	221	8
40	7916	65	9956	22	8936	43	213	9
50	7981	64	9978	21	8979	43	204	8
75° 0'	8045	63	9999	21	9022	42	6.388 196	9
10	8108	63	*0020	21	9064	42	187	8
20	8171	62	0041	21	9106	41	179	8
30	8233	61	0062	20	9147	41	171	9
40	8294	61	0082	21	9188	41	162	8
50	8355	60	0103	20	9229	40	154	8
76° 0'	8415	59	0123	19	9269	39	6.388 146	8
10	8474	59	0142	20	9308	40	138	8
20	8533	58	0162	19	9348	38	130	7
30	8591	58	0181	20	9386	39	123	8
40	8649	57	0201	19	9425	38	115	8
50	8706	56	0220	18	9463	37	107	7
77° 0'	8762	55	0238	19	9500	37	6.388 100	7
10	8817	55	0257	18	9537	37	093	8
20	8872	54	0275	18	9574	36	085	7
30	8926	54	0293	18	9610	35	078	7
40	8980	52	0311	17	9645	35	071	7
50	9032	53	0328	18	9680	35	064	7
78° 0'	9085	51	0346	17	9715	34	6.388 057	7
10	9136	51	0363	17	9749	35	050	7
20	9187	50	0380	17	9783	34	043	6
30	9237	49	0397	16	9817	33	037	7
40	9286	49	0413	16	9850	32	030	6
50	9335	48	0429	16	9882	32	024	7
79° 0'	9383	47	0445	16	9914	32	6.388 017	6
10	9430	47	0461	16	9946	31	388 011	6
20	9477	46	0477	15	9977	30	388 005	6
30	9523	45	0492	15	*0007	31	387 999	7
40	9568	45	0507	15	0038	29	992	5
50	9613	44	0522	15	0067	30	987	6
80° 0'	9657		0537		0097		6.387 981	

φ	$\log W$	Δ	$\log [1]$	Δ	$\log [2]$	Δ	$\log V^2$	Δ
	9.998 — 10	—	8.508 — 10	—	8.508 — 10	—	0.000	—
72° 0'	6851	25	7453	74	4668	25	2786	50
10	6826	24	7379	74	4643	25	2736	49
20	6802	25	7305	73	4618	24	2687	49
30	6777	24	7232	73	4594	24	2638	49
40	6753	24	7159	72	4570	25	2589	48
50	6729	24	7087	72	4545	23	2541	47
73° 0'	6705	24	7015	71	4522	24	2494	48
10	6681	23	6944	70	4498	23	2446	46
20	6658	23	6874	69	4475	24	2400	47
30	6635	23	6805	69	4451	23	2353	46
40	6612	23	6736	69	4428	22	2307	45
50	6589	23	6667	67	4406	23	2262	45
74° 0'	6566	22	6600	67	4383	22	2217	45
10	6544	22	6533	67	4361	22	2172	45
20	6522	22	6466	66	4339	22	2127	43
30	6500	22	6400	65	4317	22	2084	44
40	6478	21	6335	65	4295	22	2040	43
50	6457	22	6270	64	4273	21	1997	43
75° 0'	6435	21	6206	63	4252	21	1954	42
10	6414	21	6143	63	4231	21	1912	42
20	6393	20	6080	62	4210	21	1870	41
30	6373	21	6018	61	4189	20	1829	41
40	6352	20	5957	61	4169	20	1788	40
50	6332	20	5896	60	4149	20	1748	40
76° 0'	6312	20	5836	59	4129	20	1708	40
10	6292	19	5777	59	4109	20	1668	39
20	6273	20	5718	58	4089	19	1629	39
30	6253	19	5660	58	4070	19	1590	38
40	6234	19	5602	56	4051	19	1552	38
50	6215	19	5546	57	4032	19	1514	38
77° 0'	6196	18	5489	55	4013	18	1476	37
10	6178	18	5434	55	3995	19	1439	36
20	6160	18	5379	54	3976	18	1403	36
30	6142	18	5325	53	3958	18	1367	36
40	6124	18	5272	53	3940	17	1331	35
50	6106	17	5219	52	3923	17	1296	35
78° 0'	6089	17	5167	52	3906	18	1261	34
10	6072	17	5115	50	3888	17	1227	34
20	6055	17	5065	50	3871	16	1193	33
30	6038	16	5015	50	3855	17	1160	33
40	6022	17	4965	49	3838	16	1127	33
50	6005	16	4916	48	3822	16	1094	32
79° 0'	5989	15	4868	47	3806	16	1062	31
10	5974	16	4821	47	3790	15	1031	31
20	5958	15	4774	46	3775	16	1000	31
30	5943	15	4728	45	3759	16	0969	30
40	5928	15	4683	45	3744	15	0939	30
50	5913	15	4638	43	3729	14	0909	29
80° 0'	5898		4595		3715		0880	

φ	$\log M$	Δ	$\log N$	Δ	$\log r$	Δ	$\log \frac{1}{r^2}$	Δ
	6.805	+	6.806	+	6.806	+	— 20	—
80° 0'	9657	43	0537	14	0097	28	6.387 981	6
10	9700	42	0551	14	0125	29	975	6
20	9742	42	0565	14	0154	27	969	5
30	9784	41	0579	14	0181	28	964	6
40	9825	41	0593	13	0209	27	958	5
50	9866	39	0606	13	0236	26	953	5
81° 0'	9905	39	0619	13	0262	26	6.387 948	6
10	9944	39	0632	13	0288	26	942	5
20	9983	37	0645	13	0314	25	937	5
30	*0020	37	0658	12	0339	24	932	5
40	0057	36	0670	12	0363	25	927	5
50	0093	36	0682	12	0388	23	922	4
82° 0'	0129	34	0694	11	0411	23	6.387 918	5
10	0163	34	0705	12	0434	23	913	4
20	0197	34	0717	11	0457	22	909	5
30	0231	32	0728	11	0479	22	904	3
40	0263	32	0739	10	0501	21	901	5
50	0295	31	0749	11	0522	21	896	5
83° 0'	0326	31	0760	10	0543	20	6.387 891	4
10	0357	30	0770	10	0563	20	887	4
20	0387	28	0780	9	0583	19	883	3
30	0415	29	0789	10	0602	19	880	4
40	0444	27	0799	9	0621	19	876	4
50	0471	27	0808	9	0640	18	872	4
84° 0'	0498	26	0817	9	0658	17	6.387 868	3
10	0524	26	0826	8	0675	17	865	3
20	0550	24	0834	8	0692	16	862	4
30	0574	24	0842	8	0708	16	858	3
40	0598	24	0850	8	0724	16	855	3
50	0622	22	0858	8	0740	15	852	3
85° 0'	0644	22	0866	7	0755	14	6.387 849	3
10	0666	21	0873	7	0769	14	846	3
20	0687	20	0880	7	0783	14	843	2
30	0707	20	0887	6	0797	13	841	3
40	0727	18	0893	6	0810	12	838	2
50	0745	18	0899	6	0822	12	836	3
86° 0'	0763	18	0905	6	0834	12	6.387 833	2
10	0781	16	0911	6	0846	11	831	2
20	0797	16	0917	5	0857	11	829	3
30	0813	16	0922	5	0868	10	826	2
40	0829	14	0927	5	0878	9	824	1
50	0843	13	0932	4	0887	10	823	2
87° 0'	0856	37	0936	13	0897	24	6.387 821	5
30	0893	30	0949	10	0921	20	816	4
88 0	0923	23	0959	7	0941	15	6.387 812	3
30	0946	17	0966	6	0956	12	809	3
89 0	0963	10	0972	3	0968	6	6.387 806	1
30	0973	3	0975	1	0974	2	805	0
90° 0'	0976		0976		0976		6.387 805	

φ	$\log W$	Δ	$\log [1]$	Δ	$\log [2]$	Δ	$\log v^2$	Δ
	9.998—10	—	8.508—10	—	8.508—10	—	0.000—10	—
80° 0'	5898	14	4595	44	3715	15	0880	29
10	5884	14	4551	42	3700	14	0851	28
20	5870	14	4509	42	3686	14	0823	28
30	5856	14	4467	41	3672	13	0795	28
40	5842	14	4426	40	3659	14	0767	26
50	5828	13	4386	40	3645	14	0741	27
81° 0'	5815	13	4346	39	3631	12	0714	26
10	5802	12	4307	38	3619	13	0688	25
20	5790	13	4269	38	3606	12	0663	26
30	5777	12	4231	37	3594	13	0637	24
40	5765	12	4194	36	3581	12	0613	24
50	5753	12	4158	35	3569	12	0589	24
82° 0'	5741	12	4123	35	3557	11	0565	23
10	5729	11	4088	34	3546	11	0542	23
20	5718	11	4054	33	3535	12	0519	22
30	5707	11	4021	33	3523	10	0497	22
40	5696	11	3988	32	3513	11	0475	21
50	5685	10	3956	31	3502	10	0454	21
83° 0'	5675	10	3925	31	3492	11	0433	20
10	5665	10	3894	29	3481	10	0413	20
20	5655	10	3865	29	3471	9	0393	19
30	5645	9	3836	29	3462	10	0374	19
40	5636	9	3807	27	3452	9	0355	18
50	5627	9	3780	27	3443	9	0337	18
84° 0'	5618	9	3753	26	3434	8	0319	18
10	5609	9	3727	25	3426	9	0301	16
20	5600	8	3702	25	3417	8	0285	17
30	5592	8	3677	24	3409	8	0268	16
40	5584	8	3653	23	3401	8	0252	15
50	5576	7	3630	23	3393	7	0237	15
85° 0'	5569	7	3607	21	3386	8	0222	15
10	5562	7	3586	21	3378	7	0207	14
20	5555	7	3565	21	3371	6	0193	13
30	5548	6	3544	19	3365	7	0180	13
40	5542	7	3525	19	3358	6	0167	13
50	5535	6	3506	18	3352	6	0154	12
86° 0'	5529	6	3488	18	3346	6	0142	12
10	5523	5	3470	16	3340	5	0130	11
20	5518	5	3454	16	3335	6	0119	10
30	5513	5	3438	15	3329	5	0109	10
40	5508	5	3423	14	3324	5	0099	10
50	5503	5	3319	14	3319	4	0089	9
87° 0'	5498	12	3395	37	3315	12	0080	24
30	5486	10	3358	30	3303	10	0056	20
88° 0'	5476	8	3328	23	3293	8	0036	16
30	5468	5	3305	17	3285	6	0020	11
89° 0'	5463	4	3288	10	3279	3	0009	7
30	5459	1	3278	3	3276	1	0002	2
90° 0'	5458		3275		3275		0000	

φ	1° Länge in Kilometern	Δ	φ	1° Breite in Kilometern	Δ	1 Gradabteilung	
						in Q.Kilometern	in geogr. Q.Meilen
0°	111,3066	—	0°—1°	110,5638	+	12 305,86	223,4873
1	111,2897	169	1—2	110,5645	7	12 302,21	223,4210
2	111,2392	505	2—3	110,5658	13	12 294,91	223,2885
3	111,1550	842	3—4	110,5678	20	12 283,97	223,0898
4	111,0372	1178	4—5	110,5705	27	12 269,38	222,8249
		1514			34		
5°	110,8858	1849	5°—6°	110,5739	40	12 251,16	222,4939
6	110,7009	2185	6—7	110,5779	47	12 229,30	222,0968
7	110,4824	2519	7—8	110,5826	53	12 203,81	221,6339
8	110,2305	2853	8—9	110,5879	60	12 174,69	221,1051
9	109,9452	3186	9—10	110,5939	66	12 141,95	220,5106
10°	109,6266	3518	10°—11°	110,6005	72	12 105,61	219,8505
11	109,2748	3848	11—12	110,6077	79	12 065,66	219,1250
12	108,8900	4179	12—13	110,6156	85	12 022,12	218,3343
13	108,4721	4507	13—14	110,6241	90	11 975,00	217,4785
14	108,0214	4835	14—15	110,6331	97	11 924,30	216,5578
15°	107,5379	5160	15°—16°	110,6428	103	11 870,05	215,5725
16	107,0219	5485	16—17	110,6531	108	11 812,25	214,5228
17	106,4734	5808	17—18	110,6639	113	11 750,92	213,4089
18	105,8926	6129	18—19	110,6752	119	11 686,07	212,2312
19	105,2797	6449	19—20	110,6871	125	11 617,71	210,9899
20°	104,6348	6766	20°—21°	110,6996	130	11 545,87	209,6852
21	103,9582	7082	21—22	110,7126	134	11 470,56	208,3175
22	103,2500	7395	22—23	110,7260	139	11 391,81	206,8871
23	102,5105	7707	23—24	110,7399	144	11 309,62	205,3945
24	101,7398	8016	24—25	110,7543	148	11 224,02	203,8399
25°	100,9382	8323	25°—26°	110,7691	153	11 135,03	202,2237
26	100,1059	8627	26—27	110,7844	157	11 042,66	200,5464
27	99,2432	8930	27—28	110,8001	161	10 946,96	198,8083
28	98,3502	9228	28—29	110,8162	164	10 847,94	197,0099
29	97,4274	9526	29—30	110,8326	168	10 745,61	195,1516
30°	96,4748	9819	30°—31°	110,8494	172	10 640,03	193,2340
31	95,4929	1,0110	31—32	110,8666	174	10 531,20	191,2575
32	94,4819	1,0398	32—33	110,8840	178	10 419,15	189,2226
33	93,4421	1,0683	33—34	110,9018	180	10 303,91	187,1298
34	92,3738	1,0965	34—35	110,9198	182	10 185,52	184,9797
35°	91,2773	1,1244	35°—36°	110,9380	185	10 064,01	182,7728
36	90,1529	1,1519	36—37	110,9565	187	9 939,40	180,5098
37	89,0010	1,1791	37—38	110,9752	188	9 811,73	178,1912
38	87,8219	1,2059	38—39	110,9940	191	9 681,03	175,8176
39	86,6160	1,2324	39—40	111,0131	191	9 547,34	173,3897
40°	85,3836	1,2585	40°—41°	111,0322	193	9 410,70	170,9081
41	84,1251	1,2843	41—42	111,0515	193	9 271,14	168,3735
42	82,3408	1,3097	42—43	111,0708	194	9 128,69	165,7866
43	81,5311	1,3346	43—44	111,0902	195	8 983,41	163,1481
44	80,1965	1,3592	44—45	111,1097		8 835,32	160,4587
45°	78,8373		0°—45°	4984,4393		499 699,59	9075,0670

1 Kilometer = 0,134 76292 geogr. Meilen

(log = 9.129 5704·3)

1 Q.Kilometer = 0,018 161046 geogr. Q.Meilen

(log = 8.259 1408·6)

φ	1° Länge in Kilometern	Δ	φ	1° Breite in Kilometern	Δ	1 Gradabteilung	
						in Q.Kilometern	in geogr. Q.Meilen
45°	78,8373	—	45°—46°	111,1292	+	8 684,47	157,7192
46	77,4539	1,3834	46 —47	111,1487	195	8 530,91	154,9303
47	76,0468	1,4071	47 —48	111,1681	194	8 374,68	152,0928
48	74,6163	1,4305	48 —49	111,1875	194	8 215,81	149,2076
49	73,1629	1,4534	49 —50	111,2068	193	8 054,35	146,2754
		1,4759			192		
50°	71,6870	—	50°—51°	111,2260	191	7 890,36	143,2972
51	70,1891	1,4979	51 —52	111,2451	189	7 723,87	140,2736
52	68,6696	1,5195	52 —53	111,2640	188	7 554,95	137,2057
53	67,1290	1,5406	53 —54	111,2828	186	7 383,62	134,0943
54	65,5677	1,5613	54 —55	111,3014	183	7 209,96	130,9403
		1,5814					
55°	63,9863	—	55°—56°	111,3197	182	7 033,99	127,7446
56	62,3851	1,6012	56 —57	111,3379	178	6 855,79	124,5083
57	60,7647	1,6204	57 —58	111,3557	176	6 675,40	121,2323
58	59,1256	1,6391	58 —59	111,3733	173	6 492,88	117,9175
59	57,4682	1,6574	59 —60	111,3906	169	6 308,28	114,5650
		1,6751					
60°	55,7931	—	60°—61°	111,4075	166	6 121,66	111,1757
61	54,1008	1,6923	61 —62	111,4241	162	5 933,07	107,7507
62	52,3918	1,7090	62 —63	111,4403	159	5 742,57	104,2911
63	50,6665	1,7253	63 —64	111,4562	154	5 550,22	100,7979
64	48,9257	1,7408	64 —65	111,4716	150	5 356,09	97,2721
		1,7560					
65°	47,1697	—	65°—66°	111,4866	145	5 160,22	93,7150
66	45,3991	1,7706	66 —67	111,5011	141	4 962,68	90,1275
67	43,6145	1,7846	67 —68	111,5152	137	4 763,54	86,5108
68	41,8163	1,7982	68 —69	111,5289	131	4 562,85	82,8661
69	40,0052	1,8111	69 —70	111,5420	126	4 360,68	79,1945
		1,8234					
70°	38,1818	—	70°—71°	111,5546	120	4 157,09	75,4971
71	36,3465	1,8353	71 —72	111,5666	116	3 952,15	71,7751
72	34,4999	1,8466	72 —73	111,5782	109	3 745,92	68,0298
73	32,6427	1,8572	73 —74	111,5891	104	3 538,47	64,2623
74	30,7753	1,8674	74 —75	111,5995	99	3 329,86	60,4738
		1,8769					
75°	28,8984	—	75°—76°	111,6094	92	3 120,17	56,6656
76	27,0125	1,8859	76 —77	111,6186	85	2 909,45	52,8388
77	25,1182	1,8943	77 —78	111,6271	80	2 697,79	48,9947
78	23,2162	1,9020	78 —79	111,6351	74	2 485,23	45,1345
79	21,3069	1,9093	79 —80	111,6425	67	2 271,87	41,2595
		1,9159					
80°	19,3910	—	80°—81°	111,6492	61	2 057,76	37,3710
81	17,4691	1,9219	81 —82	111,6553	55	1 842,97	33,4703
82	15,5418	1,9273	82 —83	111,6608	47	1 627,58	29,5585
83	13,6097	1,9321	83 —84	111,6655	40	1 411,65	25,6371
84	11,6733	1,9364	84 —85	111,6695	34	1 195,26	21,7072
		1,9400					
85°	9,7333	—	85°—86°	111,6729	28	978,48	17,7702
86	7,7903	1,9430	86 —87	111,6757	20	761,37	13,8273
87	5,8448	1,9455	87 —88	111,6777	14	544,02	9,8799
88	3,8976	1,9472	88 —89	111,6791	7	326,48	5,9292
89	1,9491	1,9485	89 —90	111,6798		108,84	1,9767
		1,9491					
90°	0,0000	—	45°—90°	5016,4165		208 565,31	3787,7641
			0°—45°	4984,4893		499 699,59	9075,0670
			0°—90°	10000,8558		708 264,90	12862,8311

1 geogr. Meile = 7,420 43854 Kilom. (log = 0.870 42957)

1 geogr. Q.Meile = 55,062 9081 Q.Kilom. (log = 1.740 85914)

φ	m	Differenzen		φ	m	Differenzen	
		+	-			+	-
40° 0'	4 429 084,788 ^m	18 504,034 ^m	0,533 ^m	48° 0'	5 317 885,232 ^m	18 529,905 ^m	0,539 ^m
10	447 588,822	18 504,567	0,533	10	336 415,137	18 530,444	0,537
20	466 093,389	18 505,100	0,534	20	354 945,581	18 530,981	0,538
30	484 598,489	18 505,634	0,535	30	373 476,562	18 531,519	0,537
40	503 104,123	18 506,169	0,535	40	392 008,081	18 532,056	0,538
50	521 610,292	18 506,704	0,535	50	410 540,137	18 532,594	0,536
41° 0'	4 540 116,996 ^m	18 507,239 ^m	0,535 ^m	49° 0'	5 429 072,731 ^m	18 533,130 ^m	0,535
10	558 624,235	18 507,774	0,535	10	447 605,861	18 533,665	0,537
20	577 132,009	18 508,309	0,537	20	466 139,526	18 534,202	0,535
30	595 640,318	18 508,846	0,537	30	484 673,728	18 534,737	0,534
40	614 149,164	18 509,383	0,538	40	503 208,465	18 535,271	0,535
50	632 658,547	18 509,921	0,538	50	521 743,736	18 535,806	0,533
42° 0'	4 651 168,468 ^m	18 510,459 ^m	0,538 ^m	50° 0'	5 540 279,542 ^m	18 536,339 ^m	0,534 ^m
10	669 678,927	18 510,997	0,539	10	558 815,881	18 536,873	0,532
20	688 189,924	18 511,536	0,539	20	577 352,754	18 537,405	0,532
30	706 701,460	18 512,075	0,539	30	595 890,159	18 537,937	0,532
40	725 213,535	18 512,614	0,539	40	614 428,096	18 538,469	0,530
50	743 726,149	18 513,153	0,539	50	632 966,565	18 538,999	0,531
43° 0'	4 762 239,302 ^m	18 513,692 ^m	0,539 ^m	51° 0'	5 651 505,564 ^m	18 539,530 ^m	0,529 ^m
10	780 752,994	18 514,231	0,539	10	670 045,094	18 540,059	0,530
20	799 267,225	18 514,770	0,541	20	688 585,153	18 540,589	0,527
30	817 781,995	18 515,311	0,542	30	707 125,742	18 541,116	0,528
40	836 297,306	18 515,853	0,540	40	725 666,858	18 541,644	0,528
50	854 813,159	18 516,393	0,541	50	744 208,502	18 542,172	0,525
44° 0'	4 873 329,552 ^m	18 516,934 ^m	0,540 ^m	52° 0'	5 762 750,674 ^m	18 542,697 ^m	0,525 ^m
10	891 846,486	18 517,474	0,541	10	781 293,371	18 543,222	0,526
20	910 363,960	18 518,015	0,540	20	799 846,593	18 543,748	0,523
30	928 881,975	18 518,555	0,542	30	818 380,341	18 544,271	0,523
40	947 400,530	18 519,097	0,541	40	836 924,612	18 544,794	0,522
50	965 919,627	18 519,638	0,542	50	855 469,406	18 545,316	0,522
45° 0'	4 984 439,265 ^m	18 520,180 ^m	0,540 ^m	53° 0'	5 874 014,722 ^m	18 545,838	0,520 ^m
10	5 002 959,445	18 520,720	0,541	10	892 560,560	18 546,358	0,520
20	5 021 480,165	18 521,261	0,542	20	911 106,918	18 546,878	0,519
30	5 040 001,426	18 521,803	0,541	30	929 653,796	18 547,397	0,517
40	5 058 523,229	18 522,344	0,541	40	948 201,193	18 547,914	0,518
50	5 077 045,573	18 522,885	0,540	50	966 749,107	18 548,432	0,515
46° 0'	5 095 568,458 ^m	18 523,425 ^m	0,542 ^m	54° 0'	5 985 297,539 ^m	18 548,947 ^m	0,516 ^m
10	114 091,883	18 523,967	0,541	10	6 003 846,486	18 549,463	0,513
20	132 615,850	18 524,508	0,540	20	6 022 395,949	18 549,976	0,514
30	151 140,358	18 525,048	0,540	30	6 040 945,925	18 550,490	0,512
40	169 665,406	18 525,588	0,541	40	6 059 496,415	18 551,002	0,510
50	188 190,994	18 526,129	0,540	50	6 078 047,417	18 551,512	0,511
47° 0'	5 206 717,123 ^m	18 526,669 ^m	0,540 ^m	55° 0'	6 096 598,929 ^m	18 552,023 ^m	0,509 ^m
10	225 243,792	18 527,209	0,540	10	115 150,952	18 552,532	0,507
20	243 771,001	18 527,749	0,539	20	133 703,484	18 553,039	0,506
30	262 298,750	18 528,288	0,540	30	152 256,523	18 553,546	0,507
40	280 827,038	18 528,828	0,538	40	170 810,069	18 554,052	0,504
50	299 355,866	18 529,366		50	189 364,121	18 554,556	
48° 0'	5 317 885,232 ^m			56° 0'	6 207 918,677		

Meridian- bogen	Mittelbreite φ							Meridian- bogen
	0°	30°	45°	50°	55°	60°	75°	
m	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi$	m
100 ^m	3,26"	3,25"	3,24"	3,24"	3,23"	3,23"	3,23"	100 ^m
200	6,51	6,50	6,48	6,47	6,47	6,46	6,45	200
300	9,77	9,74	9,72	9,71	9,70	9,69	9,68	300
400	13,02	12,99	12,96	12,95	12,94	12,93	12,90	400
500	16,28	16,24	16,20	16,18	16,17	16,16	16,13	500
600 ^m	19,54	19,49"	19,44"	19,42"	19,40"	19,39"	19,35"	600 ^m
700	22,79	22,74	22,68	22,66	22,64	22,62	22,58	700
800	26,05	25,98	25,92	25,90	25,85	25,85	25,81	800
900	29,30	29,23	29,16	29,13	29,11	29,08	29,03	900
1000 ^m	0' 32,6"	0' 32,5"	0' 32,4"	0' 32,4"	0' 32,3"	0' 32,3"	0' 32,3"	1000 ^m
2000	1 5,1	1 5,0	1 4,8	1 4,7	1 4,7	1 4,6	1 4,5	2000
3000	1 37,7	1 37,4	1 37,2	1 37,1	1 37,0	1 36,9	1 36,8	3000
4000	2 10,2	2 9,9	2 9,6	2 9,5	2 9,4	2 9,3	2 9,0	4000
5000	2 42,8	2 42,4	2 42,0	2 41,8	2 41,7	2 41,6	2 41,3	5000
6000 ^m	3' 15,4"	3' 14,9"	3' 14,4"	3' 14,2"	3' 14,0"	3' 13,9"	3' 13,5"	6000 ^m
7000	3 47,9	3 47,4	3 46,8	3 46,6	3 46,4	3 46,2	3 45,8	7000
8000	4 20,5	4 19,8	4 19,2	4 19,0	4 18,7	4 18,5	4 18,1	8000
9000	4 53,0	4 52,3	4 51,6	4 51,3	4 51,1	4 50,8	4 50,3	9000
10 000 ^m	5' 25,6"	5' 24,8"	5' 24,0"	5' 23,7"	5' 23,4"	5' 23,2"	5' 22,6"	10 000 ^m
20 000	10 51,2	10 49,6	10 48,0	10 47,4	10 46,8	10 46,3	10 45,1	20 000
30 000	16 16,8	16 14,4	16 11,9	16 11,1	16 10,2	16 9,4	16 7,7	30 000
40 000	21 42,4	21 39,2	21 35,9	21 34,8	21 33,7	21 32,6	21 30,3	40 000
50 000	27 8,0	27 3,9	26 59,6	26 58,5	26 57,1	26 55,8	26 52,8	50 000
60 000 ^m	32' 33,6"	32' 28,7"	32' 23,9"	32' 22,2"	32' 20,5	32' 19,0"	32' 15,4"	60 000 ^m
70 000	37 59,3	37 53,5	37 47,8	37 45,9	37 43,9	37 42,1	37 38,0	70 000
80 000	43 24,9	43 18,3	43 11,8	43 9,5	43 7,3	43 5,3	43 0,5	80 000
90 000	48 50,5	48 43,1	48 35,8	48 33,2	48 30,7	48 28,5	48 23,1	90 000
100 000	54 16,1	54 7,9	53 59,8	53 57,0	53 54,2	53 51,6	53 45,7	100 000
$\Delta\varphi$	m	m	m	m	m	m	m	$\Delta\varphi$
1"	30,7121 ^m	30,7892 ^m	30,8665 ^m	30,8935 ^m	30,9196 ^m	30,9442 ^m	31,0013 ^m	1"
10"	307,1 ^m	307,9 ^m	308,7 ^m	308,9	309,2 ^m	309,4	310,0 ^m	10"
20"	614,2	615,8	617,3	617,9	618,4	618,9	620,0	20"
30"	921,4	923,7	926,0	926,8	927,6	928,3	930,0	30"
40"	1228,5	1231,6	1234,7	1235,7	1236,8	1237,8	1240,0	40"
50"	1535,6	1539,5	1543,3	1544,7	1546,0	1547,2	1550,1	50"
60" = 1'	1843 ^m	1847 ^m	1852 ^m	1854 ^m	1855 ^m	1857 ^m	1860 ^m	60" = 1'
2'	3685	3694	3704	3707	3710	3713	3720	2'
3'	5528	5542	5556	5561	5566	5570	5580	3'
4'	7371	7389	7408	7414	7421	7427	7440	4'
5'	9214	9237	9260	9268	9276	9283	9300	5'
6'	11 056 ^m	11 084 ^m	11 112 ^m	11 122 ^m	11 131 ^m	11 140 ^m	11 160 ^m	6'
7'	12 899	12 931	12 964	12 975	12 986	12 997	13 021	7'
8'	14 742	14 779	14 816	14 829	14 841	14 853	14 881	8'
9'	16 585	16 626	16 668	16 682	16 697	16 710	16 741	9'
10'	18 427	18 474	18 520	18 536	18 552	18 567	18 601	10'

Breite φ	Bogen		Zeit		Breite φ	Bogen		Zeit	
	1'	1''	1 ^m	1 ^s		1'	1''	1 ^m	1 ^s
0°	1855 ^m	30,9 ^m	27 827 ^m	464 ^m	45°	1314 ^m	21,9 ^m	19 709 ^m	328 ^m
1	1855	30,9	27 822	464	46	1291	21,5	19 363	323
2	1854	30,9	27 810	464	47	1267	21,1	19 012	317
3	1853	30,9	27 789	463	48	1244	20,7	18 654	311
4	1851	30,8	27 759	463	49	1219	20,3	18 291	305
5°	1848 ^m	30,8 ^m	27 721 ^m	462 ^m	50°	1195 ^m	19,9 ^m	17 922 ^m	299 ^m
6	1845	30,8	27 675	461	51	1170	19,5	17 547	292
7	1841	30,7	27 621	460	52	1144	19,1	17 167	286
8	1837	30,6	27 558	459	53	1119	18,6	16 782	280
9	1832	30,5	27 486	458	54	1093	18,2	16 393	273
10°	1827 ^m	30,5 ^m	27 407 ^m	457 ^m	55°	1066 ^m	17,8 ^m	15 997 ^m	267 ^m
11	1821	30,4	27 319	455	56	1040	17,3	15 596	260
12	1815	30,2	27 222	454	57	1013	16,9	15 191	253
13	1808	30,1	27 118	452	58	985	16,4	14 781	246
14	1800	30,0	27 005	450	59	958	16,0	14 367	239
15°	1792 ^m	29,9 ^m	26 884 ^m	448 ^m	60	930 ^m	15,5	13 948 ^m	232 ^m
16	1784	29,7	26 755	446	61	902	15,0	13 525	225
17	1775	29,6	26 618	444	62	873	14,6	13 098	218
18	1765	29,4	26 473	441	63	844	14,1	12 667	211
19	1755	29,2	26 320	439	64	815	13,6	12 231	204
20°	1744 ^m	29,1 ^m	26 159 ^m	436 ^m	65°	786 ^m	13,1 ^m	11 792 ^m	197 ^m
21	1733	28,9	25 990	433	66	757	12,6	11 350	189
22	1721	28,7	25 812	430	67	727	12,1	10 904	182
23	1709	28,5	25 628	427	68	697	11,6	10 454	174
24	1696	28,3	25 435	424	69	667	11,1	10 001	167
25°	1682 ^m	28,0 ^m	25 235 ^m	421 ^m	70°	636 ^m	10,6 ^m	9545 ^m	159 ^m
26	1668	27,8	25 026	417	71	606	10,1	9086	151
27	1654	27,6	24 811	414	72	575	9,6	8625	144
28	1639	27,3	24 588	410	73	544	9,1	8161	136
29	1624	27,1	24 357	406	74	513	8,5	7694	128
30°	1608 ^m	26,8 ^m	24 119 ^m	402 ^m	75°	482 ^m	8,0 ^m	7225 ^m	120 ^m
31	1592	26,5	23 873	398	76	450	7,5	6753	113
32	1575	26,2	23 620	394	77	419	7,0	6280	105
33	1557	26,0	23 361	389	78	387	6,4	5804	97
34	1540	25,7	23 093	385	79	355	5,9	5327	89
35°	1521 ^m	25,4 ^m	22 810 ^m	380 ^m	80°	323 ^m	5,4 ^m	4848 ^m	81 ^m
36	1503	25,0	22 538	376	81	291	4,9	4367	73
37	1483	24,7	22 250	371	82	259	4,3	3885	65
38	1464	24,4	21 955	366	83	227	3,8	3402	57
39	1444	24,1	21 654	361	84	195	3,2	2918	49
40°	1423 ^m	23,7 ^m	21 346 ^m	356 ^m	85°	162 ^m	2,7 ^m	2433 ^m	41 ^m
41	1402	23,4	21 031	351	86	130	2,2	1948	32
42	1381	23,0	20 710	345	87	97	1,6	1461	24
43	1359	22,6	20 383	340	88	65	1,1	974	16
44	1337	22,3	20 049	334	89	32	0,5	487	8
45	1314	21,9	19 709	328	90	0	0,0	0	0

Breite φ	Parallel- Bogen 10'	Meridian- Bogen 6'	Trapez- fläche	Breite φ	Parallel- Bogen 10'	Meridian- Bogen 6'	Trapez- fläche
	Meter	Meter	Q.Kilometer		Meter	Meter	Q.Kilometer
45° 0'	13 139,55	11 112,04	145,8802	50° 0'	11 947,84	11 121,74	132,7428
6	13 116,67	11 112,24	145,6283	6	11 923,03	11 121,93	132,4691
12	13 093,76	11 112,43	145,3760	12	11 898,20	11 122,12	132,1949
18	13 070,80	11 112,63	145,1232	18	11 873,32	11 122,32	131,9203
24	13 047,80	11 112,82	144,8699	24	11 848,41	11 122,51	131,6453
45° 30'	13 024,77	11 113,02	144,6163	50° 30'	11 823,46	11 122,70	131,3699
36	13 001,69	11 113,21	144,3621	36	11 798,48	11 122,89	131,0941
42	12 978,57	11 113,41	144,1075	42	11 773,46	11 123,08	130,8178
48	12 955,42	11 113,60	143,8525	48	11 748,40	11 123,27	130,5412
54	12 932,22	11 113,80	143,5970	54	11 723,31	11 123,46	130,2641
46° 0'	12 908,98	11 113,99	143,3410	51° 0'	11 698,18	11 123,65	129,9866
6	12 885,71	11 114,19	143,0846	6	11 673,02	11 123,85	129,7087
12	12 862,39	11 114,38	142,8278	12	11 647,82	11 124,04	129,4304
18	12 839,04	11 114,57	142,5705	18	11 622,58	11 124,23	129,1517
24	12 815,65	11 114,77	142,3128	24	11 597,31	11 124,42	128,8726
46° 30'	12 792,21	11 114,96	142,0546	51° 30'	11 572,01	11 124,61	128,5931
36	12 768,74	11 115,16	141,7960	36	11 546,66	11 124,80	128,3131
42	12 745,23	11 115,35	141,5369	42	11 521,28	11 124,99	128,0328
48	12 721,68	11 115,55	141,2774	48	11 495,87	11 125,18	127,7521
54	12 698,09	11 115,74	141,0174	54	11 470,42	11 125,37	127,4709
47° 0'	12 674,46	11 115,94	140,7570	52° 0'	11 444,94	11 125,56	127,1894
6	12 650,79	11 116,13	140,4961	6	11 419,42	11 125,74	126,9074
12	12 627,09	11 116,32	140,2349	12	11 393,86	11 125,93	126,6250
18	12 603,34	11 116,52	139,9731	18	11 368,27	11 126,12	126,3423
24	12 579,56	11 116,71	139,7110	24	11 342,65	11 126,31	126,0591
47° 30'	12 555,74	11 116,91	139,4484	52° 30'	11 316,99	11 126,50	125,7756
36	12 531,88	11 117,10	139,1853	36	11 291,29	11 126,69	125,4916
42	12 507,98	11 117,30	138,9218	42	11 265,56	11 126,88	125,2072
48	12 484,04	11 117,49	138,6579	48	11 239,80	11 127,07	124,9225
54	12 460,06	11 117,68	138,3936	54	11 214,00	11 127,25	124,6373
48° 0'	12 436,05	11 117,88	138,1288	53° 0'	11 188,17	11 127,44	124,3518
6	12 411,99	11 118,07	137,8636	6	11 162,80	11 127,63	124,0658
12	12 387,90	11 118,27	137,5979	12	11 136,40	11 127,82	123,7795
18	12 363,77	11 118,46	137,3319	18	11 110,46	11 128,00	123,4928
24	12 339,61	11 118,65	137,0653	24	11 084,49	11 128,19	123,2057
48° 30'	12 315,40	11 118,85	136,7983	53° 30'	11 058,49	11 128,38	122,9183
36	12 291,16	11 119,04	136,5310	36	11 032,45	11 128,56	122,6303
42	12 266,88	11 119,23	136,2631	42	11 006,38	11 128,75	122,3420
48	12 242,56	11 119,43	135,9949	48	10 980,27	11 128,94	122,0533
54	12 218,21	11 119,62	135,7262	54	10 954,13	11 129,12	121,7642
49° 0'	12 193,81	11 119,81	135,4571	54° 0'	10 927,96	11 129,31	121,4748
6	12 169,38	11 120,01	135,1876	6	10 901,75	11 129,49	121,1849
12	12 144,92	11 120,20	134,9177	12	10 875,51	11 129,68	120,8947
18	12 120,41	11 120,39	134,6473	18	10 849,23	11 129,86	120,6041
24	12 095,87	11 120,59	134,3765	24	10 822,92	11 130,05	120,3121
49° 30'	12 071,29	11 120,78	134,1053	54° 30'	10 796,58	11 130,23	120,0218
36	12 046,67	11 120,97	133,8336	36	10 770,21	11 130,42	119,7300
42	12 022,02	11 121,16	133,5616	42	10 743,80	11 130,60	119,4378
48	11 997,33	11 121,36	133,2891	48	10 717,36	11 130,78	119,1454
54	11 972,60	11 121,55	133,0162	54	10 690,89	11 130,97	118,8524
50° 0'	11 947,84			55° 0'	10 664,38		

Additamente für $\log \sin \frac{s}{r}$

$$A = \log \frac{s}{r} - \log \sin \frac{s}{r} = \frac{\mu}{6r^2} s^2$$

I. Additament A als Funktion von $\log s$, für die Mittelbreite $\varphi = 50^\circ$

$$\log \frac{\mu}{6r^2} = 2.249846 - 10.$$

$\log s$.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	Diff.	für $\log s < 4.0$	
												$\log s$	A
4.0	1.8	1.9	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.5	2.6	2.7	0.1		
4.1	2.8	3.0	3.1	3.1	3.4	3.5	3.7	3.9	4.1	4.2	0.3		
4.2	4.5	4.7	4.9	5.1	5.4	5.6	5.9	6.2	6.5	6.8	0.3	3.2	0.0
4.3	7.1	7.4	7.8	8.1	8.5	8.9	9.3	9.8	10.3	10.7	0.5	3.3	0.1
4.4	11.2	11.7	12.3	12.9	13.5	14.1	14.8	15.5	16.2	17.0	0.8	3.4	0.2
4.5	17.8	18.6	19.5	20.4	21.4	22.4	23.4	24.5	25.7	26.9	1.3	3.5	0.3
4.6	28.2	29.5	30.9	32.4	33.9	35.5	37.2	38.9	40.8	42.7	2.0	3.6	0.3
4.7	44.7	46.8	49.0	51.3	53.7	56.2	58.9	61.7	64.6	67.6	3.2	3.7	0.4
4.8	70.8	74.1	77.6	81.3	85.1	89.1	93.6	97.7	102.3	107.1	5.1	3.8	0.7
4.9	112.2	117.4	123.0	128.8	134.8	141.2	147.9	154.8	162.1	169.8	8.0	3.9	1.1
5.0	177.8	186.1	194.9	204.1	213.7	223.8	234.3	245.4	256.9	169.1	12.8		

II. Additament A als Funktion von $\log \frac{s}{r}$

$\frac{s}{r} \varphi$	$\log \frac{s}{r}$.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	Diff.
3' 26''	7.0	0.7	0.8	0.8	0.8	0.9	0.9	1.0	1.0	1.0	1.1	0.0
4 20	7.1	1.1	1.2	1.3	1.3	1.4	1.4	1.5	1.6	1.7	1.7	0.1
5 27	7.2	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.8	0.1
6 52	7.3	2.9	3.0	3.2	3.3	3.5	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4	0.2
8 38	7.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.5	5.7	6.0	6.3	6.6	6.9	0.3
10' 52''	7.5	7.2	7.6	7.5	8.3	8.7	9.1	9.5	10.0	10.5	11.0	0.5
13 41	7.6	11.5	12.0	12.6	13.2	13.8	14.4	15.1	15.8	16.6	17.4	0.8
17 14	7.7	18.2	19.0	19.9	20.9	21.9	22.9	24.0	25.1	26.3	27.5	1.3
21 41	7.8	28.8	30.2	31.6	33.1	34.6	36.3	38.0	39.8	41.7	43.6	2.1
27 18	7.9	45.7	47.8	50.1	52.4	54.9	57.5	60.2	63.0	66.0	69.1	3.3
		.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009	
34' 23''	8.00	72.4	72.7	73.1	73.4	73.7	74.1	74.4	74.8	75.1	75.4	0.4
35 11	8.01	75.8	76.1	76.5	76.8	77.2	77.6	77.9	78.3	78.6	79.0	0.4
36 0	8.02	79.4	79.7	80.1	80.5	80.8	81.2	81.6	82.0	82.3	82.7	0.4
36 50	8.03	83.1	83.5	83.9	84.3	84.7	85.0	85.4	85.8	86.2	86.6	0.4
37 42	8.04	87.0	87.4	87.8	88.2	88.6	89.1	89.5	89.9	90.3	90.7	0.4
38' 34''	8.05	91.1	91.5	92.0	92.4	92.8	93.2	93.7	94.1	94.5	95.0	0.4
39 28	8.06	95.4	95.9	96.3	96.7	97.2	97.6	98.1	98.5	99.0	99.4	0.5
40 23	8.07	99.9	100.4	100.8	101.3	101.8	102.2	102.7	103.2	103.7	104.1	0.5
41 20	8.08	104.6	105.1	105.6	106.1	106.6	107.1	107.6	108.1	108.5	109.0	0.5
42 17	8.09	109.5	110.0	110.6	111.1	111.6	112.1	112.6	113.1	113.7	114.2	0.5
43' 17'''	8.10	114.7	115.2	115.8	116.3	116.8	117.4	117.9	118.5	119.0	119.6	0.5
44 17	8.11	120.1	120.7	121.2	121.8	122.3	122.9	123.5	124.0	124.6	125.2	0.6
45 19	8.12	125.8	126.3	126.9	127.5	128.2	128.7	129.3	129.9	130.5	131.1	0.6
46 22	8.13	131.7	132.3	132.9	133.5	134.1	134.8	135.4	136.0	136.6	137.3	0.6
47 27	8.14	137.9	138.5	139.2	139.8	140.5	141.1	141.8	142.4	143.1	143.8	0.7
48' 33'''	8.15	144.4	145.1	145.7	146.4	147.1	147.8	148.5	149.1	149.8	150.5	0.7
49 41	8.16	151.2	151.9	152.6	153.3	154.0	154.8	155.4	156.2	156.9	157.6	0.7
50 51	8.17	158.3	159.1	159.8	160.5	161.3	162.0	162.8	163.5	164.3	165.0	0.8
52 2	8.18	165.8	166.6	167.3	168.1	168.9	169.7	170.4	171.2	172.0	172.8	0.8
53 14	8.19	173.6	174.4	175.2	176.0	176.8	177.7	178.5	179.3	180.1	181.0	0.8

<i>o</i>	<i>h</i>	<i>m</i>	<i>'</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>'</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>"</i>	<i>s</i>	<i>"</i>	<i>s</i>
1	0	4	1	0	4	31	2	4	1	0,0667	31	2,0667
2	0	8	2	0	8	32	2	8	2	0,1333	32	2,1333
3	0	12	3	0	12	33	2	12	3	0,2000	33	2,2000
4	0	16	4	0	16	34	2	16	4	0,2667	34	2,2667
5	0	20	5	0	20	35	2	20	5	0,3333	35	2,3333
6	0	24	6	0	24	36	2	24	6	0,4000	36	2,4000
7	0	28	7	0	28	37	2	28	7	0,4667	37	2,4667
8	0	32	8	0	32	38	2	32	8	0,5333	38	2,5333
9	0	36	9	0	36	39	2	36	9	0,6000	39	2,6000
10	0	40	10	0	40	40	2	40	10	0,6667	40	2,6667
10	0	40	11	0	44	41	2	44	11	0,7333	41	2,7333
20	1	20	12	0	48	42	2	48	12	0,8000	42	2,8000
30	2	0	13	0	52	43	2	52	13	0,8667	43	2,8667
40	2	40	14	0	56	44	2	56	14	0,9333	44	2,9333
50	3	20	15	1	0	45	3	0	15	1,0000	45	3,0000
60	4	0	16	1	4	46	3	4	16	1,0667	46	3,0667
70	4	40	17	1	8	47	3	8	17	1,1333	47	3,1333
80	5	20	18	1	12	48	3	12	18	1,2000	48	3,2000
90	6	0	19	1	16	49	3	16	19	1,2667	49	3,2667
100	6	40	20	1	20	50	3	20	20	1,3333	50	3,3333
110	7	20	21	1	24	51	3	24	21	1,4000	51	3,4000
120	8	0	22	1	28	52	3	28	22	1,4667	52	3,4667
130	8	40	23	1	32	53	3	32	23	1,5333	53	3,5333
140	9	20	24	1	36	54	3	36	24	1,6000	54	3,6000
150	10	0	25	1	40	55	3	40	25	1,6667	55	3,6667
160	10	40	26	1	44	56	3	44	26	1,7333	56	3,7333
170	11	20	27	1	48	57	3	48	27	1,8000	57	3,8000
180	12	0	28	1	52	58	3	52	28	1,8667	58	3,8667
190	12	40	29	1	56	59	3	56	29	1,9333	59	3,9333
200	13	20	30	2	0	60	4	0	30	2,0000	60	4,0000

Verwandlung der Zeit in Bogen.

<i>h</i>	<i>0</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>o</i>	<i>'</i>	<i>"</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>o</i>	<i>'</i>	<i>"</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>o</i>	<i>'</i>	<i>"</i>	<i>s</i>	<i>"</i>
1	15	1	0	15	16	4	0	31	7	45	46	11	30	0,1			1,5	
2	30	2	0	30	17	4	15	32	8	0	47	11	45	0,2			3,0	
3	45	3	0	45	18	4	30	33	8	15	48	12	0	0,3			4,5	
4	60	4	1	0	19	4	45	34	8	30	49	12	15	0,4			6,0	
5	75	5	1	15	20	5	0	35	8	45	50	12	30	0,5			7,5	
6	90	6	1	30	21	5	15	36	9	0	51	12	45	0,6			9,0	
7	105	7	1	45	22	5	30	37	9	15	52	13	0	0,7			10,5	
8	120	8	2	0	23	5	45	38	9	30	53	13	15	0,8			12,0	
9	135	9	2	15	24	6	0	39	9	45	54	13	30	0,9			13,5	
10	150	10	2	30	25	6	15	40	10	0	55	13	45	1,0			15,0	
11	165	11	2	45	26	6	30	41	10	15	56	14	0					
12	180	12	3	0	27	6	45	42	10	30	57	14	15					
13	195	13	3	15	28	7	0	43	10	45	58	14	30					
14	210	14	3	30	29	7	15	44	11	0	59	14	45					
15	225	15	3	45	30	7	30	45	11	15	60	15	0					

I. Abscissen-Korrektionen oder Ordinaten-Korrektionen von der Form

$$d = \frac{a^2 b}{2 r^2} \quad \left(\log \frac{1}{2 r^2} = 6.08918 \text{ für } \varphi = 50^\circ \right).$$

a	b									
	10 ^{km}	20 ^{km}	30 ^{km}	40 ^{km}	50 ^{km}	60 ^{km}	70 ^{km}	80 ^{km}	90 ^{km}	100 ^{km}
10 ^{km}	0,01 ^m	0,02 ^m	0,04 ^m	0,05 ^m	0,06 ^m	0,07 ^m	0,09 ^m	0,10 ^m	0,11 ^m	0,12 ^m
20	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,29	0,34	0,39	0,44	0,49
30	0,11	0,22	0,33	0,44	0,55	0,66	0,77	0,88	0,99	1,11
40	0,20	0,39	0,59	0,79	0,98	1,18	1,38	1,57	1,77	1,96
50	0,31	0,61	0,92	1,23	1,53	1,84	2,15	2,46	2,76	3,07
60 ^{km}	0,44 ^m	0,88 ^m	1,33 ^m	1,77 ^m	2,21 ^m	2,65 ^m	3,09 ^m	3,54 ^m	3,98 ^m	4,42 ^m
70	0,60	1,20	1,81	2,41	3,01	3,61	4,21	4,81	5,42	6,02
80	0,79	1,57	2,36	3,14	3,93	4,72	5,50	6,29	7,09	7,86
90	0,99	1,99	2,98	3,98	4,97	5,97	6,96	7,96	8,95	9,95
100	1,23	2,46	3,68	4,91	6,14	7,37	8,60	9,82	11,05	12,28

$$\text{II. Ordinaten-Konvergenz } \alpha' - \alpha = (x' - x) \frac{y' + y}{2} \frac{\varrho}{r^2} \text{ oder}$$

$$\alpha' - \alpha = m n \frac{\varrho}{r^2} \quad \left(\log \frac{\varrho}{r^2} = 1.70464 \text{ für } \varphi = 50^\circ \right).$$

m	n									
	10 ^{km}	20 ^{km}	30 ^{km}	40 ^{km}	50 ^{km}	60 ^{km}	70 ^{km}	80 ^{km}	90 ^{km}	100 ^{km}
10 ^{km}	0,5''	1,0''	1,5''	2,0''	2,5''	3,0''	3,5''	4,1''	4,6''	5,1''
20	1,0	2,0	3,0	4,1	5,1	6,1	7,1	8,1	9,1	10,1
30	1,5	3,0	4,6	6,1	7,6	9,1	10,6	12,2	13,7	15,2
40	2,0	4,1	6,1	8,1	10,1	12,2	14,2	16,2	18,2	20,3
50	2,5	5,1	7,6	10,1	12,7	15,2	17,7	20,3	22,8	25,3
60 ^{km}	3,0''	6,1''	9,1''	12,2''	15,2''	18,2''	21,3''	24,3''	27,4''	30,4''
70	3,5	7,1	10,6	14,2	17,7	21,3	24,8	28,4	31,9	35,5
80	4,1	8,1	12,2	16,2	20,3	24,3	28,4	32,4	36,5	40,5
90	4,6	9,1	13,7	18,2	22,8	27,4	31,9	36,5	41,0	45,6
100	5,1	10,1	15,2	20,3	25,3	30,4	35,5	40,5	45,6	50,7

III. Meridian-Konvergenz. Für die Ordinate y und die Breite φ ist die Meridian-Konvergenz genähert $\gamma = \frac{y}{N} \varrho \tan \varphi = [2] y \tan \varphi$ in Sekunden, wo N und $[2]$ der Tafel von Seite [2] bis [23] entsprechen. Folgendes Täfelchen giebt γ in Minuten.

y	Geographische Breite φ										
	45°	46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°
10 ^{km}	5,4'	5,6'	5,8'	6,0'	6,2'	6,4'	6,6'	6,9'	7,1'	7,4'	7,7'
20	10,8	11,1	11,5	12,0	12,4	12,8	13,3	13,8	14,3	14,8	15,4
30	16,1	16,7	17,3	17,9	18,6	19,2	19,9	20,7	21,4	22,2	23,0
40	21,5	22,3	23,1	23,9	24,8	25,6	26,6	27,5	28,6	29,6	30,7
50	26,9	27,9	28,9	29,9	30,9	32,1	33,2	34,4	35,7	37,0	38,4
60 ^{km}	32,3'	33,4'	34,6'	35,9'	37,1'	38,5'	39,9'	41,3'	42,8'	44,4'	46,1'
70	37,7	39,0	40,4	41,8	43,3	44,9	46,5	48,2	50,0	51,8	53,8
80	43,1	44,6	46,2	47,8	49,5	51,3	53,1	55,1	57,1	59,2	61,4
90	48,4	50,1	51,9	53,8	55,7	57,7	59,8	62,0	64,2	66,6	69,1
100	53,8	55,7	57,7	59,8	61,9	64,1	66,4	68,9	71,4	74,0	76,8

I. Verzerrung der Ordinaten η .

$$\eta - y = \frac{y^3}{6r^2} \quad \left(\log \frac{1}{6r^2} = 5.61191 \text{ für } \varphi = 51^\circ 30', \text{ Göttingen} \right).$$

y oder η	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0^{km}	0,000 ^m	0,000 ^m	0,000 ^m	0,000 ^m	0,000 ^m	0,001 ^m	0,001 ^m	0,001 ^m	0,002 ^m	0,003 ^m
10	0,004	0,005	0,007	0,009	0,011	0,014	0,017	0,020	0,024	0,028
20	0,033	0,038	0,044	0,050	0,057	0,064	0,072	0,081	0,090	0,100
30	0,110	0,121	0,134	0,147	0,161	0,175	0,191	0,207	0,225	0,243
40	0,262	0,282	0,303	0,325	0,349	0,373	0,398	0,425	0,453	0,480
50^{km}	0,51 ^m	0,54 ^m	0,58 ^m	0,61 ^m	0,64 ^m	0,68 ^m	0,72 ^m	0,78 ^m	0,80 ^m	0,84 ^m
60	0,88	0,93	0,98	1,02	1,07	1,12	1,15	1,26	1,29	1,34
70	1,40	1,46	1,53	1,59	1,66	1,73	1,80	1,87	1,99	2,02
80	2,10	2,17	2,26	2,34	2,43	2,51	2,60	2,69	2,79	2,88
90	2,98	3,08	3,19	3,29	3,40	3,51	3,62	3,73	3,85	3,97
100	4,09									

II. Die Ordinaten-Konvergenz ist in erster Näherung dieselbe, wie bei den *Soldnerschen* Coordinaten (II. Seite [32]), vgl. (18) S. 284.

III. Die Meridian-Konvergenz ist ebenfalls in erster Näherung dieselbe, wie bei den *Soldnerschen* Coordinaten (III. Seite [32]), vgl. (13) S. 291.

IV. Vergrößerungs-Verhältnis $v = 1 + \frac{\eta^2}{2A^2} = \frac{\mu \eta^2}{2A^2}$ für den Kugelhalbmesser A der *Gauss* schen konformen Kugel $\log A = 6.805\,0274$ ((35) S. 430), $\log \frac{\mu}{2A^2} = 5.72670$.

Übersichts-Tabelle für $\log s - \log S = \frac{\mu}{2A^2} y^2$. ((17) S. 451.)

y	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0^{km}	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00001	0.00002	0.00003	0.00003	0.00004
100	5	6	8	9	10	12	14	15	17	19
200	21	24	26	28	31	33	36	39	42	45
300	48	51	55	58	62	65	69	73	77	81
400	85	90	94	99	103	108	113	118	123	128
500	133	139	144	150	155	161	167	173	179	186
600	192	198	205	212	218	225	232	239	246	254
700	0.00261	0.00269	0.00276	0.00284	0.00292	0.00300	0.00308	0.00316	0.00324	0.00333
800	0.00341									

φ = Geographische Breite, $t^2 = \tan^2 \varphi$, $e'^2 \cos^2 \varphi = \eta^2$, $e'^2 \sin^2 \varphi = \eta^2 t^2$.

φ	t^2	Diff.	t^4	Diff.	η^2	Diff.	$\eta^2 t^2$	Diff.	η^4	Diff.
0°	0,0000	+	0,0000	+	0,00672	—	0,00000	+	0,0000451	+
1	0003	3	0000		672	0	000	0	451	0
2	0012	9	0000		671	1	001	1	450	1
3	0027	15	0000		670	1	002	1	449	1
4	0049	22	0000		669	1	003	1	447	2
		28				2		2		2
5°	0,0077	33	0,0001	0	0,00667	2	0,00005	2	0,0000445	3
6	0110	41	0001	1	665	3	007	3	442	4
7	0151	47	0002	2	662	3	010	3	438	4
8	0198	53	0004	2	659	4	013	3	434	4
9	0251	60	0006	4	655	3	016	3	430	5
10°	0,0311	67	0,0010	4	0,00652	5	0,00020	5	0,0000425	6
11	0378	74	0014	6	647	4	025	4	419	6
12	0452	81	0020	8	643	5	029	5	413	6
13	0533	89	0028	11	638	5	034	5	407	7
14	0622	96	0039	13	633	6	039	6	400	7
15°	0,0718	104	0,0052	16	0,00627	6	0,00045	6	0,0000393	8
16	0822	113	0068	20	621	7	051	6	385	7
17	0935	121	0088	23	614	6	057	7	378	7
18	1056	130	0111	30	608	7	064	7	369	9
19	1186	139	0141	34	601	8	071	8	361	8
20°	0,1325	149	0,0175	42	0,00593	7	0,00079	7	0,0000352	9
21	1474	158	0217	49	586	8	086	8	343	9
22	1632	170	0266	59	578	9	094	9	334	10
23	1802	180	0325	68	569	8	103	8	324	10
24	1982	192	0393	80	561	9	111	9	314	10
25°	0,2174	205	0,0473	93	0,00552	9	0,00120	9	0,0006305	10
26	2379	217	0566	108	543	10	129	9	295	10
27	2596	231	0674	125	533	9	138	10	285	11
28	2827	246	0799	145	524	10	148	10	274	10
29	3073	260	0944	167	514	10	158	10	264	10
30°	0,3333	277	0,1111	192	0,00504	10	0,00168	10	0,0000254	10
31	3610	295	1303	222	494	11	178	11	244	10
32	3905	312	1525	254	483	10	189	10	234	11
33	4217	333	1779	291	473	11	199	11	223	11
34	4550	353	2070	334	462	11	210	11	213	10
35°	0,4903	376	0,2404	382	0,00451	11	0,00221	11	0,0000203	10
36	5279	399	2786	439	440	11	232	11	193	9
37	5678	426	3225	501	429	12	243	12	184	10
38	6104	454	3726	574	417	11	255	11	174	9
39	6558	483	4300	657	406	12	266	12	165	10
40°	0,7041	516	0,4957	753	0,00394	11	0,00278	11	0,0000155	9
41	7557	550	5710	863	383	12	289	12	146	8
42	8107	589	6573	989	371	12	301	12	138	9
43	8696	630	7562	1135	359	11	313	11	129	8
44	9326	674	8697	1303	348	12	324	12	121	8
45	1,0000		1,0000		0,00336		0,00336		0,0000113	

φ = geographische Breite, $t^2 = \tan^2 \varphi$, $e'^2 \cos^2 \varphi = \eta^2$, $e'^2 \sin^2 \varphi = \eta^2 t^2$.

φ	t^2	Diff.	t^4	Diff.	η^2	Diff.	$\eta^2 t^2$	Diff.	η^4	Diff.
45°	1,000	+	1,000	+	0,00336	—	0,00336	+	0,0000113	—
46	1,072	0,002	1,150	0,150	324	12	348	12	105	8
47	1,150	0,078	1,322	0,172	313	11	359	11	098	7
48	1,233	0,083	1,521	0,199	301	12	371	12	091	7
49	1,323	0,090	1,751	0,240	289	12	383	12	084	7
		0,097		0,266		11		11		
50°	1,420		2,017		0,00278		0,00394		0,0000077	
51	1,525	0,105	2,326	0,309	266	12	406	12	071	6
52	1,638	0,113	2,684	0,358	255	11	417	11	065	6
53	1,761	0,123	3,101	0,417	243	12	429	12	059	6
54	1,894	0,133	3,588	0,487	232	11	440	11	054	5
		0,146		0,572		12				
55°	2,040		4,160		0,00221		0,00451		0,0000049	
56	2,198	0,158	4,831	0,671	210	11	462	11	044	5
57	2,371	0,173	5,623	0,792	199	11	473	11	040	4
58	2,561	0,190	6,559	0,936	189	10	483	10	036	4
59	2,770	0,209	7,672	1,113	178	11	494	11	032	4
		0,23		1,33		10		10		
60°	3,00		9,00		0,00168		0,00504		0,0000028	
61	3,25	0,25	10,59	1,59	158	10	514	10	025	3
62	3,54	0,29	12,51	1,92	148	10	524	10	022	3
63	3,85	0,31	14,84	2,33	138	10	533	9	019	3
64	4,20	0,35	17,67	2,83	129	9	543	10	017	2
		0,40		3,48		9		9		3
65°	4,60		21,15		0,00120		0,00552		0,0000014	
66	5,04	0,44	25,45	4,30	111	9	561	9	012	2
67	5,55	0,51	30,80	5,35	103	8	569	8	011	1
68	6,13	0,58	37,53	6,73	94	9	578	9	009	2
69	6,79	0,66	46,06	8,53	86	8	586	8	007	2
		0,76		10,9		7		7		1
70°	7,55		57,0		0,00079		0,00593		0,0000006	
71	8,43	0,88	71,1	14,1	71	8	601	8	005	1
72	9,47	1,04	89,7	18,6	64	7	608	7	004	1
73	10,70	1,23	114,5	24,8	57	7	614	6	003	1
74	12,16	1,46	147,9	33,4	51	6	621	7	003	0
		1,77		46		6		6		1
75°	13,93		194		0,00045		0,00627		0,0000002	
76	16,09	2,16	259	65	43	6	633	6	002	0
77	18,76	2,67	352	103	34	5	638	5	001	1
78	22,13	3,37	490	138	29	5	643	5	001	0
79	26,47	4,34	700	210	25	4	647	4	001	0
		5,69		334		5		5		1
80°	32,16		1034		0,00020		0,00652		0,0000000	
81	39,88	7,70	1589	555	16	4	655	3		
82	50,63	10,77	2563	974	13	3	659	4		
83	66,33	15,70	4400	1837	10	3	662	3		
84	90,52	24,19	8194	3794	7	3	665	3		
					007	2		2		
85°	131		17068		0,00005		0,00667			
86	205		41824		003	2	669	2		
87	364		132561		002	1	670	1		
88	820		672458		001	1	671	1		
89	3282		∞		000	1	672	1		
90°	∞				0,00000	0	0,00672	0		

φ = geographische Breite, $t^2 = \tan^2 \varphi$.

φ	$\log(1+2t^2)$	Diff.	$\log(1+3t^2)$	Diff.	$\log(2+t^2)$	Diff.	$\log(2+3t^2)$	Diff.	$\log(5+6t^2)$	Diff.
0°	0.0000	+	0.0000	+	0.3010	+	0.3010	+	0.6990	+
1	0003	3	0004	4	3011	1	3012	2	6991	1
2	0011	8	0016	12	3013	2	3018	6	6996	5
3	0024	13	0036	20	3016	3	3028	10	7004	8
4	0042	18	0063	27	3021	5	3042	14	7015	11
		24		36		6		18		14
5°	0.0066		0.0099		0.3027		0.3060		0.7029	
6	0095	29	0142	43	3034	7	3082	22	7047	18
7	0129	34	0192	50	3043	9	3107	25	7068	21
8	0168	39	0250	58	3053	10	3137	30	7091	23
9	0213	45	0315	65	3064	11	3171	34	7119	28
		49		72		13		37		30
10°	0.0262		0.0387		0.3077		0.3208		0.7149	
11	0316	54	0466	79	3092	15	3250	42	7182	33
12	0376	60	0552	86	3107	15	3295	45	7219	37
13	0440	64	0644	92	3125	18	3344	49	7259	40
14	0509	69	0743	99	3143	18	3397	53	7302	43
		74		104		20		58		47
15°	0.0583		0.0847		0.3163		0.3455		0.7349	
16	0661	78	0957	110	3185	22	3515	60	7398	49
17	0744	83	1074	117	3209	24	3580	65	7451	53
18	0832	88	1195	121	3234	25	3649	69	7508	57
19	0924	92	1322	127	3260	26	3721	72	7567	59
		97		131		29		76		63
20°	0.1021		0.1453		0.3289		0.3797		0.7630	
21	1122	101	1590	137	3319	30	3878	81	7697	67
22	1227	105	1731	141	3351	32	3961	83	7767	70
23	1337	110	1877	146	3385	34	4049	88	7840	73
24	1450	113	2027	150	3421	36	4141	92	7916	76
		118		154		38		95		81
25°	0.1568		0.2181		0.3459		0.4236		0.7997	
26	1690	122	2339	158	3498	39	4336	100	8080	83
27	1816	126	2501	162	3540	42	4439	103	8167	87
28	1946	130	2667	166	3585	45	4546	107	8258	91
29	2081	135	2837	170	3631	46	4656	110	8353	95
		137		173		49		115		98
30°	0.2218		0.3010		0.3680		0.4771		0.8451	
31	2360	142	3187	177	3731	51	4890	119	8553	102
32	2506	146	3367	180	3785	54	5012	122	8659	106
33	2657	151	3551	184	3841	56	5139	127	8768	109
34	2810	154	3738	187	3900	59	5270	131	8882	114
		158		191		63		134		117
35°	0.2968		0.3929		0.3963		0.5404		0.8999	
36	3130	162	4122	193	4028	65	5543	139	9121	122
37	3295	165	4319	197	4096	68	5686	143	9246	125
38	3465	170	4520	201	4167	71	5833	147	9376	130
39	3639	174	4724	204	4292	75	5985	152	9511	135
		178		207		78		156		138
40°	0.3817		0.4931		0.4320		0.6141		0.9649	
41	3999	182	5141	210	4402	82	6301	160	9793	144
42	4185	186	5356	215	4488	86	6466	165	9941	148
43	4376	191	5574	218	4578	90	6636	170	1.0093	152
44	4571	195	5795	221	4672	94	6810	174	0.0251	158
45°	0.4771	200	0.6021	226	0.4771	99	0.6900	180	1.0414	163

φ = geographische Breite, $t^2 = \tan^2 \varphi$.

φ	$\log(1+2t^2)$	Diff.	$\log(1+3t^2)$	Diff.	$\log(2+t^2)$	Diff.	$\log(2+3t^2)$	Diff.	$\log(5+6t^2)$	Diff.
45°	0.4771	+	0.6021	+	0.4771	+	0.6990	+	1.0414	+
46	4976	205	6250	229	4875	104	7174	184	0582	168
47	5185	209	6484	234	4983	108	7364	190	0755	173
48	5399	214	6721	237	5097	114	7559	195	0934	179
49	5619	220	6964	243	5216	119	7760	201	1119	185
		225		247		125		206		191
50°	0.5844	+	0.7211	+	0.5841	+	0.7966	+	1.1310	+
51	6074	230	7462	251	5472	131	8179	213	1508	198
52	6311	237	7719	257	5609	137	8398	211	1711	203
53	6553	242	7982	263	5752	144	8623	225	1922	211
54	6802	249	8250	268	5904	151	8856	233	2140	218
		256		274		159		239		225
55°	0.7058	+	0.8524	+	0.6063	+	0.9095	+	1.2365	+
56	7321	263	8805	281	6230	167	9342	247	2598	233
57	7591	270	9092	287	6406	176	9597	255	2839	241
58	7869	278	9387	295	6591	185	9860	263	3089	250
59	8156	287	9689	302	6785	194	1.0132	272	3348	259
		295		311		205		282		269
60°	0.8451	+	1.0000	+	0.6990	+	1.0414	+	1.3617	+
61	8756	305	0320	320	7205	215	0705	291	3897	280
62	9071	315	0649	329	7433	228	1008	303	4187	290
63	9397	326	0988	339	7673	240	1321	313	4489	301
64	9735	338	1339	351	7927	254	1647	326	4803	314
		350		363		268		339		328
65°	1.0085	+	1.1702	+	0.8195	+	1.1986	+	1.5131	+
66	0449	364	2077	375	8479	284	2339	353	5474	343
67	0828	379	2467	390	8779	300	2707	368	5832	358
68	1223	395	2873	406	9099	320	3092	385	6207	375
69	1635	410	3296	423	9438	339	3495	404	6601	394
		433		442		361		422		414
70°	1.2068	+	1.3738	+	0.9799	+	1.3917	+	1.7015	+
71	2521	453	4200	462	1.0185	386	4362	445	7451	436
72	2998	477	4686	486	0596	411	4831	469	7912	461
73	3502	504	5198	512	1038	442	5327	496	8400	488
74	1.4035	533	1.5739	541	1.1511	473	1.5852	525	1.8919	519
		57		57		51		56		55
75°	1.460	+	1.631	+	1.202	+	1.641	+	1.947	+
76	1.521	61	1.692	61	1.257	55	1.701	60	2.007	60
77	1.586	65	1.758	66	1.317	60	1.766	65	2.070	63
78	1.656	70	1.829	71	1.383	66	1.835	69	2.139	69
79	1.732	76	1.905	76	1.454	71	1.911	77	2.214	75
		83		84		80		82		83
80°	1.815	+	1.989	+	1.534	+	1.993	+	2.297	+
81	1.907	92	2.081	92	1.622	88	2.085	92	2.388	91
82	2.010	103	2.184	103	1.721	99	2.187	102	2.490	102
83	2.126	116	2.301	117	1.835	114	2.303	116	2.605	115
84	2.260	134	2.435	134	1.966	131	2.437	134	2.739	134
		159		159		157		158		158
85°	2.419	+	2.594	+	2.123	+	2.595	+	2.897	+
86	2.613	194	2.789	195	2.315	192	2.789	194	3.001	194
87	3.863	250	3.089	250	2.564	249	3.039	250		
88	3.215	352	3.391	352	2.915	351	3.391	352		
89	3.817	602	3.993	602	3.516	601	3.993	605		
90°	∞		∞		∞		∞			

φ	$\log [4]$	Diff.	$\log [5]$	Diff.	$\log [6]$	Diff.	$\log [7]$	Diff.	$\log [8]$	Diff.
0°	4.62581	—	4.93266	+	2.930 _n	—	4.93266	—	5.10777	—
1	62581	0	93286	20	930 _n	0	93266	0	10777	0
2	62579	2	93345	59	929 _n	1	93266	0	10777	0
3	62575	4	93443	98	928 _n	1	93265	1	10777	0
4	62570	5	93580	137	926 _n	2	93265	0	10776	1
5	62564	6	93756	176	924 _n	2	93264	1	10776	0
		8		216		3		1		1
6°	4.62556	9	4.93972	255	2.921 _n	4	4.93263	1	5.10775	1
7	62547	10	94227	293	917 _n	4	93262	1	10774	0
8	62537	12	94520	333	913 _n	4	93261	1	10774	0
9	62525	12	94353	371	908 _n	5	93259	2	10772	2
10	62511	14	95224	411	903 _n	5	93257	2	10771	1
11	62497	14	95635	449	898 _n	5	93255	2	10770	1
		16				6		1		1
12°	4.62481	17	4.96084	487	2.892 _n	7	4.93254	3	5.10769	1
13	62464	19	96571	527	885 _n	8	93251	2	10768	2
14	62445	19	97098	563	877 _n	8	93249	2	10766	2
15	62426	21	97661	605	869 _n	9	93247	3	10764	1
16	62405	22	98266	641	860 _n	10	93244	3	10763	2
17	62383	24	98907	680	850 _n	10	93241	3	10761	2
18°	4.62359	24	4.99587	718	2.840 _n	11	4.93238	3	5.10759	2
19	62335	26	5.00305	756	829 _n	12	93235	3	10757	3
20	62309	27	01061	795	817 _n	13	93232	3	10754	2
21	62282	28	01856	832	804 _n	14	93229	4	10752	2
22	62254	29	02688	871	790 _n	15	93225	3	10750	2
23	62225	30	03559	909	775 _n	16	93222	4	10748	2
24°	4.62195	31	5.04468	947	2.759 _n	17	4.93218	4	5.10746	3
25	62164	31	05415	986	742 _n	18	93214	4	10743	3
26	62133	34	06401	1024	724 _n	20	93210	4	10740	2
27	62099	33	07425	1063	704 _n	21	93206	4	10738	3
28	62066	35	08488	1102	683 _n	23	93202	4	10735	3
29	62031	35	09590	1140	660 _n	25	93198	4	10732	3
30°	4.61996	36	5.10730	1180	2.635 _n	26	4.93194	5	5.10729	3
31	61960	37	11910	1219	609 _n	29	93189	5	10726	3
32	61923	38	13129	1260	580 _n	32	93185	5	10723	3
33	61885	38	14389	1299	548 _n	35	93180	5	10720	3
34	61847	39	15688	1341	613 _n	38	93175	5	10717	3
35	61808	39	17029	1382	475 _n	43	93171	5	10714	3
36°	4.61769	40	5.18411	1423	2.432 _n	48	4.93166	5	5.10711	3
37	61729	40	19834	1466	384 _n	55	93161	5	10708	4
38	61689	41	21300	1510	329 _n	63	93156	5	10704	3
39	61648	41	22810	1554	266 _n	75	93151	5	10701	3
40	61607	42	24364	1598	191 _n	91	93146	5	10698	3
41	61565	41	25962	1645	100 _n		93141	5	10695	4
42°	4.61524	42	5.27607	1691	1.084 _n		4.93136	5	5.10691	3
43	61482	42	29298	1740	1.824 _n		93131	5	10688	3
44	61440	42	31038	1790	1.568 _n		93126	5	10685	4
45	61398	42	32828	1840	0.855 _n		93121	5	10681	3
46	61356	43	34668	1893	1.356		93116	5	10678	3
47	61313	42	36561	1947	1.720		93111	5	10675	4
48°	4.61271		5.38508		1.915		4.93106		5.10671	

$\log [3] = 4.62872$ konstant.

φ	$\log [4]$	Diff.	$\log [5]$	Diff.	$\log [6]$	Diff.	$\log [7]$	Diff.	$\log [8]$	Diff.
48°	4.61271	—	5.38508	+	1.915	+	4.93106	—	5.10671	—
49	61229	42	40512	2004	2.049	134	93101	5	10668	3
50	61187	42	42574	2062	151	102	93096	5	10664	4
51	61145	42	44696	2122	233	82	93091	5	10661	3
52	61104	41	46882	2186	301	68	93086	5	10658	3
53	61063	41	49133	2251	360	59	93081	5	10655	3
		41		2320		51				4
54°	4.61022	—	5.51453	+	2.411	+	4.93076	—	5.10651	—
55	60981	41	53845	2392	458	47	93071	5	10648	3
56	60941	40	56313	2468	497	39	93066	5	10645	3
57	60902	39	58860	2547	534	37	93062	4	10642	3
58	60863	39	61491	2631	567	33	93057	5	10639	3
59	60825	38	64211	2720	598	31	93053	4	10636	3
		38		2814		28				3
60°	4.60787	—	5.67025	+	2.626	+	4.93048	—	5.10633	—
61	60750	37	69939	2914	652	26	93043	5	10630	3
62	60714	36	72959	3020	676	24	93040	3	10627	3
63	60678	36	76093	3134	698	22	93035	5	10624	3
64	60644	34	79349	3256	718	20	93031	4	10622	2
65	60611	33	82736	3387	737	19	93027	4	10619	3
		33		3528		18				2
66°	4.60578	—	5.86264	+	2.755	+	4.93024	—	5.10617	—
67	60546	32	89945	3681	772	17	93020	4	10614	3
68	60515	31	93793	3848	787	15	93016	4	10612	2
69	60486	29	97822	4029	802	15	93013	3	10610	2
70	60456	30	6.02050	4228	815	13	93009	4	10607	3

Besondere Tafel für $\log [5]$ mit kleinerem Intervall.

φ	$\log [5]$	Diff.	φ	$\log [5]$	Diff.	φ	$\log [5]$	Diff.	φ	$\log [5]$	Diff.
43° 0'	5.29293	+	46° 0'	5.34668	+	49° 0'	5.40512	+	52° 0'	5.46882	+
10	29584	286	10	34980	312	10	40852	340	10	47253	371
20	29872	288	20	35294	314	20	41193	341	20	47625	372
30	30162	290	30	35609	315	30	41536	343	30	47999	374
40	30452	290	40	35924	315	40	41880	344	40	48375	376
50	30744	292	50	36242	318	50	42226	344	50	48753	378
		294			319			348			380
44° 0'	5.31038	—	47° 0'	5.36561	+	50° 0'	5.42574	+	53° 0'	5.49133	+
10	31333	295	10	36882	321	10	42923	349	10	49515	382
20	31629	296	20	37204	322	20	43275	352	20	49899	384
30	31927	298	30	37528	324	30	43627	352	30	50285	386
40	32225	298	40	37853	325	40	43982	355	40	50673	388
50	32526	301	50	38180	327	50	44338	356	50	51063	390
		302			328			358			390
45° 0'	5.32828	—	48° 0'	5.38508	+	51° 0'	5.44696	+	54° 0'	5.51453	+
10	33130	302	10	38838	330	10	45056	360	10	51847	394
20	33434	304	20	39170	332	20	45417	361	20	52243	396
30	33741	307	30	39503	333	30	45780	363	30	52641	398
40	34048	307	40	39838	335	40	46145	365	40	53041	400
50	34357	309	50	40174	336	50	46512	367	50	53443	402
		311			338			370			402
46° 0'	5.34668	—	49° 0'	5.40512	+	52° 0'	5.46882	+	55° 0'	5.53845	+

$\log [3] = 4.62872$ konstant.

vgl. S. 397.



$$\tan \psi = \sqrt{1 - e^2} \tan \varphi, \quad \varphi - \psi = 345,32538 \sin (\varphi + \psi) \\ [2.538 \ 2285]$$

φ	$\varphi - \psi$	Diff.	φ	$\varphi - \psi$	Diff.	φ	$\varphi - \psi$	Diff.
0°	0' 0,0"	+	45° 0'	5' 45,33"	—	53° 0'	5' 32,10"	0,56"
1	0 12,0	12,0"	10	45,32	0,01"	10	31,50	0,56
2	0 24,0	12,0	20	45,31	0,01	20	30,98	0,58
3	0 36,0	12,0	30	45,28	0,03	30	30,40	0,59
4	0 48,0	12,0	40	45,24	0,04	40	29,81	0,60
5	1 0,0	11,7	50	45,20	0,04	50	29,21	0,62
					0,07			
6°	1' 11,7"	11,7"	46° 0'	5' 45,13	0,07"	54° 0'	5' 28,59"	0,62"
7	1 23,4	11,6	10	45,06	0,08	10	27,97	0,63
8	35,0	11,5	20	44,98	0,10	20	27,34	0,65
9	46,5	11,4	30	44,88	0,11	30	26,69	0,66
10	57,9	11,3	40	44,77	0,12	40	26,03	0,67
11	2 9,2	11,0	50	44,65	0,13	50	25,36	0,67
12°	2' 20,2"	11,0"	47° 0'	5' 44,52"	0,14"	55° 0'	5' 24,69"	4,3"
13	31,2	10,7	10	44,38	0,15	56	20,4	4,7
14	41,9	10,5	20	44,23	0,17	57	15,7	5,1
15	52,4	10,3	30	44,06	0,18	58	10,6	5,5
16	3 2,7	10,1	40	43,88	0,19	59	5,1	5,8
17	12,8	9,9	50	43,69	0,20	60	4' 59,3	6,2
18°	3' 22,7"	9,6"	48° 0'	5' 43,49"	0,21"	61°	4' 53,1"	6,5"
19	32,3	9,4	10	43,28	0,22	62	46,6	7,0
20	41,7	9,1	20	43,06	0,24	63	39,6	7,2
21	50,8	8,8	30	42,82	0,25	64	32,4	7,6
22	59,6	8,5	40	42,57	0,26	65	24,8	7,9
23	4 8,1	8,2	50	42,31	0,27	66	16,9	8,2
24°	4' 16,3"	7,9"	49° 0'	5' 42,04"	0,28"	67°	4' 8,7"	8,5"
25	24,2	7,6	10	41,76	0,29	68	0,2	8,8
26	31,8	7,3	20	41,47	0,31	69	3' 51,4	9,1
27	39,1	6,9	30	41,16	0,31	70	42,3	9,4
28	46,0	6,6	40	40,85	0,33	71	32,9	9,6
29	52,6	6,2	50	40,52	0,34	72	23,3	9,9
30°	4' 58,8"	5,9"	50° 0'	5' 40,18	0,35"	73°	3' 13,4"	10,1"
31	5 4,7	5,4	10	39,83	0,37	74	3,3	10,4
32	10,1	5,2	20	39,46	0,37	75	2' 52,9	10,5
33	15,3	4,7	30	39,09	0,39	76	42,4	10,8
34	20,0	4,3	40	38,70	0,39	77	31,6	10,9
35	24,3	4,0	50	38,31	0,41	78	20,7	11,1
36°	5' 28,3"	3,5"	51° 0'	5' 37,90"	0,42"	79°	2' 9,6'	11,3"
37	31,8	3,1	10	37,48	0,44	80	1' 58,3	11,4
38	34,9	2,8	20	37,04	0,44	81	46,9	11,6
39	37,7	2,3	30	36,60	0,45	82	35,3	11,6
40	40,0	1,9	40	36,15	0,47	83	23,7	11,8
41	41,9	1,5	50	35,68	0,48	84	11,9	11,8
42°	5' 43,4"	1,0"	52° 0'	5' 35,20"	0,49"	85°	1' 0,1"	12,0"
43	44,4	0,7	10	34,71	0,50	86	0' 48' 1	11,9
44	45,1	+0,2	20	34,21	0,51	87	36,2	12,1
45	45,3	—0,2	30	33,70	0,52	88	24,1	12,1
46	45,1	0,6	40	33,18	0,53	89	12,1	12,1
47	5 44,5		50	32,65		90	0' 0,0	

Sphäroidische Länge = l (Ellipsoid)

Sphärische Länge = λ (Kugel).

$$\lambda = \alpha l \qquad l = \frac{1}{\alpha} \lambda$$

$$\alpha = 1,000\,452\,918$$

$$\frac{1}{\alpha} = 0,999\,547\,287 = 1 - 0,000\,452\,713$$

$$\lambda - l = + 0,000\,452\,918\,l$$

$$l - \lambda = - 0,000\,452\,713\,\lambda$$

$$\log \alpha = 0,000\,1966\,553$$

$$\log \frac{1}{\alpha} = 9,999\,8033\,447$$

Ellipsoid l	$\lambda - l$	Kugel λ	$l - \lambda$
1"	+ 0,000 453"	1"	— 0,000 453"
2"	0,000 906"	2"	0,000 905"
3"	0,001 359"	3"	0,001 358"
4"	0,001 812"	4"	0,001 811"
5"	0,002 265"	5"	0,002 264"
6"	+ 0,002 718"	6"	— 0,002 716"
7"	0,003 170"	7"	0,003 169"
8"	0,003 623"	8"	0,003 622"
9"	0,004 076"	9"	0,004 074"
10"	0,004 529"	10"	0,004 527"
20"	+ 0,009 058"	20"	— 0,009 054"
30"	0,013 588"	30"	0,013 581"
40"	0,018 117"	40"	0,018 109"
50"	0,022 646"	50"	0,022 636"
60"	0,027 175"	60"	0,027 163"
1'	+ 0,027 175"	1'	0,027 163"
2'	0,054 350"	2'	0,054 326"
3'	0,081 525"	3'	0,081 488"
4'	0,108 700"	4'	0,108 651"
5'	0,135 875"	5'	0,135 814"
6'	+ 0,163 050"	6'	— 0,162 977"
7'	0,190 226"	7'	0,190 189"
8'	0,217 401"	8'	0,217 302"
9'	0,244 576"	9'	0,244 465"
10'	0,271 751"	10'	0,271 628"
20'	+ 0,543 502"	20'	— 0,543 256"
30'	0,815 252"	30'	0,814 883"
40'	1,087 003"	40'	1,086 511"
50'	1,358 754"	50'	1,358 139"
60'	1,630 505"	60'	1,629 767"
1°	+ 1,630 505"	1°	— 1,629 767"
2°	3,261 010"	2°	3,259 534"
3°	4,891 514"	3°	4,889 300"
4°	6,522 019"	4°	6,519 067"
5°	8,152 524"	5°	8,148 834"
6°	+ 9,783 029"	6°	— 9,778 601"
7°	11,413 534"	7°	11,408 368"
8°	13,044 038"	8°	13,038 184"
9°	14,674 543"	9°	14,667 901"
10°	16,305 048"	10°	16,297 668"

Kugel u	Ellipsoid φ	Differenzen		$\log m$	Diff.	k	Diff.
		+	—	+	—		—
46° 0'	46° 1' 19,1599 "	10' 1,4235 "	0,0175	14.46	1.06	8,79 "	0,42 "
46 10	46 11 20,5834	10 1,4060	0,0175	13.40	1.00	8,37	0,42
46 20	46 21 21,9894	10 1,3885	0,0174	12.40	0.94	7,95	0,41
46 30	46 30 24,3779	10 1,3711	0,0175	11.46	0.90	7,54	0,40
46 40	46 41 24,74900	10 1,35362	0,01746	10.559	0.850	7,141	0,387
46 50	46 51 26,10262	10 1,33616	0,01746	9.709	0.805	6,754	0,376
47° 0'	47° 1' 27,43878"	10' 1,31870"	0,01746	8.904	0.758	6,378"	0,366"
47 10	47 11 28,75748	10 1,30124	0,01746	8.146	0.715	6,012	0,355
47 20	47 21 30,05872	10 1,28378	0,01745	7.431	0.672	5,657	0,344
47 30	47 31 31,34250	10 1,26633	0,01744	6.759	0.630	5,313	0,334
47 40	47 41 32,60883	10 1,24889	0,01745	6.129	0.590	4,979	0,324
47 50	47 51 33,85772	10 1,23144	0,01744	5.539	0.551	4,655	0,312
48° 0'	48° 1' 35,08916"	10' 1,21400"	0,01743	4.988	0.513	4,343"	0,302"
48 10	48 11 36,30316	10 1,19657	0,01742	4.475	0.477	4,041	0,292
48 20	48 21 37,49973	10 1,17915	0,01742	3.998	0.442	3,749	0,280
48 30	48 31 38,67888	10 1,16173	0,01740	3.556	0.408	3,469	0,270
48 40	48 41 39,84061	10 1,14433	0,01740	3.148	0.376	3,199	0,259
48 50	48 51 40,98494	10 1,12693	0,01739	2.772	0.345	2,940	0,248
49° 0'	49° 1' 42,11187"	10' 1,10954"	0,01737	2.427	0.315	2,692"	0,238"
49 10	49 11 43,22141	10 1,09217	0,01737	2.112	0.287	2,454	0,227
49 20	49 21 44,31358	10 1,07480	0,01734	1.825	0.259	2,227	0,215
49 30	49 31 45,38838	10 1,05746	0,01734	1.566	0.234	2,012	0,205
49 40	49 41 46,44584	10 1,04012	0,01732	1.332	0.209	1,807	0,194
49 50	49 51 47,48596	10 1,02280	0,01731	1.123	0.187	1,613	0,184
50° 0'	50° 1' 48,50876"	10' 1,00549"	0,01729	0.936	0.164	1,429"	0,172"
50 10	50 11 49,51425	10 0,98820	0,01727	0.772	0.144	1,257	0,161
50 20	50 21 50,50245	10 0,97093	0,01726	0.628	0.125	1,096	0,150
50 30	50 31 51,47338	10 0,95367	0,01724	0.503	0.107	0,946	0,140
50 40	50 41 52,42705	10 0,93643	0,01721	0.396	0.091	0,806	0,128
50 50	50 51 53,36348	10 0,91922	0,01721	0.305	0.076	0,678	0,117
51° 0'	51° 1' 54,28270"	10' 0,90201"	0,01717	0.229	0.062	0,561"	0,107"
51 10	51 11 55,18471	10 0,88484	0,01717	0.167	0.049	0,454	0,095
51 20	51 21 56,06955	10 0,86767	0,01712	0.118	0.039	0,359	0,084
51 30	51 31 56,93722	10 0,85055	0,01712	0.079	0.029	0,275	0,073
51 40	51 41 57,78777	10 0,83343	0,01709	0.050	0.021	0,202	0,061
51 50	51 51 58,62120	10 0,81634	0,01707	0.029	0.014	0,141	0,051
52° 0'	52° 1' 59,43754"	10' 0,79927"	0,01703	0.015	0.009	0,090"	-0,039"
52 10	52 12 0,23681	10 0,78224	0,01701	0.006	0.004	0,051	-0,028
52 20	52 22 1,01905	10 0,76523	0,01700	+0.002	0.002	0,023	-0,017
52 30	52 32 1,78428	10 0,74823	0,01695	0.000		0,006	-0,006
52 40	52 42 2,53251	10 0,73123	0,01693	0.000		0,000	+0,006
52 50	52 52 3,26379	10 0,71435		0.000		0,006	+0,017
53° 0'	53° 2' 3,97814"			-0.002		0,023	

Kugel <i>u</i>	Ellipsoid φ	Differenzen		<i>log m</i>	Diff.	<i>k</i>	Diff.
		+	—	+	—		
52° 0'	52° 1' 59,43754"	10' 0,79927"	0,01703"	0-015	0-009	0,090"	—0,039"
52 10	52 12 0,23681	10 0,78224	0,01701	0-006	0-004	0,051	—0,028
52 20	52 22 1,01905	10 0,76523	0,01700	0-002	0-002	0,023	—0,017
52 30	52 32 1,78428	10 0,74823	0,01695	+		0,006	+0,006
52 40	52 42 2,53251	10 0,73128	0,01693	+		0,000	+0,006
52 50	52 52 3,25379	10 0,71435	0,01690	0-000	0-002	0,006	+0,017
53° 0'	53° 2' 3,97814"	10' 0,69745"	0,01688"	0-002	0-004	0,023"	+0,028"
53 10	53 12 4,67559	10 0,68057	0,01684	0-006	0-009	0,051	0,040
53 20	53 22 5,35616	10 0,66373	0,01681	0-015	0-014	0,091	0,051
53 30	53 32 6,01989	10 0,64692	0,01677	0-029	0-021	0,142	0,062
53 40	53 42 6,66681	10 0,63015	0,01675	0-050	0-029	0,204	0,074
53 50	53 52 7,29696	10 0,61340	0,01672	0-079	0-040	0,278	0,085
54° 0'	54° 2' 7,91036"	10' 0,59668"	0,01667"	0-119	0-050	0,363"	+0,097"
54 10	54 12 8,50704	10 0,58001	0,01664	0-169	0-063	0,460	0,109
54 20	54 22 9,08705	10 0,56337	0,01661	0-232	0-077	0,569	0,120
54 30	54 32 9,65042	10 0,54676	0,01658	0-309	0-092	0,689	0,131
54 40	54 42 10,19718	10 0,53018	0,01652	0-401	0-109	0,820	0,144
54 50	54 52 10,72736	10 0,51366	0,01650	0-510	0-128	0,964	0,154
55° 0'	55° 2' 11,24102"	10' 0,49716"	0,01645"	0-638	0-147	1,118"	+0,167"
55 10	55 12 11,73818	10 0,48071	0,01642	0-785	0-168	1,285	0,178
55 20	55 22 12,21889	10 0,46429	0,01638	0-953	0-191	1,463	0,190
55 30	55 32 12,68318	10 0,44791	0,01633	1-144	0-214	1,653	0,202
55 40	55 42 13,13109	10 0,43158	0,01630	1-358	0-240	1,855	0,213
55 50	55 52 13,56267	10 0,41528	0,01624	1-598	0-267	2,068	0,225
56° 0'	56° 2' 13,97795"	10' 0,39904"	0,01621"	1-865	0-296	2,293"	+0,238"
56 10	56 12 14,37699	10 0,38283	0,01617	2-161	0-325	2,531	0,249
56 20	56 22 14,75982	10 0,36666	0,01611	2-486	0-356	2,780	0,261
56 30	56 32 15,12648	10 0,35055	0,01608	2-842	0-389	3,041	0,273
56 40	56 42 15,47703	10 0,33447	0,01602	3-231	0-423	3,314	0,285
56 50	56 52 15,81150	10 0,31845	0,01598	3-654	0-459	3,599	0,297
57° 0'	57° 2' 16,12995"	10' 0,30247"	0,01593"	4-113	0-496	3,896"	+0,309"
57 10	57 12 16,43242	10 0,28654	0,01588	4-609	0-535	4,205	0,321
57 20	57 22 16,71896	10 0,27066	0,01584	5-144	0-575	4,526	0,333
57 30	57 32 16,98962	10 0,25482	0,01578	5-719	0-616	4,859	0,346
57 40	57 42 17,24444	10 0,23904	0,01574	6-335	0-659	5,205	0,358
57 50	57 52 17,48348	10 0,22330	0,01567	6-994	0-704	5,563	0,370
58° 0'	58° 2' 17,70678"	10' 0,20763"	0,01563"	7-698	0-750	5,933"	+0,382"
58 10	58 12 17,91441	10 0,19200	0,01558	8-448	0-798	6,315	0,395
58 20	58 22 18,10641	10 0,17642	0,01552	9-246	0-846	6,710	0,407
58 30	58 32 18,28283	10 0,16090	0,01547	10-092	0-898	7,117	0,419
58 40	58 42 18,44373	10 0,14543	0,01541	10-990	0-951	7,536	0,431
58 50	58 52 18,58916	10 0,13002		11-941	1-002	7,967	0,443
59° 0'	59° 2' 18,71918			12-943		8,410	

φ	$\log(\sigma_1)$		$\log(\sigma_2)$		$\log(\sigma_3)$		$\log(\sigma_4)$		$\log(\sigma_5)$	
30°	5.52260 _n	—	5.99435 _n	—	3.587	—	3.712	+	3.976 _n	—
31	5.49609 _n	2651	5.98542 _n	893	3.560	27	3.803	91	3.995 _n	+19
32	5.46727 _n	2882	5.97613 _n	929	3.530	30	3.885	82	4.009 _n	14
33	5.43583 _n	3144	5.96647 _n	966	3.498	32	3.959	74	4.022 _n	13
34	5.40134 _n	3449	5.95644 _n	1003	3.462	36	4.029	70	4.035 _n	13
		3805		1042		40		65		11
35°	5.36329 _n	—	5.94602 _n	—	3.422	—	4.094	—	4.046 _n	—
36	5.32097 _n	4232	5.93520 _n	1082	3.378	44	4.155	61	4.054 _n	+ 8
37	5.27346 _n	4751	5.92398 _n	1122	3.329	49	4.214	59	4.061 _n	7
38	5.21948 _n	5398	5.91235 _n	1163	3.272	57	4.270	56	4.065 _n	4
39	5.15717 _n	6231	5.90029 _n	1206	3.206	66	4.323	53	4.068 _n	+ 3
		7357		1249		78		52		— 1
40°	5.08360 _n	—	5.88780 _n	—	3.128	—	4.375	—	4.067 _n	—
41	4.99460 _n	8900	5.87485 _n	1295	3.032	96	4.426	51	4.064 _n	— 3
42	4.88154 _n	11306	5.86143 _n	1342	2.908	124	4.474	48	4.058 _n	4
43	4.72741 _n	15413	5.84754 _n	1389	2.732	176	4.523	49	4.048 _n	10
44	4.48516 _n	24225	5.83316 _n	1438	2.431	301	4.569	46	4.033 _n	15
				1490				46		20
45°	3.88570 _n	—	5.81826 _n	—	—∞	—	4.615	—	4.013 _n	—
46	4.18121 _n	+	5.80283 _n	1543	2.431 _n	+	4.660	45	3.987 _n	—26
47	4.58102 _n	39981	5.78687 _n	1598	2.732 _n	301	4.705	45	3.952 _n	35
48	4.78513 _n	20411	5.77031 _n	1654	2.908 _n	176	4.749	44	3.907 _n	45
49	4.92311 _n	13798	5.75317 _n	1714	3.032 _n	124	4.792	43	3.845 _n	62
		10420		1775		86		43		—86
50°	5.02731 _n	—	5.73542 _n	—	3.128 _n	—	4.835	—	3.759 _n	—
51	5.11089 _n	8358	5.71703 _n	1839	3.206 _n	78	4.877	42	3.632 _n	127
52	5.18054 _n	6965	5.69797 _n	1906	3.272 _n	66	4.920	43	3.413 _n	219
53	5.24012 _n	5958	5.67821 _n	1976	3.329 _n	57	4.962	42	2.806 _n	607
54	5.29296 _n	5194	5.65772 _n	2049	3.378 _n	49	5.004	42	3.202	
55	5.33799 _n	4593	5.63647 _n	2125	3.422 _n	44	5.046	42	3.617	

Besondere Tafel für $\log(\sigma_1)$.

φ	0'	10'	20'	30'	40'	50'	Diff.
45°	3.88570 _n	3.58776 _n	1.73612 _n	3.61198	3.87962	4.05674	+
46	4.18221	4.27944	4.35882	4.42590	4.48399	4.53521	12547
47	4.58102	4.62244	4.66024	4.69500	4.72718	4.75712	4581
48	4.78513	4.81142	4.83619	4.85963	4.88185	4.90298	2801
49	4.92311	4.94234	4.96074	4.97838	4.99532	5.01162	2013
							1569
50°	5.02731	5.04244	5.05705	5.07118	5.08483	5.09806	1283
51	5.11089	5.12334	5.13542	5.14717	5.15859	5.16971	1083
52	5.18054	5.19109	5.20138	5.21141	5.22121	5.23077	935
53	5.24012	5.24925	5.25819	5.26692	5.27548	5.28386	820
54	5.29206	5.30009	5.30797	5.31569	5.32327	5.33070	729
55	5.33799						

In der Gegend von $\varphi = 45^\circ$, wo (σ_1) durch Null geht, braucht man $\log(\sigma_1)$ nur auf sehr wenige Stellen, man kann daher trotz der Ungleichheit der Differenzen mit hinreichender Genauigkeit proportional oder graphisch interpolieren.

Coefficients der neuen Auflösung der geodätischen Haupt Aufgabe.

φ	$\log(\lambda_1)$		$\log(\lambda_2)$		$\log(\lambda_3)$		$\log(\lambda_4)$		$\log(\lambda_5)$	
30°	5.99325 _n	+	5.99435 _n	—	4.065 _n	+	4.012 _n	—	4.013 _n	+
31	6.00207 _n	882	5.98542 _n	893	4.084 _n	19	4.003 _n	9	4.035 _n	22
32	6.01087 _n	880	5.97613 _n	929	4.104 _n	20	3.987 _n	16	4.054 _n	19
33	6.01964 _n	877	5.96647 _n	966	4.123 _n	19	3.966 _n	21	4.073 _n	19
34	6.02837 _n	873	5.95644 _n	1003	4.142 _n	19	3.938 _n	28	4.090 _n	17
		867		1042		18		38		16
35°	6.03704 _n		5.94602 _n		4.160 _n		3.900 _n		4.106 _n	
36	6.04566 _n	862	5.93520 _n	1082	4.177 _n	17	3.850 _n	50	4.121 _n	15
37	6.05420 _n	854	5.92398 _n	1122	4.194 _n	17	3.782 _n	68	4.134 _n	13
38	6.06265 _n	845	5.91235 _n	1163	4.211 _n	17	3.685 _n	97	4.146 _n	12
39	6.07098 _n	833	5.90029 _n	1206	4.227 _n	16	3.545 _n	140	4.157 _n	11
		829		1249		16		—		9
40°	6.07927 _n		5.88780 _n		4.243 _n		3.262 _n		4.166 _n	
41	6.08745 _n	818	5.87485 _n	1295	4.258 _n	15	1.409 _n	+	4.174 _n	8
42	6.09550 _n	805	5.86143 _n	1342	4.273 _n	15	3.331 _n		4.181 _n	7
43	6.10343 _n	793	5.84754 _n	1389	4.287 _n	14	3.657 _n	326	4.185 _n	4
44	6.11124 _n	781	5.83316 _n	1438	4.301 _n	14	3.861 _n	204	4.188 _n	3
		768		1490		13		152		±
45°	6.11892 _n		5.81826 _n		4.314 _n		4.013 _n		4.189 _n	
46	6.12646 _n	754	5.80283 _n	1543	4.327 _n	13	4.138 _n	125	4.188 _n	1
47	6.13387 _n	741	5.78685 _n	1598	4.340 _n	13	4.245 _n	107	4.185 _n	3
48	6.14113 _n	726	5.77031 _n	1654	4.352 _n	12	4.340 _n	95	4.179 _n	6
49	6.14825 _n	712	5.75317 _n	1714	4.364 _n	12	4.427 _n	87	4.169 _n	10
		697		1775		12		79		13
50°	6.15522 _n		5.73542 _n		4.376 _n		4.506 _n		4.156 _n	
51	6.16203 _n	681	5.71703 _n	1839	4.387 _n	11	4.580 _n	74	4.139 _n	17
52	6.16869 _n	666	5.69797 _n	1906	4.398 _n	11	4.650 _n	70	4.117 _n	22
53	6.17519 _n	650	5.67821 _n	1976	4.408 _n	10	4.716 _n	67	4.087 _n	30
54	6.18153 _n	634	5.65772 _n	2049	4.418 _n	10	4.781 _n	64	4.049 _n	38
55°	6.18771 _n	618	5.63647 _n	2125	4.428 _n	10	4.842 _n	61	3.999 _n	50

Besondere Tafel für $\log(\sigma_2) = \log(\lambda_2)$.

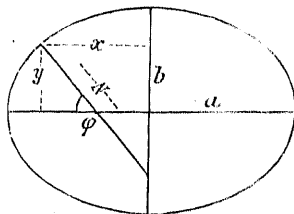
φ	0'	10'	20'	30'	40'	50'	Diff.
45°	5.81826 _n	5.81572 _n	5.81317 _n	5.81061 _n	5.80803 _n	5.80544 _n	261
46	5.80283 _n	5.80021 _n	5.79757 _n	5.79491 _n	5.79224 _n	5.78956 _n	271
47	5.78685 _n	5.78414 _n	5.78140 _n	5.77865 _n	5.77589 _n	5.77311 _n	280
48	5.77031 _n	5.76749 _n	5.76466 _n	5.76182 _n	5.75895 _n	5.75607 _n	288
49	5.75317 _n	5.75026 _n	5				
50°	5.73542 _n	5.73240 _n					
51	5.71703 _n	5.71390 _n					
52	5.69797 _n	5.69478 _n					
53	5.67821 _n	5.67485 _n					
54	5.65772 _n	5.65424 _n					
55	5.63647 _n						

φ	$\log V$	Differenzen		φ	$\log V$	Differenzen	
28° 0'	0.001 1345-090	—	—	35° 0'	0.000 9768-434	—	—
10	1310-018	35-072	0-136	10	9728-688	39-746	0-084
20	1274-810	35-208	0-136	20	9688-858	39-830	0-081
30	1239-466	35-344	0-134	30	9648-947	39-911	0-081
40	1203-988	35-478	0-134	40	9608-955	39-992	0-080
50	1168-376	35-612	0-131	50	9568-883	40-072	0-078
		35-743	0-132			40-150	0-076
29° 0'	0.001 1132-633	35-875	0-128	36° 0'	0.000 9528-733	40-226	0-076
10	1096-758	36-003	0-130	10	9488-507	40-302	0-074
20	1060-755	36-133	0-126	20	9448-205	40-376	0-072
30	1024-622	36-259	0-126	30	9407-829	40-448	0-072
40	0988-363	36-385	0-125	40	9367-381	40-520	0-070
50	0951-978	36-510	0-123	50	9326-861	40-590	0-068
30° 0'	0.001 0915-468	36-633	0-123	37° 0'	0.000 9286-271	40-658	0-067
10	0878-835	36-756	0-121	10	9245-613	40-725	0-066
20	0842-079	36-877	0-119	20	9204-888	40-791	0-064
30	0805-202	36-996	0-119	30	9164-097	40-855	0-064
40	0768-206	37-115	0-117	40	9123-242	40-919	0-061
50	0731-091	37-232	0-116	50	9082-323	40-980	0-061
31° 0'	0.001 0693-859	37-348	0-115	38° 0'	0.000 9041-343	41-041	0-058
10	0656-511	37-463	0-113	10	9000-302	41-099	0-058
20	0619-048	37-576	0-112	20	8959-203	41-157	0-055
30	0581-472	37-688	0-112	30	8918-046	41-212	0-056
40	0543-784	37-800	0-109	40	8876-834	41-268	0-053
50	0505-984	37-909	0-108	50	8835-566	41-321	0-052
32° 0'	0.001 0468-075	38-017	0-108	39° 0'	0.000 8794-245	41-373	0-050
10	0430-058	38-125	0-105	10	8752-872	41-423	0-049
20	0391-933	38-230	0-105	20	8711-449	41-472	0-049
30	0353-703	38-335	0-103	30	8669-977	41-521	0-045
40	0315-368	38-438	0-102	40	8628-456	41-566	0-045
50	0276-930	38-540	0-101	50	8586-890	41-611	0-044
33° 0'	0.001 0238-390	38-641	0-099	40° 0'	0.000 8545-279	41-655	0-042
10	0199-749	38-740	0-098	10	8503-624	41-697	0-041
20	0161-009	38-838	0-097	20	8461-927	41-738	0-039
30	0122-171	38-935	0-095	30	8420-189	41-777	0-038
40	0083-236	39-030	0-094	40	8378-412	41-815	0-036
50	0044-206	39-124	0-094	50	8336-597	41-851	0-035
34° 0'	0.001 0005-082	39-218	0-090	41° 0'	0.000 8294-746	41-886	0-034
10	0.000 9965-864	39-308	0-091	10	8252-860	41-920	0-033
20	9926-556	39-399	0-088	20	8210-940	41-953	0-029
30	9887-157	39-487	0-088	30	8168-987	41-982	0-031
40	9847-670	39-575	0-086	40	8127-005	42-013	0-027
50	9808-095	39-661		50	8084-992	42-040	
35° 0'	0.000 9768-434			42° 0'	0.000 8042-952		

φ	$\log V$	Differenzen		φ	$\log V$	Differenzen	
42° 0'	0.000 8042-952	—	—	49° 0'	0.000 6270-926	—	+
10	8000-885	42-067	0-025	10	6229-035	41-891	0 035
20	7958-793	42-092	0-023	20	6187-179	41-856	0-036
30	7916-678	42-115	0-023	30	6145-359	41-820	0-038
40	7874-540	42-138	0-021	40	6103-577	41-782	0-039
50	7832-381	42-159	0-019	50	6061-834	41-743	0-040
		42-178	0-018			41-703	0-042
43° 0'	0.000 7790-203	42-196	0-017	50° 0'	0.000 6020-131	41-661	0-044
10	7748-007	42-213	0-014	10	5978-470	41-617	0-045
20	7705-794	42-227	0-015	20	5936-853	41-572	0-045
30	7663-567	42-242	0-012	30	5895-281	41-527	0-049
40	7621-325	42-254	0-010	40	5853-754	41-478	0-048
50	7579-071	42-264	0-010	50	5812-276	41-430	0-051
44° 0'	0.000 7536-807	42-274	0-008	51° 0'	0.000 5770-846	41-379	0-051
10	7494-533	42-282	0-007	10	7529-467	41-328	0-054
20	7452-251	42-289	0-004	20	5688-139	41-274	0-055
30	7409-962	42-293	0-005	30	5646-865	41-219	0-055
40	7367-669	42-298	0-001	40	5605-646	41-164	0-058
50	7325-371	42-299	—	50	5564-482	41-106	0-059
45° 0'	0.000 7283-072	42-301	+	52° 0'	0.000 5523-376	41-047	0-059
10	7240-771	42-299	0-002	10	5482-329	40-988	0-063
20	7198-472	42-298	0-001	20	5441-341	40-925	0-062
30	7156-174	42-294	0-004	30	5400-416	40-863	0-065
40	7113-880	42-290	0-007	40	5359-553	40-798	0-066
50	7071-590	42-283	0-008	50	5318-755	40-732	0-066
46° 0'	0.000 7029-307	42-275	0-009	53° 0'	0.000 5278-023	40-666	0-069
10	6987-032	42-266	0-010	10	5237-357	40-597	0-070
20	6944-766	42-256	0-013	20	5196-760	40-527	0-072
30	6902-510	42-243	0-013	30	5156-233	40-455	0-072
40	6860-267	42-230	0-015	40	5115-778	40-383	0-074
50	6818-037	42-215	0-017	50	5075-395	40-309	0-075
47° 0'	0.000 6775-822	42-198	0-017	54° 0'	0.000 5035-086	40-234	0-077
10	6733-624	42-181	0-019	10	4994-852	40-157	0-078
20	6691-443	42-162	0-021	20	4954-695	40-079	0-080
30	6649-281	42-141	0-022	30	4914-616	39-999	0-080
40	6607-140	42-119	0-024	40	4874-617	39-919	0-083
50	6565-021	42-095	0-024	50	4834-698	39-836	0-083
48° 0'	0.000 6522-926	42-071	0-027	55° 0'	0.000 4794-862	39-753	0-085
10	6480-855	42-044	0-028	10	4755-109	39-668	0-087
20	6438-811	42-016	0-028	20	4715-441	39-581	0-087
30	6396-795	41-988	0-032	30	4675-860	39-494	0-089
40	6354-807	41-956	0-031	40	4636-366	39-405	0-090
50	6312-851	41-925	—	50	4596-961	39-315	—
49° 0'	0.000 6270-926			56° 0'	0.000 4557-646		

Übersicht der Haupt-Bezeichnungen, welche in den mathematischen Teilen dieses Buches angewendet sind.

(Vgl. Fig. 1.)

Fig. 1.
Meridian-Ellipse.Gleichung der Meridian-Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$ Grosse Halbaxe = $a.$ Kleine Halbaxe = $b.$ Polar-Krümmungshalbmesser = $c = \frac{a^2}{b}.$ Excentricitäten: $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2}, \quad e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}, \quad (1 - e^2)(1 + e'^2) = 1.$$

$$a = c \sqrt{1 - e^2} = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2}}, \quad b = c(1 - e^2) = \frac{c}{1 + e'^2}.$$

Geographische Breite (oder Polhöhe) = $\varphi.$ $\tan \varphi = t.$

$$W^2 = 1 - e^2 \sin^2 \varphi \quad V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi.$$

$$\frac{W^2}{1 - e^2} = V^2, \quad V^2 = 1 + \eta^2, \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi.$$

Meridian-Krümmungshalbmesser: $M = \frac{c}{V^3}.$ Quer-Krümmungshalbmesser: $N = \frac{c}{V}.$ Mittlerer Krümmungshalbmesser: $r = \sqrt{MN} = \frac{c}{V^2}.$ Haupt-Krümmungs-Verhältnis: $\frac{N}{M} = V^2.$ Reduzierte Breite = $\psi.$

$$\tan \psi = \tan \varphi \sqrt{1 - e^2}. \quad \tan \varphi = \tan \psi \sqrt{1 + e'^2}.$$

In den meisten Fällen bekommt man die einfachsten Formeln, wenn man als Konstanten des Umdrehungs-Ellipsoids c und e'^2 nimmt, und $V^2 = 1 + \eta^2$, $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$.

Berichtigungen und Nachträge.*)

- S. 3. Zu der arabischen Gradmessung unter *Almanon* ist eine neuere Massbestimmung der arabischen Elle am Nilpegel von Kairo gemacht, s. „Zeitschr. f. Verm. 1889“, S. 100—109, 159 und S. 439—445. Nach der Messung von *Reiss* ist die arabische Elle = 0,540 Meter anzunehmen.
- S. 4. Zu der Triangulierung von *Snellius* und zu der Geschichte der Gradmessungen im allgemeinen, sind wertvolle Mitteilungen gemacht in der „Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde, onder Redactie van *I. Boer* Hz. te Utrecht“. Graadmetingen in Nederland door *Dr. J. D. van der Plaats*, und Graadmeting, Geschiedkundig overzicht door *G. B. H. de Balbian*. Utrecht 1889, Jaargang V., 1^e bis 6^e Aflevering.
- S. 6. Peru, Mittelbreite, statt $— 1^{\circ} 33' 32''$ lies $— 1^{\circ} 31' 30''$ (vgl. S. 498).
- S. 117 und S. 184. Über die Gradmessungs- und Landesvermessungs-Triangulierung des Königreichs Sachsen ist inzwischen ein umfassendes amtliches Werk erschienen: „Das trigonometrische Netz I. Ordnung, bearbeitet von *A. Nagel*“, 1890, Druck und Verlag von *Stankiewicz* in Berlin.
- S. 151. Zu dem *Schreiberschen* Satz über günstigste Gewichts-Verteilung ist eine Abhandlung von *Runge* in der „Zeitschr. f. Verm. 1890“, S. 21—24 zu bemerken.
- S. 211. (23) bis (23_n), die scharfe Berechnung von $\log(1 - e^2)$, giebt nicht 6.4035, sondern 6.4040.
- S. 381. Im zweiten Nenner von (38) statt 25 lies 24.
- S. 385. Im Kleingedruckten statt Kapitel XI. lies Kapitel X.
- S. 417. In (23) statt $\lambda^2 \sin^2 \varphi$ lies $l^2 \sin^2 \varphi$.
- S. 523. In den Fehler-Gleichungen (5) sind Absolut-Glieder zuzusetzen.

*) Der erste Teil S. 1—192 dieses Bandes wurde schon im Winter 1888—1889 gedruckt, was wegen der Vergleichung mit der inzwischen fortgeschrittenen geodätischen Literatur zu bemerken nötig ist.